

Matematika pro ekonomy
Domácí úkol 12
Průběh funkce I

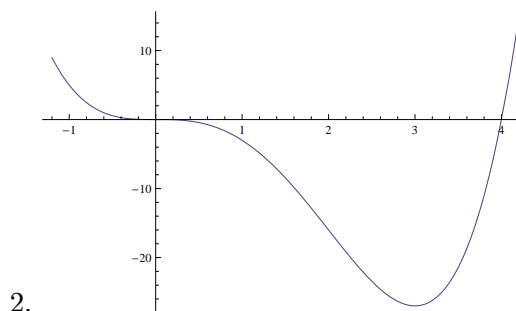
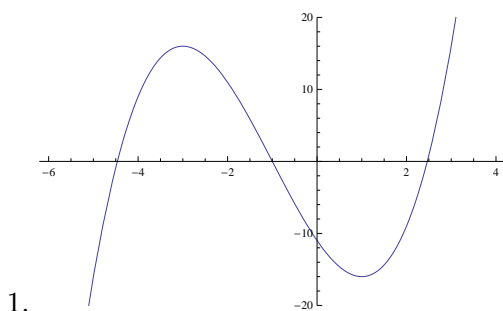
Vyšetřete průběh funkce, tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je f kladná/záporná, průsečíky s osami (případně hodnoty v jiných důležitých bodech), limity v krajních bodech D_f , derivaci funkce a její nulové body, lokální a globální extrémy, intervaly monotonie, asymptoty, druhou derivaci, oblasti konvexity, konkavity a inflexní body, nakreslete graf funkce. Vše řádně zdůvodněte.

- | | | |
|---------------------------|------------------------------------------|----------------------------|
| 1. $x^3 + 3x^2 - 9x - 11$ | 6. $e^2 e^{-x^2}$ | 11. $(3-x)e^x$ |
| 2. $x^4 - 4x^3$ | 7. $x\sqrt{1-x^2}$ (bez konv./konk.) | 12. $x^3 + 2x^2 - 15x$ |
| 3. $\frac{1-2x}{3x^2}$ | 8. $\frac{x^2-x-2}{x-3}$ | 13. $\sqrt{x^2+6x-16}$ |
| 4. $\frac{3x-1}{1-x}$ | 9. $\frac{1}{x^2-x-2}$ (bez konv./konk.) | 14. $\frac{x^2-5x+4}{x+1}$ |
| 5. $\frac{1}{1+e^{-x}}$ | 10. $\frac{\ln(3+2x-x^2)}{\ln 3}$ | 15. $\ln(1-x^2)$ |

Řešení:

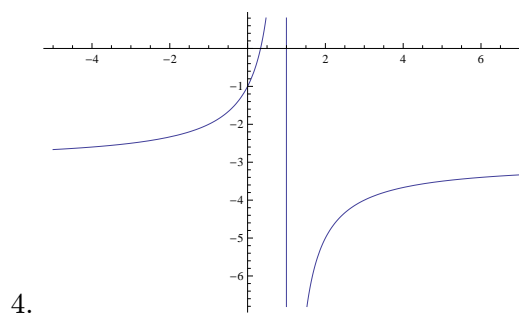
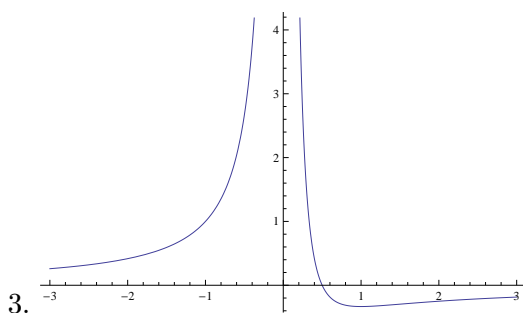
1. $D_f = \mathbb{R}$, kořeny: $-1, -1 \pm 2\sqrt{3}$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = \pm\infty$, roste v $(-\infty, -3), (1, +\infty)$, klesá v $(-3, 1)$, konvexní v $(-1, +\infty)$, konkávní v $(-\infty, -1)$, asymptoty nejsou.

2. $D_f = \mathbb{R}$, kořeny: 0 (trojnásobný), 4, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = +\infty$, klesá v $(-\infty, 3)$, roste v $(3, +\infty)$, konvexní v $(-\infty, 0), (2, +\infty)$, konkávní v $(0, 2)$, asymptoty nejsou.



3. $D_f = \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$, kořen: $\frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = 0$, roste v $(-\infty, 0), (1, +\infty)$, klesá v $(0, 1)$, konvexní v $(-\infty, 0), (0, \frac{3}{2})$, konkávní v $(\frac{3}{2}, +\infty)$, asymptota v $\pm\infty$ je $y = 0$.

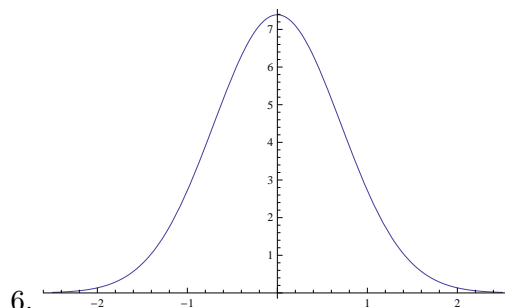
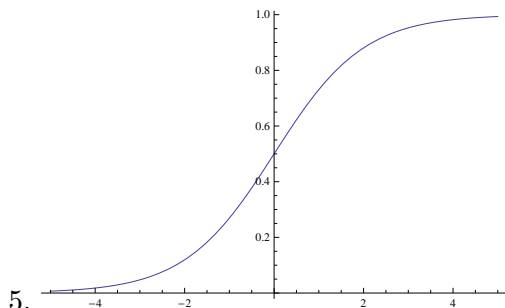
4. $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, kořen: $\frac{1}{3}$, $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} = \mp\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = -3$, roste v $(-\infty, 1), (1, +\infty)$, konvexní v $(-\infty, 1)$, konkávní v $(1, +\infty)$, asymptota v $\pm\infty$ je $y = -3$.



5. $D_f = \mathbb{R}$, $f(0) = \frac{1}{2}$, $f(x) > 0$ v \mathbb{R} , $\lim_{x \rightarrow -\infty} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} = 1$, roste v \mathbb{R} , konvexní v \mathbb{R}_- ,

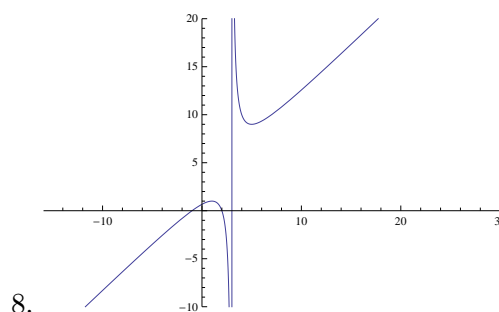
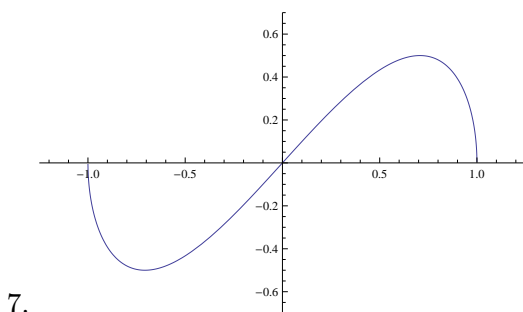
konkávni v \mathbb{R}_+ , asymptota v $-\infty$: $y = 0$, v $+\infty$: $y = 1$.

6. $D_f = \mathbb{R}$, $f(0) = e^2$, $f(x) > 0$ v \mathbb{R} , $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = 0$, roste v \mathbb{R}_- , klesá v \mathbb{R}_+ , konvexní v $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$, konkávni v $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, asymptota v $\pm\infty$ je $y = 0$. (Pozor, e^2 je konstanta.)



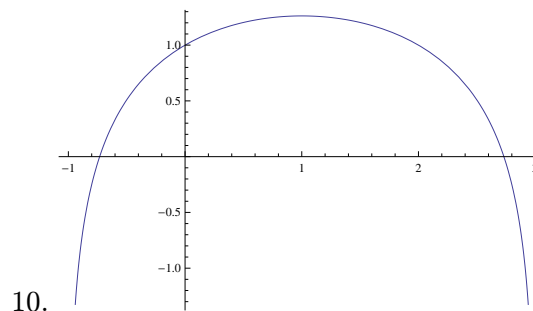
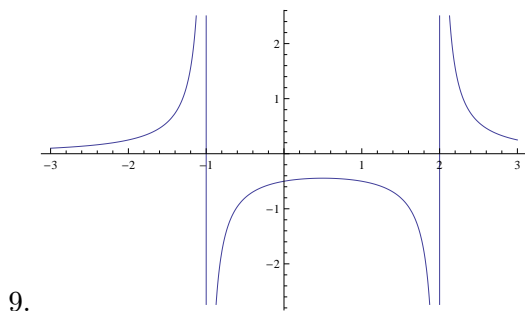
7. $D_f = \langle -1, 1 \rangle$, $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$, klesá v $\langle -1, -\frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$, $\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \rangle$, roste v $\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$.

8. $D_f = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$, $f(0) = \frac{2}{3}$, kořeny: $-1, 2$, $\lim_{x \rightarrow 3\pm} = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = \pm\infty$, roste v $(-\infty, 1)$, $(5, +\infty)$, klesá v $(1, 3)$, $(3, 5)$, konkávni v $(-\infty, 3)$, konvexní v $(3, +\infty)$, asymptota v $\pm\infty$ je $y = x + 2$.



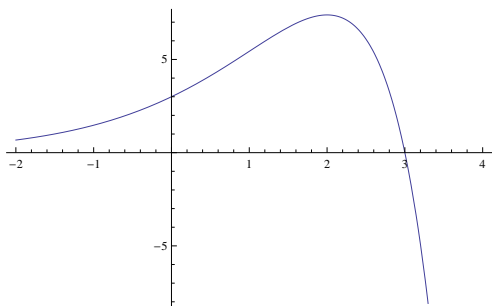
9. $D_f = (-\infty, -1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$, $f(0) = -\frac{1}{2}$, $f(x) \neq 0$ v \mathbb{R} , $\lim_{x \rightarrow -1\pm} = \mp\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2\pm} = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = 0$, roste v $(-\infty, -1)$, $(-1, \frac{1}{2})$, klesá v $(\frac{1}{2}, 2)$, $(2, +\infty)$, asymptota v $\pm\infty$ je $y = 0$.

10. $D_f = (-1, 3)$, $f(0) = 1$, kořeny $1 \pm \sqrt{3}$, $\lim_{x \rightarrow -1+} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3-} = -\infty$, roste v $(-1, 1)$, klesá v $(1, 3)$, konkávni v celém D_f . (Pozor, $\ln 3$ je konstanta.)

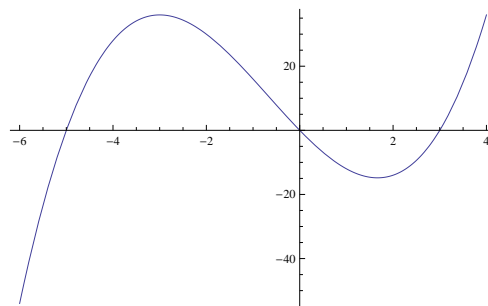


11. $D_f = \mathbb{R}$, kořen: 3, $\lim_{x \rightarrow -\infty} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} = -\infty$, roste v $(-\infty, 2)$, klesá v $\langle 2, +\infty \rangle$, konvexní v $(-\infty, 1)$, konkávni v $\langle 1, +\infty \rangle$, asymptota $y = 0$ v $-\infty$.

12. $D_f = \mathbb{R}$, kořeny: $-5, 0, 3$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = \pm\infty$, roste v $(-\infty, -3), \langle \frac{5}{3}, +\infty)$, klesá v $\langle -3, \frac{5}{3} \rangle$, konvexní v $\langle -\frac{2}{3}, +\infty)$, konkávní v $(-\infty, -\frac{2}{3})$, asymptoty nejsou.



11.

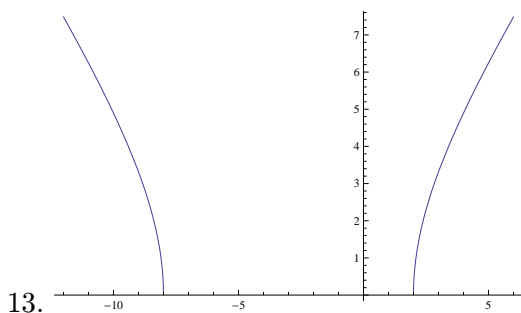


12.

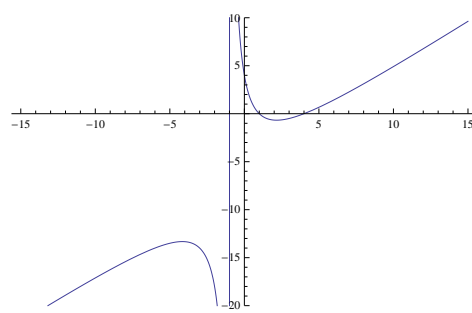
13. $D_f = (-\infty, -8) \cup \langle 2, +\infty)$, kořeny: $-8, 2$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = +\infty$, roste a je konkávní v $\langle 2, +\infty)$, klesá a je konkávní v $\langle -\infty, -8)$, asymptoty $y = -x - 3$ v $-\infty$, $y = x + 3$ v $+\infty$.

14. $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$, kořeny: $1, 4$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1 \pm} = \pm\infty$, roste v $(-\infty, -1 - \sqrt{10})$ a v $\langle -1 + \sqrt{10}, +\infty)$, klesá v $\langle -1 - \sqrt{10}, -1)$ a v $(-1, -1 + \sqrt{10})$, konkávní v $(-\infty, -1)$, konvexní v $(-1, +\infty)$, asymptota $y = x - 6$ v $\pm\infty$.

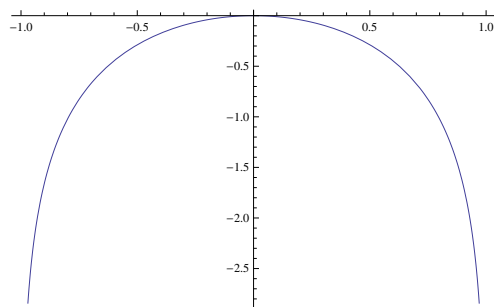
15. $D_f = (-1, 1)$, kořen: 0 , $\lim_{x \rightarrow \pm 1} = -\infty$, roste v $(-\infty, 0)$, klesá v $(0, \infty)$, konkávní v $(-1, 1)$.



13.



14.



15.

K dalšímu počítání: Na konci kapitoly 3 ze Žluté učebnice (str. 85–86) vyšetřete průběh funkcí z úloh 6–11, které obsahují racionální funkce, odmocniny, exponenciály, logaritmy. Vždy se snažte načrtnout graf zadané funkce.