

Matematika pro ekonomy
Domácí úkol 16 (19.12.2011)

Úlohy ze závěrečného testu z LS 2010/11 s řešením

Toto jsou úlohy použité v závěrečném testu v letním semestru 2010/11 a jejich obtížnost můžete brát jako směrodatnou pro letošní závěrečný test (který ale bude navíc obsahovat soustavu lineárních rovnic). Úlohy jsou číslovány 1–5, každá je ve variantách A,B,C,D.

1. Vyšetřete průběh funkce $f(x)$ tj. naleznete definiční obor, limity a hodnoty v důležitých bodech, kořeny, lokální a globální extrémy, intervaly monotonie, případné asymptoty, obor konvexity a konkavity, inflexní body, načrtněte graf.

A. $f(x) = \ln\left(\frac{x+5}{1-x}\right)$

B. $f(x) = \frac{e^{2x}}{e(x-1)}$

C. $f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{x^2+4}}$

D. $f(x) = \frac{e^{3x}}{x-2}$

2. Najděte všechny stacionární body funkce $f(x, y)$ v $\mathbb{R}^2$ a pro každý z nich určete, zda se jedná o lokální maximum, lokální minimum či sedlový bod.

A. $f(x, y) = x^3 - xy + y^2 - y$

B. $f(x, y) = x^2 - x - xy + 2y^3$

C. $f(x, y) = x^3 - x^2 - 4x + y^2 + 2xy$

D. $f(x, y) = x^2 - x - xy - y^3 + y$

3. Určete extrémy funkce $f(x, y)$ na množině M .

A. $f(x, y) = x^2 - 8x + 3y, M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 2, -x \leq y \leq x^2\}$

B. $f(x, y) = 2x - x^2 + 3y, M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; -3 \leq x \leq 6, x^2 \leq y \leq 3x + 18\}$

C. $f(x, y) = y - x,$

$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 6, x^3 - 5x^2 - 7x + 12 \leq y \leq 12 - x\}$

D. $f(x, y) = x^2 + 2y, M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; -2 \leq x \leq 5, x - 5 \leq y \leq 5 + 4x - x^2\}$

4. Určete extrémy funkce $f(x, y)$ na množině M .

A. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2, M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + xy + y^2 \leq 27\}$

B. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2, M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 8\}$

C. $f(x, y) = e^{x^2+y^2}, M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 4x^2 + (y-2)^2 = 9\}$

D. $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 + 6y + 10,$

$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; (x-2)^2 + (y+2)^2 = 4\}$

5. Určete extrémy funkce $f(x, y, z)$ na množině M .

A. $f(x, y, z) = 4x - y$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; y^2 + z^2 = 40, x^2 + z^2 = 100\}$

B. $f(x, y, z) = x^2 - 2x + y^2 + z^2 + 4$,

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; (x-1)^2 + y^2 = 13, 3x + 2y - z + 12 = 0\}$$

C. $f(x, y, z) = x - 2y + z$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 9, y^2 + z^2 = 5\}$

D. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4z + 4$,

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + (z-2)^2 = 10, 6x - y + 2z = 4\}$$

Řešení:

1.

A. $D_f = (-5, 1)$, roste v D_f , $\lim_{x \rightarrow -5+} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1-} = +\infty$, inflexe v bodě 0.

B. $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$, v $(-\infty, 1)$ klesá od 0 do $-\infty$ a je konkávní, v $(1, \frac{3}{2})$ klesá od $+\infty$ do $2e^2$, v $(\frac{3}{2}, +\infty)$ roste od $2e^2$ do $+\infty$ a je konvexní v $(1, +\infty)$.

C. $D_f = \mathbb{R}$, $\max f(-4) = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = \mp 1$, konkávní v $(-3 - \sqrt{11}, -3 + \sqrt{11})$, jinde konvexní.

D. $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$, v $(-\infty, 2)$ klesá od 0 do $-\infty$ a je konkávní, v $(2, \frac{7}{3})$ klesá od $+\infty$ do $3e^7$, v $(\frac{7}{3}, +\infty)$ roste od $3e^7$ do $+\infty$ a je konvexní v $(2, +\infty)$.

2.

A. $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ lok. min., $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ sedlo,

B. $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ lok. min., $(\frac{3}{8}, -\frac{1}{4})$ sedlo,

C. $(2, -2)$ lok. min., $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ sedlo,

D. $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$ lok. min., $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ sedlo.

3.

	min	max
A.	$f(2, -2) = -18$	$f(0, 0) = f(2, 4) = 0$
B.	$f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) = -\frac{1}{2}$	$f(\frac{11}{2}, \frac{69}{2}) = \frac{337}{4}$
C.	$f(4, -32) = -36$	$f(0, 12) = 12$
D.	$f(-\frac{1}{2}, -\frac{11}{2}) = -\frac{43}{4}$	$f(4, 5) = 26$

4.

	min	max
A.	$f(0, 0) = 0$	$f(\pm(3\sqrt{3}, -3\sqrt{3})) = 81$
B.	$f(0, 0) = 0$	$f(\frac{3\pm\sqrt{15}}{2}, \frac{3\pm\sqrt{15}}{2}) = \frac{27}{2}$
C.	$f(\pm\frac{\sqrt{17}}{6}, -\frac{2}{3}) = e^{11/12}$	$f(0, 5) = e^{25}$
D.	$f(2 - \sqrt{2}, -2 - \sqrt{2}) = 6 - 4\sqrt{2}$	$f(2 + \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}) = 6 + 4\sqrt{2}$

5.

	min	max
A.	$f(-10, \sqrt{40}, 0) = -40 - \sqrt{40}$	$f(10, -\sqrt{40}, 0) = 40 + \sqrt{40}$
B.	$f(-2, -2, 2) = 20$	$f(4, 2, 28) = 800$
C.	$f(-2, 2, -1) = -7$	$f(2, -2, 1) = 7$
D.	$f(1, 0, -1) = f(-1, 0, 5) = 10$	$f(-3, -20, 1) = f(3, 20, 3) = 410$