

Matematika pro ekonomy / Mathematics for economists
Domácí úkol 11 / Homework 11

Parciální derivace funkcí více proměnných
Partial derivatives of functions of several variables

Spočtete parciální derivace zadané funkce podle všech proměnných v příslušných definičních oborech / Compute partial derivatives of the given functions with respect to all variables in appropriate domains of definition:

1. $f(x, y) = x^3y^2 + xy^3$
2. $f(x, y) = e^{xy^2}$
3. $f(x, y, z) = \ln(xz) + \frac{y}{z} - xy$

Volné lokální extrémy funkcí dvou proměnných
Free local extremes of functions of two variables

Určete stacionární body zadané funkce (pro $x, y \in \mathbb{R}$) a určete jejich typ, tj. lokální maximum, minimum či sedlo. / Find all stationary points of the given function (for $x, y \in \mathbb{R}$) and their types, i.e. local maximum, minimum or a saddle point.

4. $f(x, y) = y^4 + 32x^2 - 32xy$
5. $f(x, y) = x - y^2 - e^{x-2y}$
6. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 15$

Extrémy funkcí více proměnných na množinách s rovnou hranicí
Extremes of functions of several variables on sets with a straight border

Vyšetřete extrémy dané funkce na dané množině M . (Pozn.: označení např. $\langle 0, 1 \rangle \times \langle -1, 2 \rangle$ znamená obdélník $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in \langle 0, 1 \rangle, y \in \langle -1, 2 \rangle\}$, dále např. čtverec $\langle -1, 1 \rangle^2 = \langle -1, 1 \rangle \times \langle -1, 1 \rangle$ apod.)

Determine extremes of the given function on the given set M . (Remark: notation like $\langle 0, 1 \rangle \times \langle -1, 2 \rangle$ means a rectangle $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in \langle 0, 1 \rangle, y \in \langle -1, 2 \rangle\}$, moreover a square can be denoted like $\langle -1, 1 \rangle^2 = \langle -1, 1 \rangle \times \langle -1, 1 \rangle$ etc.)

- | $f(x, y)$ | M |
|-------------------------------------|---|
| 7. $x - y - x^2y^3$ | $\langle 0, 1 \rangle \times \langle -1, 2 \rangle$ |
| 8. $xy^2 - 2xy - 3x^2 + x - y$ | $\langle 0, 2 \rangle \times \langle 0, 3 \rangle$ |
| 9. $x^2 - y^2 + \ln(1 + x^2 + y^2)$ | $\langle -1, 1 \rangle^2$ |
| 10. $x^3 - y^3 - 2x + 3y$ | trojúhelník / triangle $(0, 0), (1, 0), (0, 2)$ |
| 11. $xy(x - y - 2)$ | trojúhelník / triangle $(-1, 1), (0, -2), (2, 0)$ |

Řešení / Solution:

1. $\partial_x f(x, y) = 3x^2 y^2 + y^3$
 $\partial_y f(x, y) = 2x^3 y + 3xy^2$
2. $\partial_x f(x, y) = y^2 e^{xy^2}$
 $\partial_y f(x, y) = 2xy e^{xy^2}$
3. $\partial_x f(x, y, z) = \frac{1}{z} - y$
 $\partial_y f(x, y, z) = \frac{1}{z} - x$
 $\partial_z f(x, y, z) = \frac{1}{z} + \frac{-y}{z^2}$ (vše pro / all for $xz > 0$)
4. *sedlo / saddle* $[0,0]$, *loc. min.* $[1,2], [-1,-2]$,
5. *loc. max.* $[2,1]$,
6. *sedlo / saddle* $[0,0]$, *loc. min.* $[3,3]$,

- | | <i>min</i> | <i>max</i> |
|-----|--|--------------------------------------|
| 7. | $f(1, 2) = -9$ | $f(1, -1) = 3$ |
| 8. | $f(2, \frac{5}{4}) = -\frac{105}{8}$ | $f(\frac{1}{6}, 0) = \frac{1}{12}$ |
| 9. | $f(0, \pm 1) = \ln 2 - 1 = -0,307...$ | $f(\pm 1, 0) = \ln 2 + 1 = 1,693...$ |
| 10. | $f(0, 2) = -2$ | $f(0, 1) = 2$ |
| 11. | $f(\frac{2}{3}, \frac{4}{9}) = f(-\frac{4}{9}, -\frac{2}{3}) = -\frac{128}{243}$ | $f(-1, 1) = 4$ |

FOR CZECH STUDENTS ONLY – K dalšímu počítání: Na konci kapitoly 4 ze Žluté učebnice, str. 113, úloha 2, abdeghjl: spočtete všechny parciálních derivace zadaných funkcí. Spočtete úlohy 6–8 na str. 114.