

Matematika pro ekonomy / Mathematics for economists
Domácí úkol 6 / Homework 6
Derivace / Derivations

Vypočtete derivace následujících funkcí a určete obor platnosti (tedy kde je definována funkce i její derivace):

Find the derivatives of the given functions and determine the domain of validity (i.e. where both the function and its derivative are defined)

1. $x^4 + 5x^3 - 2x^2 - 6x + 3$

2. $\frac{1}{3x+2}$

3. 5^x

4. $\frac{x^2+3x-2}{x+1}$

5. $(x^2 + 1) \ln x$

6. e^{4x-2}

7. e^{x^2-x+1}

8. $\ln \sqrt{2x+3}$

9. $\sqrt{x^2-4}$

10. $\log_{10}(x^2-1)$

11. $\ln \left(\frac{4-2x}{x+2} \right)$

12. $\frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}$

Řešení: / Solution:

1. $4x^3 + 15x^2 - 4x - 6, x \in \mathbb{R}$

2. $\frac{-3}{(3x+2)^2}, x \neq -\frac{2}{3}$

3. $(\ln 5)5^x, x \in \mathbb{R}$; neboť / because $5^x = e^{(\ln 5)x}$ a tedy derivujeme jako složenou funkci / and therefore we differentiate as a composed function (chain rule)

4. $\frac{x^2+2x+5}{(x+1)^2}, x \neq -1$

5. $2x \ln x + \frac{x^2+1}{x}, x \in \mathbb{R}_+$

6. $4e^{4x-2}, x \in \mathbb{R}$

7. $(2x-1)e^{x^2-x+1}, x \in \mathbb{R}$

8. $\frac{1}{2x+3}, x > -\frac{3}{2}$; je možné derivovat jako funkci složenou ze tří funkcí $(\ln z, \sqrt{y}, 2x+3)$ nebo si uvědomit, že $\ln \sqrt{y} = \frac{1}{2} \ln y$ / it is possible to differentiate as a function composed of three functions $(\ln z, \sqrt{y}, 2x+3)$ or to use the fact that $\ln \sqrt{y} = \frac{1}{2} \ln y$.

9. $\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}, x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

10. $\frac{1}{\ln 10} \frac{2x}{x^2-1}$, $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; neboť / because $\log_{10} y = \frac{\ln y}{\ln 10}$

11. $\frac{4}{x^2-4}$, $x \in (-2, 2)$; je možné derivovat jako funkci složenou ze dvou funkcí $(\ln y, \frac{4-2x}{x+2})$ nebo si uvědomit, že $\ln\left(\frac{4-2x}{x+2}\right) = \ln(4-2x) - \ln(x+2)$ / it is possible to differentiate as a function composed of two functions $(\ln y, \frac{4-2x}{x+2})$ or to use the fact that $\ln\left(\frac{4-2x}{x+2}\right) = \ln(4-2x) - \ln(x+2)$

12. $\frac{1-2x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$, $x \in \mathbb{R}$; derivujeme jako podíl, přičemž komplikovaný zlomek, který přitom vyjde, rozšíříme výrazem $\sqrt{x^2+1}$, čímž se zbavíme odmocnin v čitateli a celý čítec se tak zjednoduší / we differentiate as a fraction, and in the resulting complicated fraction, both the top and the bottom will be multiplied by $\sqrt{x^2+1}$, which helps us to cancel the square roots and the numerator will simplify.

FOR CZECH STUDENTS ONLY – K dalšímu počítání: Na konci kapitoly 3 ze Žluté učebnice, str. 84 derivujte v úlohách 1 a 2 všechny funkce obsahující odmocniny, exponenciály, logaritmy (tedy nikoli sinus, cosinus apod.).