

**Matematika pro ekonomy**  
**Domácí úkol 12 (16.4.2012)**

**Funkce více proměnných – hledání extrémů na složitějších množinách**

Vyšetřete extrémy dané funkce na dané množině  $M \subset \mathbb{R}^2$ .

|     | $f(x, y)$                        | $M$                                                                       |
|-----|----------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| 1.  | $6x - 3y$                        | plocha zadaná vztahy $x \in \langle -2, 2 \rangle, x^2 - 4 \leq y \leq 0$ |
| 2.  | $x - y$                          | plocha zadaná vztahy $x \in \langle 0, 2 \rangle, 0 \leq y \leq e^{x-1}$  |
| 3.  | $2x - 2y + 3$                    | kruh $x^2 + y^2 \leq 2$                                                   |
| 4.  | $2x + y - 5$                     | kruh $x^2 + y^2 \leq 5$                                                   |
| 5.  | $3x - y + 1$                     | kruh $x^2 + y^2 \leq 10$                                                  |
| 6.  | $(x^2 + y^2 + 1)(x^2 - y^2 - 1)$ | kruh $x^2 + y^2 \leq 1$                                                   |
| 7.  | $\frac{xy}{x^2 + y^2 - 9}$       | kruh $x^2 + y^2 \leq 4$                                                   |
| 8.  | $x - 2y$                         | množ. zadaná rovnicí $13x^2 - 10xy + 13y^2 = 72$                          |
| 9.  | $3x + 2y$                        | půlkruh zadaný vztahy $x^2 + y^2 \leq 13, y \geq 0$                       |
| 10. | $7x + y$                         | kruhovú výseč zadaná vztahy $x^2 + y^2 \leq 50, y \geq 0, x \geq y$       |

Vyšetřete extrémy dané funkce na dané množině  $M \subset \mathbb{R}^3$ .

|     | $f(x, y, z)$       | $M$                                                         |
|-----|--------------------|-------------------------------------------------------------|
| 11. | $x^3 - 4y^3 - z^3$ | množ. zadaná rovnicí $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$                 |
| 12. | $x - 2y + 3z$      | množ. zadaná rovnicemi $x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 2$ |
| 13. | $x + y - 2z$       | množ. zadaná rovnicemi $x^2 + y^2 = 1, x^2 + z^2 = 1$       |

**Řešení:**

Na úlohy 1 a 2 stačí dosazovací metoda, na ostatní je třeba užít Lagrangeovy multiplikátory, případně metodu jacobíanu.

|     | $\min$                                                                            | $\max$                                                                          |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| 1.  | $f(-2, 0) = -12$                                                                  | $f(1, -3) = 15$                                                                 |
| 2.  | $f(2, e) = 2 - e$                                                                 | $f(2, 0) = 2$                                                                   |
| 3.  | $f(-1, 1) = -1$                                                                   | $f(1, -1) = 7$                                                                  |
| 4.  | $f(-2, -1) = -10$                                                                 | $f(2, 1) = 0$                                                                   |
| 5.  | $f(-3, 1) = -9$                                                                   | $f(3, -1) = 11$                                                                 |
| 6.  | $f(0, \pm 1) = -4$                                                                | $f(\pm 1, 0) = 0$                                                               |
| 7.  | $f(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}) = -\frac{2}{5}$                                      | $f(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}) = \frac{2}{5}$                                     |
| 8.  | $f(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{7}{\sqrt{10}}) = -\frac{3}{2}\sqrt{10}$            | $f(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{7}{\sqrt{10}}) = \frac{3}{2}\sqrt{10}$           |
| 9.  | $f(-\sqrt{13}, 0) = -3\sqrt{13}$                                                  | $f(3, 2) = 13$                                                                  |
| 10. | $f(0, 0) = 0$                                                                     | $f(7, 1) = 50$                                                                  |
| 11. | $f(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0) = -\sqrt{2}$                                         | $f(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) = \sqrt{2}$                                       |
| 12. | $f(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, -1) = -\sqrt{5} - 3$                  | $f(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 1) = \sqrt{5} + 3$                  |
| 13. | $f(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}) = -\sqrt{10}$ | $f(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}) = \sqrt{10}$ |