

**Matematika pro ekonomy**  
**Domácí úkol 21**

**Úlohy ze závěrečného testu z LS 2010/11 s řešením**

Toto jsou úlohy použité v závěrečném testu v letním semestru 2010/11. Úlohy jsou číslovány 1–5, každá je ve variantách A,B,C,D.

**1.** Vyšetřete průběh funkce  $f(x)$  tj. nalezněte definiční obor, limity a hodnoty v důležitých bodech, kořeny, lokální a globální extrémy, intervaly monotonie, případné asymptoty, obor konvexity a konkavity, inflexní body, načrtněte graf.

**A.**  $f(x) = \ln \left( \frac{x+5}{1-x} \right)$

**B.**  $f(x) = \frac{e^{2x}}{e(x-1)}$

**C.**  $f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{x^2+4}}$

**D.**  $f(x) = \frac{e^{3x}}{x-2}$

**2.** Najděte všechny stacionární body funkce  $f(x, y)$  v  $\mathbb{R}^2$ .

**A.**  $f(x, y) = x^3 - xy + y^2 - y$

**B.**  $f(x, y) = x^2 - x - xy + 2y^3$

**C.**  $f(x, y) = x^3 - x^2 - 4x + y^2 + 2xy$

**D.**  $f(x, y) = x^2 - x - xy - y^3 + y$

**3.** Určete extrémy funkce  $f(x, y)$  na množině  $M$ .

**A.**  $f(x, y) = x^2 - 8x + 3y, M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 2, -x \leq y \leq x^2\}$

**B.**  $f(x, y) = 2x - x^2 + 3y, M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; -3 \leq x \leq 6, x^2 \leq y \leq 3x + 18\}$

**C.**  $f(x, y) = y - x,$

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 6, x^3 - 5x^2 - 7x + 12 \leq y \leq 12 - x\}$$

**D.**  $f(x, y) = x^2 + 2y, M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; -2 \leq x \leq 5, x - 5 \leq y \leq 5 + 4x - x^2\}$

**4.** Určete extrémy funkce  $f(x, y)$  na množině  $M$ .

**A.**  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2, M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + xy + y^2 \leq 27\}$

**B.**  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2, M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 8\}$

**C.**  $f(x, y) = e^{x^2+y^2}, M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 4x^2 + (y-2)^2 = 9\}$

**D.**  $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 + 6y + 10,$

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; (x-2)^2 + (y+2)^2 = 4\}$$

**5.** Určete extrémy funkce  $f(x, y, z)$  na množině  $M$ .

**A.**  $f(x, y, z) = 4x - y, M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; y^2 + z^2 = 40, x^2 + z^2 = 100\}$

**B.**  $f(x, y, z) = x^2 - 2x + y^2 + z^2 + 4,$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; (x-1)^2 + y^2 = 13, 3x + 2y - z + 12 = 0\}$$

**C.**  $f(x, y, z) = x - 2y + z, M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 9, y^2 + z^2 = 5\}$

**D.**  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4z + 4,$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + (z-2)^2 = 10, 6x - y + 2z = 4\}$$

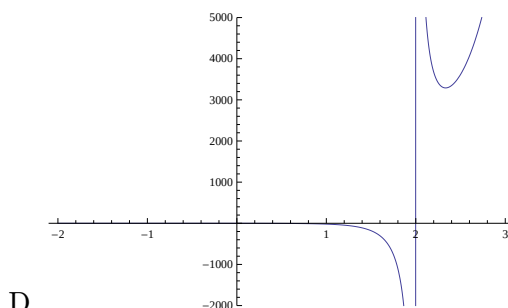
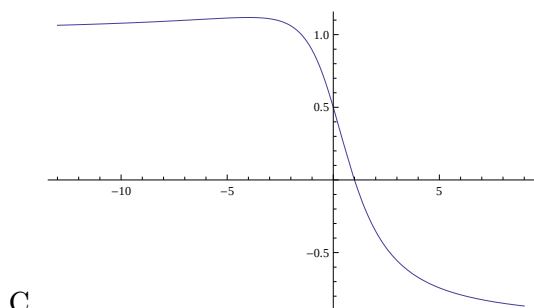
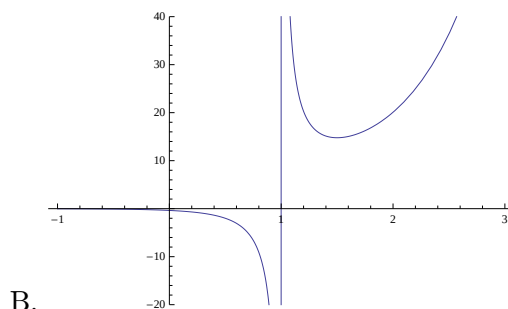
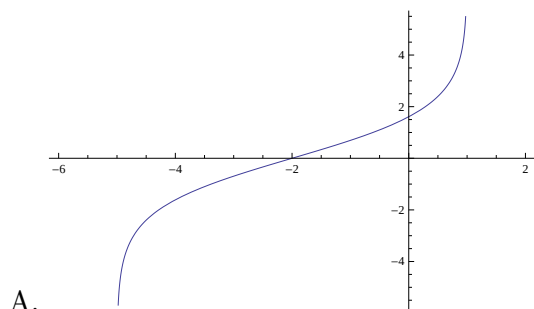
**Řešení:**

**1. A.**  $D_f = (-5, 1)$ , roste v  $D_f$ ,  $\lim_{x \rightarrow -5+} = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1-} = +\infty$ , inflexe v bodě 0, svislé asymptoty  $x = -5, x = 3$ .

**B.**  $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ , v  $(-\infty, 1)$  klesá od 0 do  $-\infty$  a je konkávní, v  $(1, \frac{3}{2})$  klesá od  $+\infty$  do  $2e^2$ , v  $(\frac{3}{2}, +\infty)$  roste od  $2e^2$  do  $+\infty$  a je konvexní v  $(1, +\infty)$ , svislá asymptota  $x = 1$ .

**C.**  $D_f = \mathbb{R}$ ,  $\max f(-4) = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = \mp 1$ , konkávní v  $(-3 - \sqrt{11}, -3 + \sqrt{11})$ , jinde konvexní, asymptoty v  $\pm\infty$ :  $y = \mp 1$ .

**D.**  $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ , v  $(-\infty, 2)$  klesá od 0 do  $-\infty$  a je konkávní, v  $(2, \frac{7}{3})$  klesá od  $+\infty$  do  $3e^7$ , v  $(\frac{7}{3}, +\infty)$  roste od  $3e^7$  do  $+\infty$  a je konvexní v  $(2, +\infty)$ , svislá asymptota  $x = 2$ .



**2.**

- A.**  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}),$   
**B.**  $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{3}{8}, -\frac{1}{4}),$   
**C.**  $(2, -2), (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}),$   
**D.**  $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}).$

**3.**

- |           | <i>min</i>                                    | <i>max</i>                                      |
|-----------|-----------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| <b>A.</b> | $f(2, -2) = -18$                              | $f(0, 0) = f(2, 4) = 0$                         |
| <b>B.</b> | $f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) = -\frac{1}{2}$ | $f(\frac{11}{2}, \frac{69}{2}) = \frac{337}{4}$ |
| <b>C.</b> | $f(4, -32) = -36$                             | $f(0, 12) = 12$                                 |
| <b>D.</b> | $f(-1, -6) = -11$                             | $f(4, 5) = 26$                                  |

4.

- |    | <i>min</i>                                            | <i>max</i>                                                           |
|----|-------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| A. | $f(0, 0) = 0$                                         | $f(\pm(3\sqrt{3}, -3\sqrt{3})) = 81$                                 |
| B. | $f(0, 0) = 0$                                         | $f(\frac{3\pm\sqrt{15}}{2}, \frac{3\mp\sqrt{15}}{2}) = \frac{27}{2}$ |
| C. | $f(\pm\frac{\sqrt{17}}{6}, -\frac{2}{3}) = e^{11/12}$ | $f(0, 5) = e^{25}$                                                   |
| D. | $f(2 - \sqrt{2}, -2 - \sqrt{2}) = 6 - 4\sqrt{2}$      | $f(2 + \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}) = 6 + 4\sqrt{2}$                     |

5.

- |    | <i>min</i>                               | <i>max</i>                              |
|----|------------------------------------------|-----------------------------------------|
| A. | $f(-10, \sqrt{40}, 0) = -40 - \sqrt{40}$ | $f(10, -\sqrt{40}, 0) = 40 + \sqrt{40}$ |
| B. | $f(-2, -2, 2) = 20$                      | $f(4, 2, 28) = 800$                     |
| C. | $f(-2, 2, -1) = -7$                      | $f(2, -2, 1) = 7$                       |
| D. | $f(1, 0, -1) = f(-1, 0, 5) = 10$         | $f(-3, -20, 1) = f(3, 20, 3) = 410$     |