

Matematika pro ekonomy
Domácí úkol 10 (26.3.2012)

Parciální derivace funkcí více proměnných

Spočtete parciální derivace zadané funkce podle všech proměnných v příslušných definičních oborech:

1. $f(x, y) = x^3y^2 + xy^3$
2. $f(x, y) = e^{xy^2}$
3. $f(x, y, z) = \ln(xz) + \frac{y}{z} - xy$

Volné lokální extrémy funkcí více proměnných

Vyšetřete, ve kterých bodech nastávají lokální extrémy a sedla dané funkce (uvažujeme $x, y \in \mathbb{R}$).

4. $f(x, y) = y^4 + 32x^2 - 32xy$
5. $f(x, y) = x - y^2 - e^{x-2y}$
6. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 15$

Extrémy funkcí více proměnných na množinách s rovnou hranicí

Vyšetřete extrémy dané funkce na dané množině M . (Pozn.: označení např. $\langle 0, 1 \rangle \times \langle -1, 2 \rangle$ znamená obdélník $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in \langle 0, 1 \rangle, y \in \langle -1, 2 \rangle\}$, podobně $\langle -2, 1 \rangle^2 = \langle -2, 1 \rangle \times \langle -2, 1 \rangle$.)

	$f(x, y)$	M
7.	$x - y - x^2y^3$	$\langle 0, 1 \rangle \times \langle -1, 2 \rangle$
8.	$xy^2 - 2xy - 3x^2 + x - y$	$\langle 0, 2 \rangle \times \langle 0, 3 \rangle$
9.	$x^2 - y^2 + \ln(1 + x^2 + y^2)$	$\langle -1, 1 \rangle^2$
10.	$x^3 - y^3 - 2x + 3y$	trojúhelník s vrcholy $(0, 0), (1, 0), (0, 2)$
11.	$xy(x - y - 2)$	trojúhelník s vrcholy $(-1, 1), (0, -2), (2, 0)$
12.	$xy(x - y - 2)^2$	čtyřúhelník s vrcholy $(-2, 0), (2, 0), (1, 1), (-1, 1)$
13.	$\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}$	čtyřúhelník s vrcholy $(2, 0), (0, 0), (0, 2), (-1, 1)$

Řešení:

1. $\partial_x f(x, y) = 3x^2y^2 + y^3$
 $\partial_y f(x, y) = 2x^3y + 3xy^2$
2. $\partial_x f(x, y) = y^2e^{xy^2}$
 $\partial_y f(x, y) = 2xye^{xy^2}$
3. $\partial_x f(x, y, z) = \frac{1}{x} - y$
 $\partial_y f(x, y, z) = \frac{1}{y} - x$
 $\partial_z f(x, y, z) = \frac{1}{z} + \frac{-y}{z^2}$ (vše pro $xz > 0$)

4. sedlo v $[0, 0]$, lok. minima v $[1, 2], [-1, -2]$, 5. lok. maximum v $[2, 1]$, 6. sedlo v $[0, 0]$, lok. minimum v $[3, 3]$,

	min	max
7.	$f(1, 2) = -9$	$f(1, -1) = 3$
8.	$f(2, \frac{5}{4}) = -\frac{105}{8}$	$f(\frac{1}{6}, 0) = \frac{1}{12}$
9.	$f(0, \pm 1) = \ln 2 - 1 = -0,307...$	$f(\pm 1, 0) = \ln 2 + 1 = 1,693...$
10.	$f(0, 2) = -2$	$f(0, 1) = 2$
11.	$f(\frac{2}{3}, \frac{4}{9}) = f(-\frac{4}{9}, -\frac{2}{3}) = -\frac{128}{243}$	$f(-1, 1) = 4$
12.	$f(-1, 1) = -16$	$f(1, 1) = 4$
13.	$f(0, 0) = -1$	$f(0, 2) = f(2, 0) = \frac{3}{5}$

K dalšímu počítání: Na konci kapitoly 4 ze Žluté učebnice, str. 113, úloha 2, abdegjhl: spočtete všechny parciálních derivace zadaných funkcí. Spočtete úlohy 6–8 na str. 114.