Jméno a příjmení (čitelně): Zymin. Vzor

Zakroužkujte jméno cvičícího a čas cvičení:

Belejová Beran Johanovská Prokop Zymin

9:15 11:00 12:45 14:30 16:15 18:00

Závěrečný test ZS 2022/23
Varianta A

V každé úloze všechny kroky výpočtu podrobně zdůvodněte.

1. (4 body) Určete limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)^3-(n-1)^3}{(2n+5)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2n+3}}.$$

2. (4 body) Zderivujte funkci

$$f(x) = \ln\left(\frac{3x}{x-5}\right),$$

spočtenou derivaci co nejvíce zjednodušte. Určete definiční obor funkce i její derivace.

3. (12 bodů) Parabola je zadána jako graf funkce $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$. Určete body $x_0 \in \mathbb{R}$, v nichž má tečna ke grafu funkce f rovnici $y = kx + q$ se směrnicí $k = 1$. V každém takovém bodě pak spočtěte hodnotu koeficientu q a napište rovnici příslušné tečny. Načrtněte tuto parabolu s vyznačenými průsečíky s osami, vrcholem a se zadanou tečnou.

4. (20 bodů) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{8(3-x)}{(x-4)^2}$$

tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je f kladná/záporná, průsečíky s osami, limity v krajních bodech D_f, derivaci funkce a její nulové body, intervaly monotonie, lokální a globální extrémy, obor hodnot, asymptoty, druhou derivaci, oblasti konvexity, konkavity a inflexní body. Nakreslete graf funkce.

5. (20 bodů) Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4y + 3x$ na množině

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \le 100;\ x + 2y + 10 \ge 0\}.$$

U kandidátů na zakřivené části hranice množiny M (mimo vrcholy) spočtěte příslušnou hodnotu λ. Množinu M nakreslete a vyznačte do ní všechny nalezené kandidáty na extrém.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+3)^3-(n-1)^3}{(2n+5)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2n+3}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+9n^2+\_\_ - n^3+3n^2+\ldots}{(2n+5)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2n+3}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{12n^2+\_\_}{(2n+5)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2n+3}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{12+\overset{\to 0}{\sim}}{\left(2+\frac{5}{n}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2+\frac{3}{n}}} =$

$= \frac{12}{4} = \underline{\underline{3}}$

2) $f(x) = \ln\left(\frac{3x}{x-5}\right)$ $\quad D_f = (-\infty;0)\cup(5;+\infty)$

	$(-\infty;0)$	$(0;5)$	$(5;+\infty)$
	+	−	+
$3x$	−	+	+
$x-5$	−	−	+

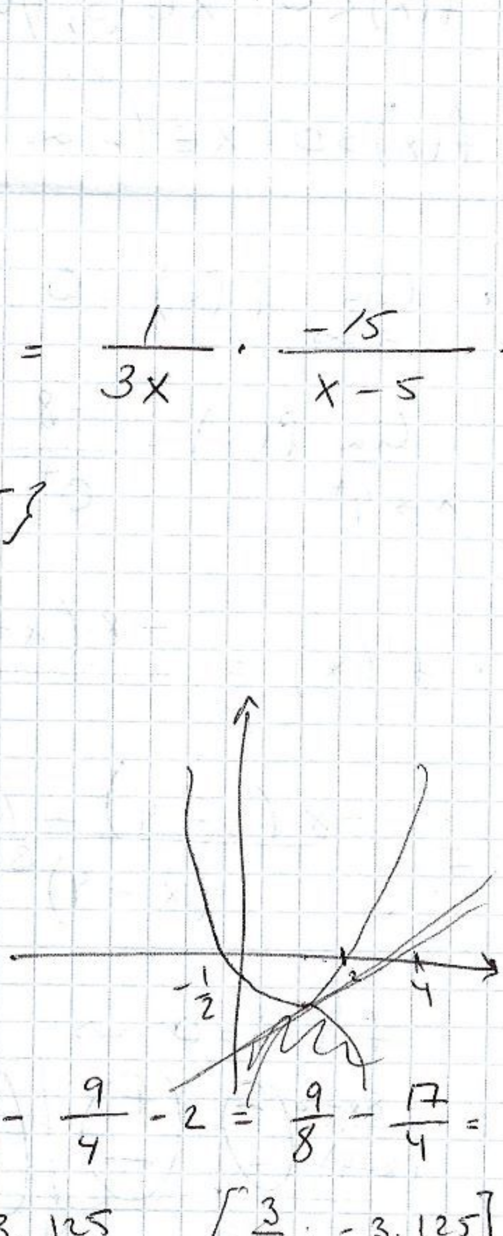
$f'(x) = \frac{x-5}{3x}\cdot\frac{3(x-5)-3x}{(x-5)^2} = \frac{1}{3x}\cdot\frac{-15}{x-5} =$

$= -\frac{5}{x(x-5)}$ $\quad D_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{0;5\}$

3) $f(x) = 2x^2-3x-2$

$f'(x) = 4x-3 = 1 \Rightarrow x = 1$

$t(x) = -3+(x-1) = x-4$



$P_y: [0;-2]$

$P_x: [2;0], \left[-\frac{1}{2};0\right]$

$f\left(\frac{3}{4}\right) = 2\cdot\frac{9}{16} - \frac{9}{4} - 2 = \frac{9}{8} - \frac{17}{4} =$

$= -\frac{25}{8} = -3{,}125$ $\quad \left[\frac{3}{4};-3{,}125\right]$

4) $f(x) = \dfrac{8(3-x)}{(x-4)^2}$

$\cdot\ D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

$\cdot\ f(-x) = \dfrac{8(3+x)}{(-x-4)^2} = \dfrac{8(3+x)}{(x+4)^2} \rightarrow$ ani s, ani l.

$\cdot\ P_x:\ 3-x=0 \Rightarrow x=3 \rightarrow [3;0]$

$\cdot\ P_y: \left[0; \frac{3}{2}\right]$

	$(-\infty;3)$	$(3;4)$	$(4;\infty)$
$3-x$	+	−	−
$(x-4)^2$	+	+	+
	+	−	−

$f(x)<0:\ x \in (3;4) \cup (4;\infty)$

$f(x)>0:\ x \in (-\infty;3)$

$\cdot\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \dfrac{-8}{0^+} = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = -\infty$

$\cdot\ f'(x) = \dfrac{-8(x-4)^2 - 8(3-x)\cdot 2(x-4)}{(x-4)^4} =$

$= \dfrac{-8(x-4) - 16(3-x)}{(x-3)^3} = \dfrac{8x-16}{(x-4)^3}$

$f'(x)=0 \Rightarrow 8x-16=0 \Rightarrow x=2$

	$(-\infty;2)$	$(2;4)$	$(4;\infty)$
$8x-16$	−	+	+
$(x-4)^3$	−	−	+
	+	−	+

2 max

$f(x) \nearrow:\ x \in (-\infty;2) \cup (4;+\infty)$

$f(x) \searrow:\ [2;4)$

2

• $a(x) = kx + b$:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{8(3-x)}{(x-4)^2} \cdot \frac{1}{x} = 0 = k \qquad \lim_{x \to \infty} \left[\frac{8-x}{(x-4)^2} - kx \right] =$$

$$= \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

$\Rightarrow a(x) = 0$

svislá: z D_f : $x = 4$

• $$f''(x) = 8 \left(\frac{x-2}{(x-4)^3} \right)' = 8 \, \frac{(x-4)^3 - 3(x-2)(x-4)^2}{(x-4)^6} =$$

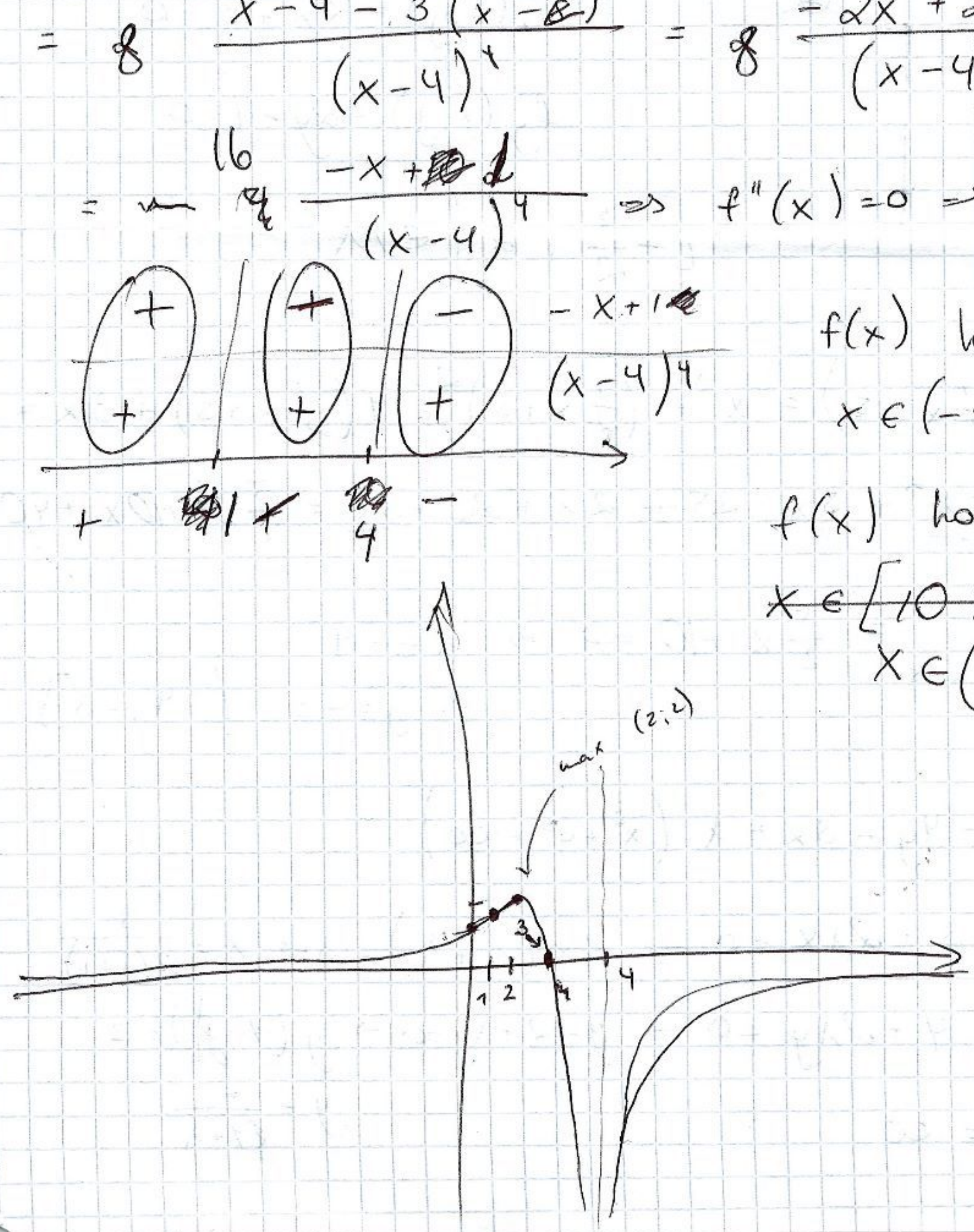
$$= 8 \, \frac{x-4-3(x-2)}{(x-4)^4} = 8 \, \frac{-2x+2}{(x-4)^4} =$$

$$= 16 \, \frac{-x+1}{(x-4)^4} \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

$-x+1$	+	+	−
$(x-4)^4$	+	+	+
	+ 1	+ 4	−

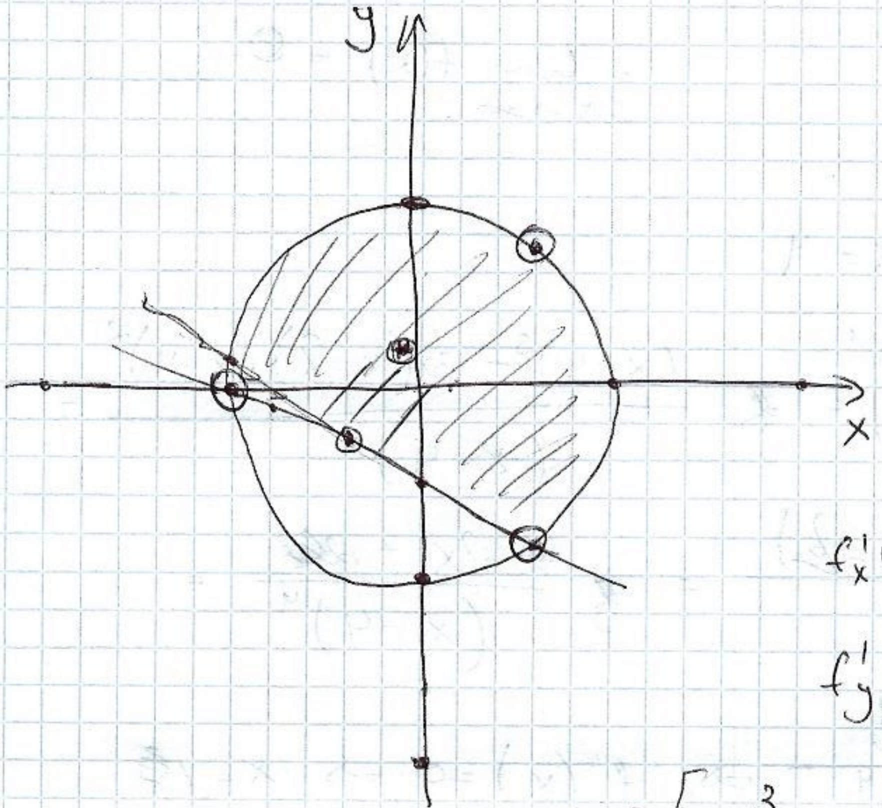
f(x) konvexní:
$x \in (-\infty; 1) \cup \cancel{(4; 10)}$

f(x) konkávní:
~~$x \in [10; \infty)$~~
$x \in (1; 4) \cup (4; +\infty)$



5) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4y + 3x$

$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 100;\ x + 2y + 10 \geq 0\}$



$2y = -x - 10$

$y = -\frac{1}{2}x - 5$

$f'_x(x, y) = 2x + 3 = 0$

$f'_y(x, y) = 2y - 4 = 0$

$\rightarrow \left[-\frac{3}{2};\ 2\right] \in M$

$f\left(x, y = -\frac{1}{2}x - 5\right) = x^2 + \left(\frac{1}{2}x + 5\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}x + 5\right) + 3x =$

$= x^2 + \frac{1}{4}x^2 + 5x + 25 + 2x + 20 + 3x = \frac{5}{4}x^2 + 10x + 40$

$\Rightarrow f'_x\Big|_{y = -\frac{1}{2}x - 5} = \frac{5}{2}x + 10 = 0 \Rightarrow x = -4$

$\Rightarrow y = -3 \quad [-4; -3]$

$L = x^2 + y^2 - 4y + 3x + \lambda\left(x^2 + y^2 - 100\right)$

$L'_x = 2x + 3 + 2\lambda x = 0 \rightarrow 2x(1 + \lambda) = -3 \rightarrow x = \frac{-3}{2(\lambda + 1)}$

$L'_y = 2y - 4 + 2\lambda y = 0 \rightarrow y - 2 + \lambda y = 0 \rightarrow y(1 + \cancel{y}) = 2$

$y = \frac{2}{1 + \lambda}$

$x^2 + y^2 = 100$

4

$$\rightarrow \frac{9}{4(\lambda+1)^2} + \frac{4}{(\lambda+1)^2} = 100$$

$$\frac{9}{(\lambda+1)^2} + \frac{16}{(\lambda+1)^2} = 400$$

$$\frac{1}{(\lambda+1)^2} = 16 \Rightarrow (\lambda+1)^2 = \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow \lambda + 1 = \frac{1}{4} \quad \& \quad \lambda+1 = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -\frac{3}{4} \qquad \lambda_2 = -\frac{5}{4}$$

$$\lambda_1: \ x = \frac{-3}{\frac{1}{2}} = 6 \quad y = 8 \rightarrow [-6;8] \in M$$

$$\lambda_2: \ x = +6 \qquad y = -8 \rightarrow [+6;-8] \in M$$

$$\Rightarrow f(-4;-3) = 16 + 9 + 12 - 12 = 25$$

$$f\left(-\frac{3}{2}; 2\right) = \frac{9}{4} + 4 - 8 - \frac{9}{2} = -4 - \frac{9}{4} = -11{,}25 \rightarrow \min$$

$$f(-10;0) = 100 - 30 = 70$$

$$f(6;8) = 36 + 64 - 32 + 18 = 68 + 18 = 86$$

$$f(6;-8) = 36 + 64 + 32 + 18 = 150 \rightarrow \max$$

$$x^2 + \left(\frac{1}{2}x + 5\right)^2 = 100$$

$$x^2 + \frac{1}{4}x^2 + 5x + 25 = 100$$

$$\frac{5}{4}x^2 + 5x - 75 = 0$$

$$\cancel{5x^2} \quad \frac{1}{4}x^2 + x - 15 = 0$$

$$x^2 + 4x - 60 = 0$$

$$D = 16 + 240 = 256$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 16}{2}$$

$$\boxed{\begin{matrix} x_1 = 6 \\ y_1 = -8 \end{matrix}} \qquad \begin{matrix} x_2 = -10 \\ y_2 = 0 \end{matrix}$$