Matematika pro ekonomy
Domácí úkol 15

Úlohy ze závěrečného testu z LS 2010/11 s řešením

Toto jsou úlohy použité v závěrečném testu v letním semestru 2010/11. Úlohy jsou číslovány 1–5, každá je ve variantách A,B,C,D.

1. Vyšetřete průběh funkce $f(x)$ tj. nalezněte definiční obor, limity a hodnoty v důležitých bodech, kořeny, lokální a globální extrémy, intervaly monotonie, případné asymptoty, obor konvexity a konkavity, inflexní body, načrtněte graf.

A. $f(x) = \ln\left(\frac{x+5}{1-x}\right)$

B. $f(x) = \frac{e^{2x}}{e(x-1)}$

C. $f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{x^2+4}}$

D. $f(x) = \frac{e^{3x}}{x-2}$

2. Najděte všechny stacionární body funkce $f(x, y)$ v $\mathbb{R}^2$ a pro každý z nich určete, zda se jedná o lokální maximum, lokální minimum či sedlový bod.

A. $f(x, y) = x^3 - xy + y^2 - y$

B. $f(x, y) = x^2 - x - xy + 2y^3$

C. $f(x, y) = x^3 - x^2 - 4x + y^2 + 2xy$

D. $f(x, y) = x^2 - x - xy - y^3 + y$

3. Určete extrémy funkce $f(x, y)$ na množině M.

A. $f(x, y) = x^2 - 8x + 3y, M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 0 \le x \le 2, -x \le y \le x^2\}$

B. $f(x, y) = 2x - x^2 + 3y, M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; -3 \le x \le 6, x^2 \le y \le 3x + 18\}$

C. $f(x, y) = y - x,$

$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 0 \le x \le 6, x^3 - 5x^2 - 7x + 12 \le y \le 12 - x\}$

D. $f(x, y) = x^2 + 2y, M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; -2 \le x \le 5, x - 5 \le y \le 5 + 4x - x^2\}$

4. Určete extrémy funkce $f(x, y)$ na množině M.

A. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2, M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + xy + y^2 \le 27\}$

B. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2, M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \le 8\}$

C. $f(x, y) = e^{x^2+y^2}, M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 4x^2 + (y - 2)^2 = 9\}$

D. $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 + 6y + 10,$

$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4\}$

5. Určete extrémy funkce $f(x, y, z)$ na množině M.

A. $f(x, y, z) = 4x - y,\ M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; y^2 + z^2 = 40,\ x^2 + z^2 = 100\}$

B. $f(x,y,z) = x^2 - 2x + y^2 + z^2 + 4$,

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; (x-1)^2 + y^2 = 13,\ 3x + 2y - z + 12 = 0\}$$

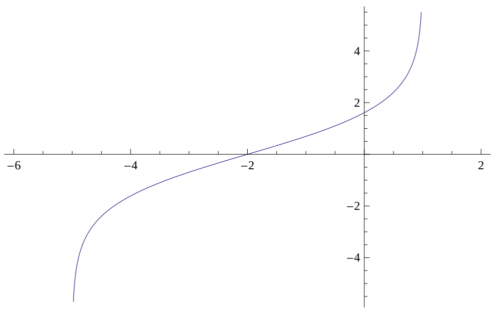
C. $f(x,y,z) = x - 2y + z$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ y^2 + z^2 = 5\}$

D. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4z + 4$,

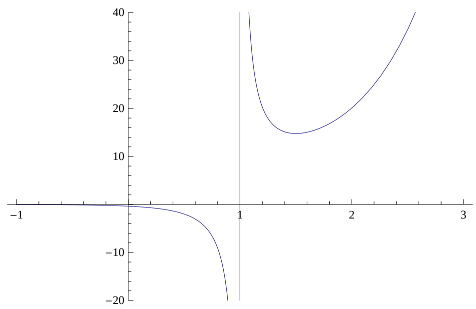
$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + (z-2)^2 = 10,\ 6x - y + 2z = 4\}$$

Řešení:

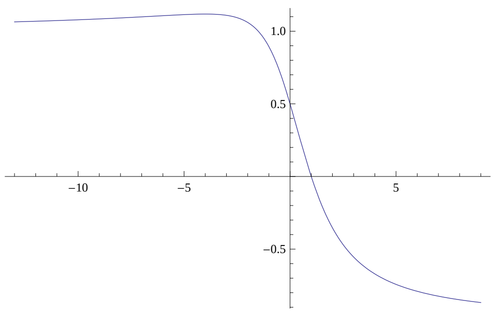
1. **A.** $D_f = (-5,1)$, roste v D_f, $\lim\limits_{x\to -5+} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1-} = +\infty$, inflexe v bodě 0, svislé asymptoty $x=-5, x=3$.
B. $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$, v $(-\infty,1)$ klesá od 0 do $-\infty$ a je konkávní, v $(1,\frac{3}{2})$ klesá od $+\infty$ do $2e^2$, v $(\frac{3}{2},+\infty)$ roste od $2e^2$ do $+\infty$ a je konvexní v $(1,+\infty)$, svislá asymptota $x=1$.
C. $D_f = \mathbb{R}$, max $f(-4) = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} = \mp 1$, konkávní v $(-3-\sqrt{11}, -3+\sqrt{11})$, jinde konvexní, asymptoty v $\pm\infty$: $y = \mp 1$.
D. $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$, v $(-\infty,2)$ klesá od 0 do $-\infty$ a je konkávní, v $(2,\frac{7}{3})$ klesá od $+\infty$ do $3e^7$, v $(\frac{7}{3},+\infty)$ roste od $3e^7$ do $+\infty$ a je konvexní v $(2,+\infty)$, svislá asymptota $x=2$.



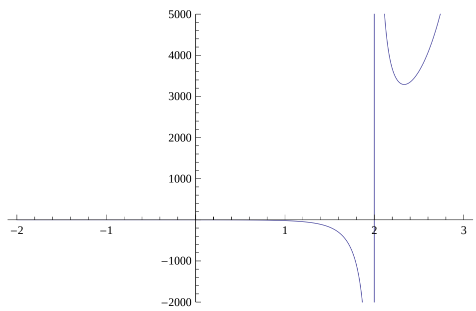
A.



B.



C.



D.

2.

A.	$(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$ *lok. min.*, $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ *sedlo*,
B.	$(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$ *lok. min.*, $(\frac{3}{8},-\frac{1}{4})$ *sedlo*,
C.	$(2,-2)$ *lok. min.*, $(-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ *sedlo*,
D.	$(\frac{1}{4},-\frac{1}{2})$ *lok. min.*, $(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$ *sedlo*.

3.

	min	*max*
A.	$f(2,-2) = -18$	$f(0,0) = f(2,4) = 0$
B.	$f(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}) = -\frac{1}{2}$	$f(\frac{11}{2},\frac{69}{2}) = \frac{337}{4}$
C.	$f(4,-32) = -36$	$f(0,12) = 12$
D.	$f(-1,-6) = -11$	$f(4,5) = 26$

4.

	min	*max*
A.	$f(0,0)=0$	$f(\pm(3\sqrt{3},-3\sqrt{3}))=81$
B.	$f(0,0)=0$	$f(\frac{3\pm\sqrt{15}}{2},\frac{3\mp\sqrt{15}}{2})=\frac{27}{2}$
C.	$f(\pm\frac{\sqrt{17}}{6},-\frac{2}{3})=e^{11/12}$	$f(0,5)=e^{25}$
D.	$f(2-\sqrt{2},-2-\sqrt{2})=6-4\sqrt{2}$	$f(2+\sqrt{2},-2+\sqrt{2})=6+4\sqrt{2}$

5.

	min	*max*
A.	$f(-10,\sqrt{40},0)=-40-\sqrt{40}$	$f(10,-\sqrt{40},0)=40+\sqrt{40}$
B.	$f(-2,-2,2)=20$	$f(4,2,28)=800$
C.	$f(-2,2,-1)=-7$	$f(2,-2,1)=7$
D.	$f(1,0,-1)=f(-1,0,5)=10$	$f(-3,-20,1)=f(3,20,3)=410$