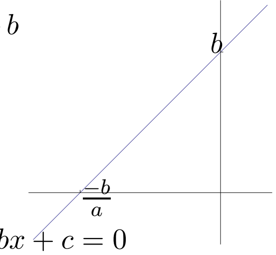
**Lineární funkce** $f : y = ax + b$

- průsečíky s osou $x$: $\frac{-b}{a}$
- průsečíky s osou $y$: $b$




**Kvadratická rovnice** $ax^2 + bx + c = 0$

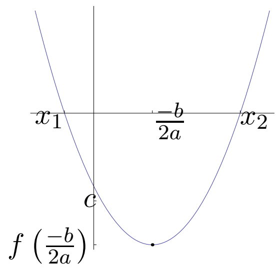
- diskriminant $D = b^2 - 4ac$
- kořeny $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

**Substituce**

- $ax^4 + bx^2 + c = 0 \xrightarrow{y=x^2} ay^2 + by + c = 0$
- $ax + b\sqrt{x} + c = 0 \xrightarrow{y=\sqrt{x}} ay^2 + by + c = 0$

**Parabola** $f : y = ax^2 + bx + c$
$= a(x - x_1)(x - x_2)$

- průsečíky s osou $x$: kořeny $x_1, x_2$
- průsečíky s osou $y$: $c$
- vrchol paraboly: $[\frac{-b}{2a}, f(\frac{-b}{2a})]$




**Součinové a podílové nerovnice**

Řešte $\frac{(2x-4)(-x-3)}{(-3)(x-1)} \geq 0$

- najdu nulové body: $2, -3, 1$
- tabulkou

| | $(-\infty, -3\rangle$ | $\langle -3, 1)$ | $(1, 2\rangle$ | $\langle 2, \infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $(2x-4)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $(-x-3)$ | $+$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $(-3)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $(x-1)$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| celkem | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |

- $x \in \langle -3, 1) \cup \langle 2, \infty)$

**Elementární úpravy**

- prohodit dva řádky
- přičíst k řádku násobek jiného
- vynásobit řádek konstantou
- odstranit nulový řádek

**Odstupňovaný tvar**

- v dalším řádku vždy **aspoň** o jednu nulu víc, např.

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 0 & f & g & h & i \\ 0 & 0 & 0 & j & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Soustavy rovnic - obecný postup řešení**, PS = pravá strana

1. převedeme matici s PS do odstupňovaného tvaru
2. určíme pivotové sloupce
3. najdeme partikulární řešení ($u_0$)
   (a) za nepivotní neznámé zvolíme 0
   (b) ostatní neznámé dopočítáme
4. **zahodíme PS**
5. určíme hodnost $h$ = počet nenulových řádků (v odstupňovaném tvaru)
6. určíme počet stupňů volnosti $k$ = počet sloupců - $h$
7. najdeme homogenní řešení $(u_1, u_2, \ldots u_k)$
   (a) připravíme si $k$ vektorů
   (b) za nepivotní neznámé zvolíme vždy jednu 1, zbytek 0
   (c) ostatní neznámé dopočítáme (bez PS)
8. všechna řešení jsou tvaru $u_0 + u_1 \cdot t_1 + u_2 \cdot t_2 + \cdots + u_k \cdot t_k$

Pivot (první nenulový na řádku)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 5 & 2 & 3 & 7 & -2 \\ 0 & \boxed{2} & 4 & 3 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{4} & -12 & 8 \end{array}\right)$$

$u_0 = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ & 0 & \_\_ & 0 \end{pmatrix}$

$u_0 = \begin{pmatrix} \underline{7} & \underline{-2} & 0 & \underline{2} & 0 \end{pmatrix}$

$h = 2$

$k = 5 - 3 = 2$

$u_1 = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ & 1 & \_\_ & 0 \end{pmatrix}$

$u_2 = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ & 0 & \_\_ & 1 \end{pmatrix}$

$u_1 = \begin{pmatrix} \underline{8} & \underline{-2} & 1 & \underline{0} & 0 \end{pmatrix}$

$u_2 = \begin{pmatrix} \underline{-11} & \underline{-1} & 0 & \underline{3} & 1 \end{pmatrix}$

$(7 + 8t_1 - 11t_2,\ -2 - 2t_1 - t_2,\ t_1,\ 2 + 3t_2,\ t_2)$

**Soustavy rovnic s parametrem** Zkoušíme prohodit řádky tak, aby parametr zbyl v posledním řádku
Rozlišíme případy (podmínky pro parametr $a$), pro každou variantu dopočítáme soustavu zvlášť

- LS $= 0$, PS $\neq 0 \Rightarrow$ nemá řešení
- LS $= 0$, PS $= 0 \Rightarrow$ poslední řádek zmizí
- LS $\neq 0$ poslední řádek nezmizí

**Determinant** matice $A$, $\det A$, $|A|$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{array}$$

**Limita funkce** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$

Funkce $f(x)$ má v bodě $x_0$ limitu $a$, pokud se $y = f(x)$ blíží libovolně blízko k $a$, pro $x$ blížící se k $x_0$.

- $x_0 \in D_f$ pak $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
- pro krajní body definičního oboru počítáme jednostranné limity

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} e^x = \infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} 2^x = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} 13^x = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \log_{10} x = -\infty \qquad \lim_{x\to\infty} \log_5 x = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \infty \qquad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} \log_{\frac{1}{5}} x = \infty \qquad \lim_{x\to\infty} \log_{0,3} x = -\infty$$

**Jednostranné limity**

| zápis | čteme | platí | příklad |
|---|---|---|---|
| $x \to x_0^+$ | $x$ jde k $x_0$ zprava | $x > x_0$ | $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$ |
| $x \to x_0^-$ | $x$ jde k $x_0$ zleva | $x < x_0$ | $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ |

**Typové příklad:** vytknout nejvyšší mocninu ($n^3$ v čitateli, $n^2$ ve jmenovateli)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - 2n + 1}{4n^2 - 3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(1 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(4 + \frac{3}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)}{4 + \frac{3}{n}} = \frac{\infty \cdot (1 - 0 + 0)}{4 + 0} = \infty$$

**Srovnání logaritmu, polynomu a exponenciály**

exponenciála ($e^x$, $2^x$, atd.) $\gg$ polynom ($x$, $x^2$, atd.) $\gg$ logaritmus ($\ln x$, $\log_2 x$, atd.)

limita součinu (podílu) má hodnotu podle silnějšího

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x+3}} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln^2(2x-3)}{\sqrt{x}} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} x^2 e^{x+3} = 0, \quad \lim_{x\to 2^+} (x-2)\ln(3x-6) = 0$$

*Exponenciála a logaritmus se základem menším než 1*

- $\left(\frac{1}{2}\right)^x = -(2^x)$
- $\log_{\frac{1}{2}} x = -\log_2 x$

**Dělení nulou**

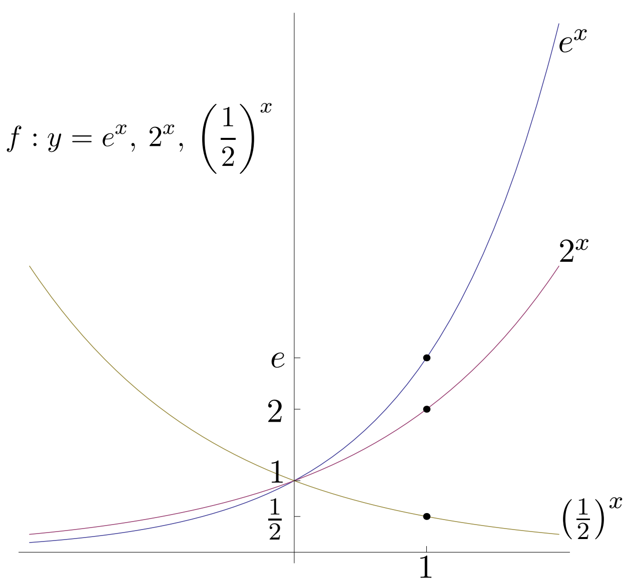
$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{1}{0^+} = \infty \\ \frac{1}{0^-} = -\infty \end{array}}$$

**Není definováno**

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty} \qquad \frac{\text{cokoli}}{0} \qquad \pm\infty \cdot 0 \qquad \infty - \infty$$

**Definiční obory**

| $f(x)$ | definiční obor |
|---|---|
| $c$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| $x^n$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| $\lvert x\rvert$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| $\frac{p(x)}{q(x)}$ | $x \in \mathbb{R} \setminus \{q(x) = 0\}$ |
| $\sqrt[k]{x}$, $k$ sudé | $x \in \langle 0, \infty)$ |
| $\sqrt[k]{x}$, $k$ liché | $x \in \mathbb{R}$ |
| $e^x$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| $a^x$, $a \neq 1$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| $\ln x$ | $x \in (0, \infty)$ |
| $\log_a x$ | $x \in (0, \infty)$ |




Důležité rovnosti $a \neq 1$

$$\boxed{\log_a x = b \leftrightarrow a^b = x}$$

$$e \doteq 2,7182$$

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$e^0 = 1 \qquad a^0 = 1$$

$$\ln 1 = 0 \qquad \log_a 1 = 0$$

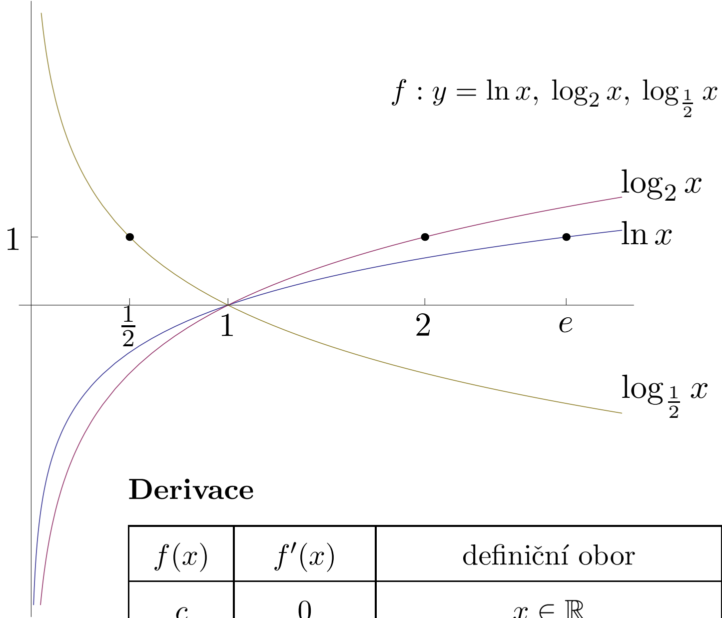
$$\ln e = 1 \qquad \log_a a = 1$$

$$a^x = e^{x \ln a}$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

**Příklad** Určete definiční obor

- $\sqrt{\frac{x+3}{x-2}} \Rightarrow$ řeším nerovnici $\frac{x+3}{x-2} \geq 0$, navíc $x \neq 2$
- $\log_{10}\left(\frac{x+3}{x-2}\right) \Rightarrow$ řeším nerovnici $\frac{x+3}{x-2} > 0$, navíc $x \neq 2$




**L'Hospitalovo pravidlo**

Pro limity typu $\dfrac{0}{0}$ a $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ platí (pokud je pravá strana definovaná):

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**Derivace**

| $f(x)$ | $f'(x)$ | definiční obor | příklad |
|---|---|---|---|
| $c$ | $0$ | $x \in \mathbb{R}$ | $(3)' = 0$ |
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ | $n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$ | $(x^3)' = 3x^2$ |
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ | $n \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in \mathbb{R}^+$ | $(x^{2/3})' = \frac{2}{3}x^{-1/3}$ |
| $\sqrt[n]{x}$ | $\frac{1}{n}\sqrt[n]{x^{1-n}}$ | $x \in \mathbb{R}^+$ | $(\sqrt[4]{x})' = \frac{1}{4}\sqrt[4]{x^{-3}}$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $x \in \mathbb{R}$ | $(e^x)' = e^x$ |
| $a^x$ | $a^x \ln a$ | $a > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$ | $(2^x)' = 2^x \ln 2$ |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ | $x \in \mathbb{R}^+$ | $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ |
| $\log_a x$ | $\frac{1}{x \ln a}$ | $a > 0$ & $a \neq 1 \Rightarrow x \in \mathbb{R}^+$ | $(\log_{10} x)' = \frac{1}{x \ln 10}$ |

$$(cf)' = cf'$$
$$(3x^2)' = 6x$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$
$$(x^2 + \ln x)' = 2x + \frac{1}{x}$$

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$
$$(x \cdot e^x)' = 1 \cdot e^x + xe^x$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$
$$\left(\frac{x^2+1}{3x}\right)' = \frac{2x \cdot 3x - (x^2+1) \cdot 3}{(3x)^2}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$
$$(e^{x^2+3})' = e^{x^2+3} \cdot 2x$$

**Průběh funkce**

1. definiční obor
2. sudost, lichost

   **sudá funkce** $f(-x) = f(x)$,
   graf souměrný podle osy $y$

   **lichá funkce** $f(-x) = -f(x)$,
   graf souměrný podle bodu 0
3. průsečíky s osami

   **s osou x** dosadit $y = 0$

   **s osou y** dosadit $x = 0$
4. limity v krajních bodech definičního oboru
5. derivace $f'(x)$
6. výjimečné (podezřelé) body
   - stacionární body $f'(x) = 0$
   - body, kde $f'(x)$ neexistuje
   - krajní body $D_f$
7. intervaly monotonie

   **buď** porovnáním hodnot v podezřelých bodech

   **nebo** pomocí znaménka $f'(x)$

| | |
|---|---|
| $f'(x) > 0$ | $f(x)$ rostoucí |
| $f'(x) \geq 0$ | $f(x)$ neklesající |
| $f'(x) < 0$ | $f(x)$ klesající |
| $f'(x) \leq 0$ | $f(x)$ nerostoucí |

8. extrémy - lokální i globální
9. asymptoty
   - $y = ax + b : a = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

     $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - ax$
   - $x = a : \lim\limits_{x\to a\pm} f(x) = \pm\infty$
10. konvexita, konkavita

| | |
|---|---|
| $f''(x) > 0$ | $f(x)$ konVexní |
| $f''(x) < 0$ | $f(x)$ konkÁvní |

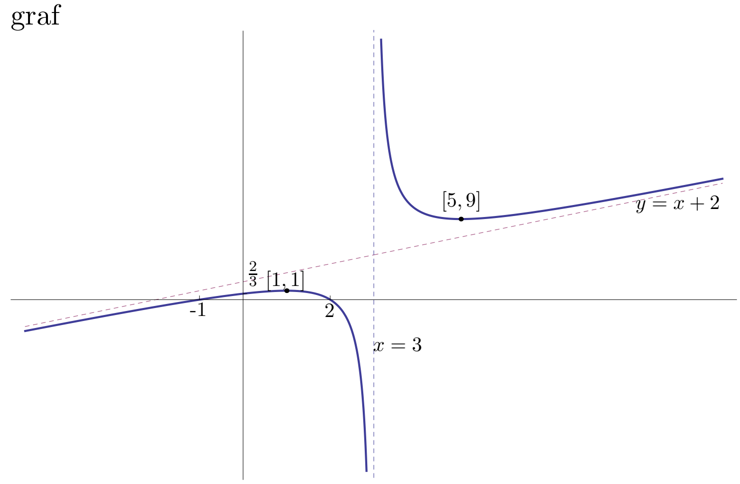
    **inflexní bod** $x$: mění se konvexita na konkavitu, $\Rightarrow f''(x) = 0$
11. graf

**Průběh funkce $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-3}$**

1. definiční obor : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
2. sudost, lichost $f(-x) = \frac{(-x)^2+x-2}{-x-3}$
   $f(-x) \neq f(x),\ f(-x) \neq -f(x)$, ani sudá ani lichá
3. průsečíky s osami
   **s osou x:** $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -1$
   **s osou y:** $x = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$
4. limity v krajních bodech definičního oboru
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to3^+} f(x) = \frac{4}{0^+} = \infty$$
   $$\lim_{x\to3^-} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$
5. derivace $f'(x) = \frac{(2x-1)(x-3)-(x^2-x-2)\cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{(x-5)(x-1)}{(x-3)^2}$
6. výjimečné (podezřelé) body
   - stacionární body $(x-5)(x-1) = 0$
     $\Rightarrow x_1 = 5,\ x_2 = 1$
   - body, kde $f'(x)$ neexistuje - nemá
   - krajní body $D_f$: $-\infty, 3^-, 3^+, \infty$
7. intervaly monotonie - první způsob

| $x$ | $-\infty$ | 1 | $3^-$ | $3^+$ | 5 | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ nebo $\lim f(x)$ | $-\infty$ | 1 | $-\infty$ | $\infty$ | 9 | $\infty$ |
| monotonie | $\nearrow$ | | $\searrow$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

   intervaly monotonie - druhý způsob
   $f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 1), x \in (5, \infty)$
   $f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (1, 3), x \in (3, 5)$
   **Závěr**: $f(x)$ roste na intervalech $(-\infty, 1)$ a $(5, \infty)$,
   $f(x)$ klesá na intervalech $(1, 3)$ a $(3, 5)$
8. extrémy - lokální i globální
   $f(x)$ má lokální maximum v bodě $[1, 1]$,
   $f(x)$ má lokální minimum v bodě $[5, 9]$,
   globální extrémy nemá
10. asymptoty
    - $a = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-x-2}{x^2-3x} = 1$,
      $b = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-2}{x-3} = 2$,
      $f(x)$ má v $+\infty$ asymptotu $y = x + 2$
    - $a = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-x-2}{x^2-3x} = 1$,
      $b = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-2}{x-3} = 2$,
      $f(x)$ má v $-\infty$ asymptotu $y = x + 2$
    - $x = a$ : $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = -\infty$:
      $f(x)$ má asymptotu $x = 3$
11. konvexita, konkavita
    $f''(x) = \frac{(2x-6)(x-3)^2-(x^2-6x+5)\cdot2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{8}{(x-3)^3}$
    $f''(x) > 0 \Rightarrow x \in (3, \infty) \Rightarrow$
    $f(x)$ je konvexní v intervalu $(3, \infty)$
    $f''(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 3) \Rightarrow$
    $f(x)$ je konkávní v intervalu $(-\infty, 3)$
12. graf




**Extrémy funkcí více proměnných: volné extrémy**

stacionární bod - Jacobiho matice $J_f = (\partial_x f, \partial_y f) = (0, 0)$

Hessova matice - $H_f = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f & \partial_{xy} f \\ \partial_{yx} f & \partial_{yy} f \end{pmatrix}$

Hessián - $|H_f| = \partial_{xx} f \cdot \partial_{yy} f - \partial_{xy} f \cdot \partial_{yx} f$

druhy stacionárních bodů

| | | |
|---|---|---|
| $H_f < 0$ | | sedlo |
| $H_f > 0$ | $\partial_{xx} > 0$ | lokální minimum |
| $H_f > 0$ | $\partial_{xx} < 0$ | lokální maximum |

**Příklad** Najděte stacionární body funkce $f(x, y) = x^3 + 4xy - 2y^2 + 2x - y$ a určete jejich druh.

- Vyřešíme soustavu
  $$\partial_x f = 3x^2 + 4y + 2 = 0 \qquad \partial_y f = 4x - 4y - 1 = 0$$
  Z druhé rovnice vyjádříme $y = \frac{4x-1}{4}$ a to dosadíme do první $3x^2 + (4x - 1) + 2 = 0$.
  Dostáváme buď $x_1 = -1$ a nebo $x_2 = -\frac{1}{3}$.

- Pro $x_1 = -1$ máme $y_1 = \dfrac{4\cdot(-1)-1}{4} = -\dfrac{5}{4}$. Pro $x_2 = -\frac{1}{3}$ máme $y_2 = \dfrac{4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-1}{4} = -\dfrac{7}{12}$.
- Vypočteme druhé derivace: $\partial_{xx} f = 6x,\ \partial_{xy} f = 4,\ \partial_{yy} f = -4$ a Hesián $|H_f| = 6x\cdot(-4) - 4^2 = -24x - 16$.
- V bodě $[-1, -\frac{5}{4}]$ nabývá Hesián hodnotu $|H_f| = -24\cdot(-1) - 16 = 8 > 0$, v bodě je lokální extrém, protože $\partial_{xx} f = 6\cdot(-1) < 0$, je v bodě lokální maximum.

  V bodě $[-\frac{1}{3}, -\frac{7}{12}]$ nabývá Hesián hodnotu $|H_f| = -24\cdot(-\frac{1}{3}) - 16 = -8 < 0$, v bodě je sedlo.

**Vázané extrémy funkcí více proměnných na kompaktní množině (uzavřená, omezená)**

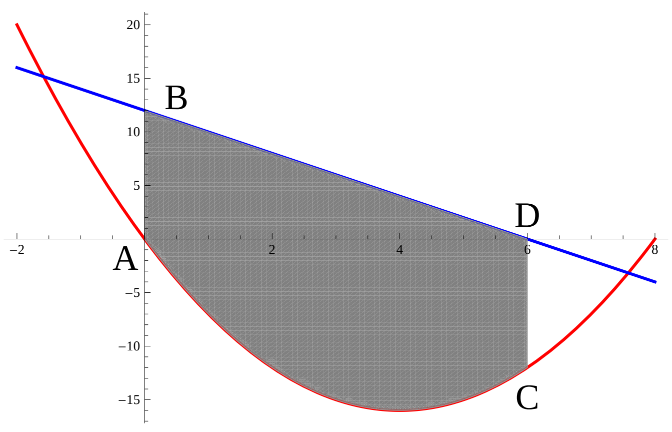
- Nejdříve určíme volné extrémy a zkontrolujeme, jestli leží uvnitř oblasti.
- Pak určíme vázané extrémy (na hranici) a to jednou z metod:
  - Dosazovací metoda
    1. vyjádříme hranici $y = h(x)$ nebo $x = h(y)$
    2. dosadíme do $f(x,y)$, získáme $g(x)$ resp. $g(y)$
    3. vypočteme $g'$ a položíme jí rovnou nule
    4. kandidáti na extrém - dopočítáme druhou souřadnici

| prom. | 1 vazba | 2 vazby | více |
|---|---|---|---|
| 2 | dosazovací ($y = h(x)$) Jakobián Lagrange | Lagrange | Lagrange |
| 3 | Lagrange | Jakobián Lagrange | Lagrange |

  - Metoda Jakobiánu
    1. funkce $f(x,y)$, vazba $g(x,y) = 0$,

       resp. $f(x,y,z)$, vazba $g_1(x,y,z) = 0, g_2(x,y,z) = 0$
    2. Jacobiho matice $J(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x f & \partial_y f \\ \partial_x g & \partial_y g \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \partial_x f & \partial_y f & \partial_z f \\ \partial_x g_1 & \partial_y g_1 & \partial_z g_1 \\ \partial_x g_2 & \partial_y g_2 & \partial_z g_2 \end{pmatrix}$, Jakobián $|J(x,y)|$, resp. $|J(x,y,z)|$
    3. kandidáti na extrém – řešení soustavy rovnic: $\begin{array}{l} |J(x,y)| = 0, \text{ resp.} \\ g(x,y) = 0 \end{array}$ $\begin{array}{l} |J(x,y,z)| = 0 \\ g_1(x,y,z) = 0 \\ g_2(x,y,z) = 0 \end{array}$
  - Metoda Lagrangeových multiplikátorů
    1. funkce $f(x_1,\dots,x_i)$, vazby $g_1(x_1,\dots,x_i) = 0, \dots, g_k(x_1,\dots,x_i) = 0$,
       $i$ je počet proměnných, $k$ je počet vazeb
    2. $L(x,y) = f + \lambda_1\, g_1 + \dots + \lambda_k\, g_k$
    3. kandidáti na extrém = řešení soustavy $(i+k)$ rovnic : $\begin{array}{ll} \partial_{x_1} L = 0, & g_1 = 0, \\ \vdots & \vdots \\ \partial_{x_i} L = 0, & g_k = 0. \end{array}$
- Dopočítáme hodnotu $f(x,y)$ v kandidátech na extrém.
- Vypočítáme hodnoty v průsečících různých hranic (např. dvou přímek, přímky a křivky atd.).
- Porovnáme hodnoty ve volných extrémech, v extrémech na hranicích a v průsečících hranic, vybereme maximum a minimum.

**Příklad** Najděte extrémy funkce $f(x,y) = 2x - y + 12$ na množině $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 6, x^2 - 8x \le y \le 12 - 2x\}$.




- volné extrémy $\partial_x f = 2 \neq 0$, nemá
- extrémy na hranici

  $AB$: $x = 0$

  $g(y) = -y + 12 \Rightarrow g'(y) = -1 \neq 0$

  na přímce nejsou extrémy

  $CD$: $x = 6$

  $g(y) = 24 - y \Rightarrow g'(y) = -1 \neq 0$

  na přímce nejsou extrémy

  $BD$ : $y = 12 - 2x$

  $g(x) = 2x - (12 - 2x) + 12 = 4x \Rightarrow g'(x) = 4 \neq 0$

  na přímce nejsou extrémy

$AC: \ y = x^2 - 8x$

$g(x) = 2x - (x^2 - 8x) + 12 = -x^2 + 10x + 12 \Rightarrow g'(x) = 2x + 10 = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow y = 25 - 40 = -15$

$[5, -15] \in M, \ f(5, -15) = 37$

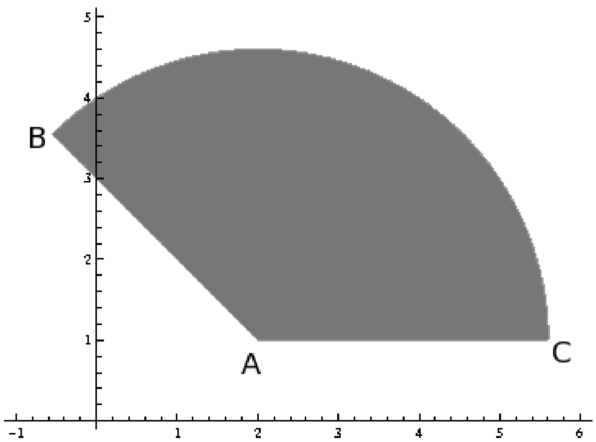
- hodnoty ve vrcholech

  $A: \ f(0,0) = 12$ $\quad B: \ f(0,12) = 0$ $\quad C: \ f(6,0) = 24$ $\quad D: \ f(6,-12) = 36$

Globální maximum v bodě $[5, -15]$, $f(5, -15) = 37$. Globální minimum v bodě $[0, 12]$, $f(0, 12) = 0$

**Příklad** Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = y^2 - 2y + 4x$ na množině

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 13, \ x \geq -y + 3, \ y \geq 1\}.$$




- Volné extrémy funkce nemá, protože $\partial_x f = 4 \neq 0$.
- Hranice sestává ze dvou přímek a jedné části kružnice, extrémy na každé hranici určíme zvlášť.
  - $x = -y + 3$, použijeme dosazovací metodu
    1. $g(y) = f(-y + 3, y) = y^2 - 2y - 4y + 12 = y^2 - 6y + 12$
    2. $g'(y) = 2y - 6 = 0 \Rightarrow y = 3$
    3. $x = -3 + 3 = 0$
       $f(0, 3) = 3^2 - 2 \cdot 3 + 4 \cdot 0 = 3$
  - $y = 1$, použijeme dosazovací metodu
    1. $g(x) = f(x, 1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 4x = 4x - 1$
    2. $g'(y) = 4 \neq 0 \Rightarrow$ na této úsečce není extrém
  - $g(x, y) = (x-2)^2 + (y-1)^2 - 13 = 0$, použimjeme metodu Jakobiánu nebo Lagrangeových multiplikátorů (můžeme si vybrat)
    * metoda Jakobiánu
      2. $\partial_x f = 4$, $\partial_y f = 2y - 2$, $\partial_x g = 2 \cdot (x - 2) = 2x - 4$, $\partial_y g = 2(y - 1) = 2y - 2$
         $|J(x, y)| = 4 \cdot (2y - 2) - (2y - 2)(2x - 4) = (2y - 2)(4 - 2x + 4) = (2y - 2)(-2x + 8)$
      3. Řešíme soustavu rovnic
         $$(2y - 2)(-2x + 8) = 0$$
         $$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 - 13 = 0$$
         Z první rovnice máme buď $y = 1$ nebo $x = 4$.
         $y = 1$ dosadím do druhé rovnice $(x - 2)^2 + (1 - 1)^2 - 13 = 0$, tj. $(x - 2)^2 = 13$, $x = 2 \pm \sqrt{13}$.
         $x = 4$ dosadím do druhé rovnice $(4 - 2)^2 + (y - 1)^2 - 13 = 0$, tj. $(y - 1)^2 = 9$, $y = 1 \pm 3$.
      4. · bod $[2 + \sqrt{13}, 1]$ je bod $C$. · $f(4, 4) = 4^2 + 4 \cdot 4 - 2 \cdot 4 = 24$
         · bod $[2 - \sqrt{13}, 1]$ neleží v $M$. · bod $[4, -2]$ neleží v $M$.
    * metoda Lagrangeových multiplikátorů
      2. $L(x, y) = y^2 - 2y + 4x + \lambda((x - 2)^2 + (y - 1)^2 - 13)$
      3. řešíme soustavu rovnic
         $$\begin{aligned} \partial_x L &= 4 + 2\lambda(x - 2) = 0 \\ \partial_y L &= 2y - 2 + 2\lambda(y - 1) = 0 \\ g(x, y) &= (x - 2)^2 + (y - 1)^2 - 13 = 0 \end{aligned}$$
         Z první rovnice dostáváme, že $x = 2 - \frac{2}{\lambda}$, protože $\lambda \neq 0$ (první rovnice by neplatila).
         Z druhé rovnice dostáváme, že buď $y = 1$ a nebo $\lambda = -1$.
         Pro $y = 1$ z třetí rovnice dostáváme, že $x = 2 \pm \sqrt{13}$, ale $2 - \sqrt{13} \notin M$
         Pro $\lambda = -1$ pak $x = 4$ a z třetí rovnice dopočteme, že $y = 4$
      4. · $f(2 + \sqrt{13}, 1) \doteq 21,42$ · $f(4, 4) = 4^2 + 4 \cdot 4 - 2 \cdot 4 = 24$

- bod A: $f(2, 1) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 4$

  bod B: musí splňovat $((-y + 3) - 2)^2 + (y - 1)^2 - 13 = 0$, tj. $2(y - 1)^2 = 13$, tj. $y = 1 + \sqrt{\frac{13}{2}}$, tedy $x = 2 - \sqrt{\frac{13}{2}}$, $f(B) \doteq 3,3$

  bod C: $f(2 + \sqrt{13}, 1) \doteq 21,42$

- globální maximum 24 se nabývá v bodě $[4, 4]$, globální minimum 3 se nabývá v bodě $[0, 3]$