

Matematika pro ekonomy
Domácí úkol 9 (16.11.2011)
Průběh funkce

Vyšetřete průběh následující funkce, tj. najděte její definiční obor, sudost/lichost, průsečíky s osami, případně jiné význačné hodnoty, limity v krajních bodech D_f , lokální a globální extrém, intervaly monotonie, asymptoty, oblasti konvexity/konkavity včetně inflexních bodů (není-li uvedeno jinak), nakreslete graf funkce.

- | | |
|---|---|
| 1. $x^3 + 3x^2 - 9x - 11$
3. $\frac{1-2x}{3x^2}$
5. $\frac{1}{1+e^{-x}}$
7. $x\sqrt{1-x^2}$ (bez konvexity/konkavity)
9. $\frac{1}{x^2-x-2}$ (bez konvexity/konkavity) | 2. $x^4 - 4x^3$
4. $\frac{3x-1}{1-x}$
6. $e^2 e^{-x^2}$
8. $\frac{x^2-x-2}{x-3}$
10. $\frac{\ln(3+2x-x^2)}{\ln 3}$ |
|---|---|

Řešení:

1. $D_f = \mathbb{R}$, kořeny: $-1, -1 \pm 2\sqrt{3}$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = \pm\infty$, roste v $(-\infty, -3)$, $\langle 1, +\infty)$, klesá v $\langle -3, 1)$, konvexní v $\langle -1, +\infty)$, konkávní v $(-\infty, -1)$, asymptoty nejsou.

2. $D_f = \mathbb{R}$, kořeny: 0 (trojnásobný), 4, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = +\infty$, klesá v $(-\infty, 3)$, roste v $\langle 3, +\infty)$, konvexní v $(-\infty, 0)$, $\langle 2, +\infty)$, konkávní v $\langle 0, 2)$, asymptoty nejsou.

3. $D_f = \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$, kořen: $\frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0\pm} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = 0$, roste v $(-\infty, 0)$, $\langle 1, +\infty)$, klesá v $(0, 1)$, konvexní v $(-\infty, 0)$, $(0, \frac{3}{2})$, konkávní v $\langle \frac{3}{2}, +\infty)$, asymptota v $\pm\infty$ je $y = 0$.

4. $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, kořen: $\frac{1}{3}$, $\lim_{x \rightarrow 1\pm} = \mp\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = -3$, roste v $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$, konvexní v $(-\infty, 1)$, konkávní v $(1, +\infty)$, asymptota v $\pm\infty$ je $y = -3$.

5. $D_f = \mathbb{R}$, $f(0) = \frac{1}{2}$, $f(x) > 0$ v $\mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} = 1$, roste v $\mathbb{R}$, konvexní v $\mathbb{R}_-$, konkávní v $\mathbb{R}_+$, asymptota v $-\infty$: $y = 0$, v $+\infty$: $y = 1$.

6. $D_f = \mathbb{R}$, $f(0) = e^2$, $f(x) > 0$ v $\mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = 0$, roste v $\mathbb{R}_-$, klesá v $\mathbb{R}_+$, konvexní v $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$, konkávní v $\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, asymptota v $\pm\infty$ je $y = 0$. (Pozor, e^2 je konstanta.)

7. $D_f = \langle -1, 1)$, $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$, klesá v $\langle -1, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$, roste v $\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

8. $D_f = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$, $f(0) = \frac{2}{3}$, kořeny: $-1, 2$, $\lim_{x \rightarrow 3\pm} = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = \pm\infty$, roste v $(-\infty, 1)$, $(5, +\infty)$, klesá v $(1, 3)$, $(3, 5)$, konkávní v $(-\infty, 3)$, konvexní v $(3, +\infty)$, asymptota v $\pm\infty$ je $y = x + 2$.

9. $D_f = (-\infty, -1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$, $f(0) = -\frac{1}{2}$, $f(x) \neq 0$ v $\mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow -1\pm} = \mp\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2\pm} = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = 0$, roste v $(-\infty, -1)$, $(-1, \frac{1}{2})$, klesá v $(\frac{1}{2}, 2)$, $(2, +\infty)$, asymptota v $\pm\infty$ je $y = 0$.

10. $D_f = (-1, 3)$, $f(0) = 1$, kořeny $1 \pm \sqrt{3}$, $\lim_{x \rightarrow -1+} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3-} = -\infty$, roste v $(-1, 1)$, klesá v $(1, 3)$, konkávní v celém D_f . (Pozor, $\ln 3$ je konstanta.)

K dalšímu počítání: Na konci kapitoly 3 ze Žluté učebnice (str. 85–86) vyšetřete průběh funkcí z úloh 6–11, které obsahují racionální funkce, odmocniny, exponenciály, logaritmy. Vždy se snažte načrtnout graf zadané funkce.