

Matematika pro ekonomy
Domácí úkol 13
Průběh funkce II

Vyšetřete průběh funkce, tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je f kladná/záporná, průsečíky s osami (případně hodnoty v jiných důležitých bodech), limity v krajních bodech D_f , derivaci funkce a její nulové body, lokální a globální extrémy, intervaly monotonie, asymptoty, druhou derivaci, oblasti konvexity, konkavity a inflexní body, nakreslete graf funkce. Vše řádně zdůvodněte.

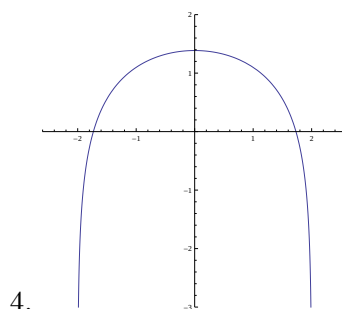
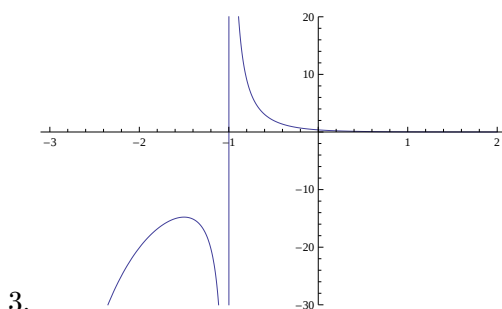
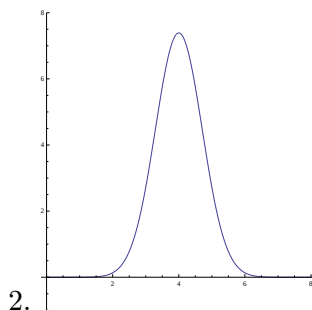
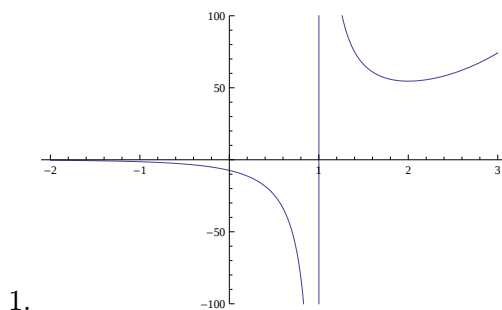
Příklady jsou vybrány ze závěrečných testů z minulých let.

- | | | |
|-----------------------------|--------------------------|----------------------------------|
| 1. $\frac{e^{x+2}}{x-1}$ | 5. $\frac{\ln(x^2)}{x}$ | 9. $\frac{x}{x^2-4}$ |
| 2. $e^{-x^2+8x-14}$ | 6. $(x^2+2x+1)e^x$ | 10. xe^{-x^2} |
| 3. $\frac{e^{-2x}}{e(x+1)}$ | 7. $\frac{1+\ln x}{x}$ | 11. $\sqrt{x}(2x-16\sqrt{x}+32)$ |
| 4. $\ln(4-x^2)$ | 8. $\frac{(x+2)^2}{e^x}$ | 12. $\sqrt{x}(x-3)^2$ |

Řešení:

1. $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$, kořeny nejsou, $\lim_{x \rightarrow -\infty} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1-} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1+} = +\infty$, klesá v $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$, roste v $(2, +\infty)$, konvexní v $(1, +\infty)$, konkávní v $(-\infty, 1)$, asymptota $y = 0$ v $-\infty$.

2. $D_f = \mathbb{R}$, kořeny nejsou, $f > 0$ všude, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = 0$, roste v $(-\infty, 4)$, klesá v $(4, +\infty)$, konkávní v $(4 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 4 + \frac{\sqrt{2}}{2})$, konvexní všude okolo, asymptota $y = 0$ v $\pm\infty$.

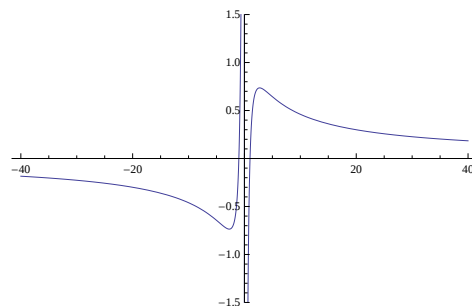


3. $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$, kořeny nejsou, $\lim_{x \rightarrow +\infty} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1-} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1+} = +\infty$, roste v $(-\infty, -1)$, klesá v $(-\frac{3}{2}, -1)$, $(-1, +\infty)$, konvexní v $(-1, +\infty)$, konkávní v $(-\infty, -1)$, asymptota $y = 0$ v $+\infty$.

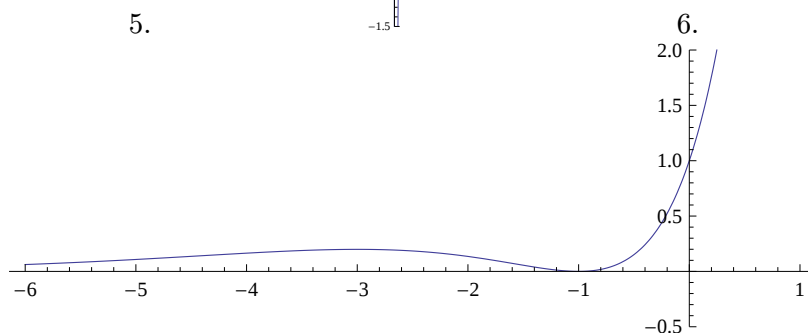
4. $D_f = (-2, 2)$, sudá, kořeny: $\pm\sqrt{3}$, $\lim_{x \rightarrow \pm 2} = -\infty$, roste v $(-2, 0)$, klesá v $(0, 2)$, konkávní všude.

5. $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, lichá, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0\pm} = \mp\infty$, roste v $(-e, 0)$, $(0, e)$, klesá v $(-\infty, -e)$, $(e, +\infty)$, konvexní v $(-e^{3/2}, 0)$, $(e^{3/2}, +\infty)$, konkávní v $(-\infty, -e^{3/2})$, $(0, e^{3/2})$, asymptota v $\pm\infty$: $y = 0$.

6. $D_f = \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ v $\mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} = +\infty$, roste v $(-\infty, -3)$, $(-1, +\infty)$, klesá v $(-3, -1)$, konvexní v $(-\infty, -3 - \sqrt{2})$, $(-3 + \sqrt{2}, +\infty)$, konkávní v $(-3 - \sqrt{2}, -3 + \sqrt{2})$, asymptota v $-\infty$ je $y = 0$, v $+\infty$ není.



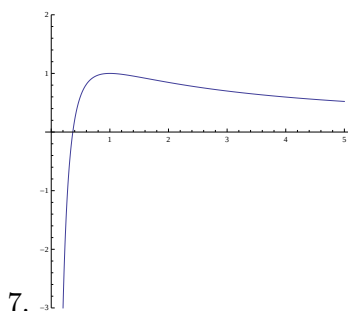
5.



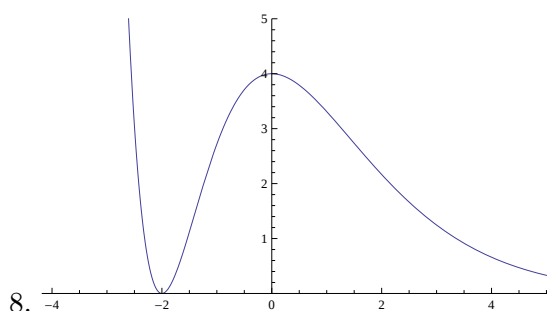
6.

7. $D_f = \mathbb{R}_+$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0+} = -\infty$, roste v $(0, 1)$, klesá v $(1, +\infty)$, konvexní v $(e^{1/2}, +\infty)$, konkávní v $(0, e^{1/2})$, asymptota v $+\infty$: $y = 0$.

8. $D_f = \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} = 0$, roste v $(-2, 0)$, klesá v $(-\infty, -2)$, $(0, +\infty)$, konkávní v $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, konvexní jinde, asymptota v $+\infty$ je $y = 0$.



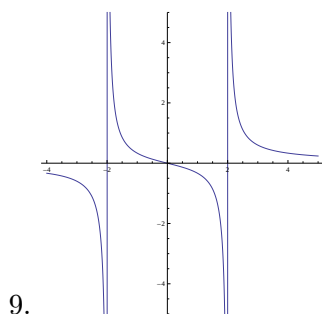
7.



8.

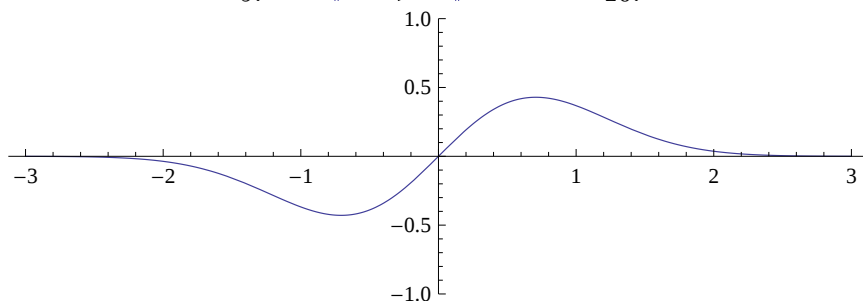
9. $D_f = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$, lichá, $\lim_{x \rightarrow \pm 2^-} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm 2^+} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} = 0$, klesá v $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$, $(2, +\infty)$, konvexní v $(-2, 0)$, $(2, +\infty)$, konkávní v $(-\infty, -2)$, $(0, 2)$, asymptota v $\pm \infty$ je $y = 0$.

10. $D_f = \mathbb{R}$, lichá, $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} = 0$, roste v $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, klesá v $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$, konkávní v $(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}})$, $(0, \sqrt{\frac{3}{2}})$, konvexní ve zbylých intervalech, asymptota v $\pm \infty$: $y = 0$.



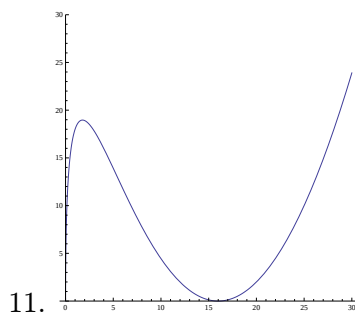
9.

10.

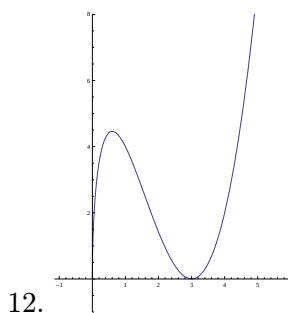


11. $D_f = \langle 0, +\infty \rangle$, kořeny: 0, 16, $\lim_{x \rightarrow +\infty} = +\infty$, roste v $(0, \frac{16}{9})$, $(16, +\infty)$, klesá v $(\frac{16}{9}, 16)$, konkávní v $(0, \frac{16}{3})$, konvexní v $(\frac{16}{3}, +\infty)$, asymptota není.

12. $D_f = \langle 0, +\infty \rangle$, kořeny: 0, 3, $\lim_{x \rightarrow +\infty} = +\infty$, roste v $(0, \frac{3}{5})$, $(3, +\infty)$, klesá v $(\frac{3}{5}, 3)$, konkávní v $(0, \frac{3+2\sqrt{6}}{5})$, konvexní v $(\frac{3+2\sqrt{6}}{5}, +\infty)$, asymptota není.



11.



12.