Matematika pro ekonomy
Domácí úkol 15 (14.12.2011)

Úlohy ze závěrečného testu z LS 2009/10 s řešením

Upozornění: toto jsou úlohy použité v závěrečném testu v letním semestru 2009/10 a nic nevypovídají o obtížnosti úloh, které budou použity letos. Úlohy jsou číslovány 1., 2.a, 2.b, 3.a, 3.b, každá ve variantách A,B,C,D.

1. Vyšetřete průběh funkce $f(x)$ tj. nalezněte definiční obor, limity a hodnoty v důležitých bodech, kořeny, lokální a globální extrémy, intervaly monotonie, případné asymptoty, obor konvexity a konkavity, inflexní body, načrtněte graf.

A. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9x + 14}$.

B. $f(x) = xe^{(1-\frac{x^2}{2})}$.

C. $f(x) = x^2 e^{(1-x)}$.

D. $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 5)$.

2. Je zadána funkce $f(x, y)$.

a. Najděte všechny stacionární body funkce f v $\mathbb{R}^2$ a určete, zda se v těchto bodech jedná o lokální maximum, lokální minimum či sedlo.

b. Určete globální extrémy funkce f na trojúhelníku resp. čtyřúhelníku určeném vrcholy $A, B, C, (D)$.

A. $f(x, y) = 6xy - x^3 - y^3$, $A = [-1, -3], B = [-1, 9], C = [5, 3]$.

B. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 3x - 2y$, $A = [-2, 0], B = [2, 0], C = [0, 4]$.

C. $f(x, y) = 8\ln(x + y) - x^2 - 2y$, $A = [1, 0], B = [5, 0], C = [0, 5], D = [0, 1]$.

D. $f(x, y) = 3x^2 - 3y^2 - x^3 - 3xy^2$, $A = [0, 1], B = [3, 1], C = [3, -2]$.

3. Je zadána funkce $f(x, y, z)$.

a. Určete globální extrémy funkce f na množině dané vztahem g.

b. Určete globální extrémy funkce f na množině dané vazbami $g_1 = 0$, $g_2 = 0$.

A. $f(x, y, z) = x - 3y + 2z, g : x^2 + y^2 + z^2 \leq 56$,
$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{59}{4}, g_2(x, y, z) = x + y + z - \frac{3}{2}$.

B. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, g : 2x^2 + y^2 + 3z^2 \leq 6$,
$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 10, g_2(x, y, z) = x + 3y - 5z$.

C. $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - z^2, g : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$,
$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14, g_2(x, y, z) = x + y - 2z$.

D. $f(x, y, z) = 4x + y - 2z, g : x^2 + y^2 + z^2 \leq 21$,
$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 54, g_2(x, y, z) = x - y + z + 10$.

Řešení:

1.

A. $D_f = (-\infty, 2\rangle \cup \langle 7, +\infty)$, kořeny: $2, 7$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} = +\infty$, roste a je konkávní v $\langle 7, +\infty)$, klesá a je konkávní v $\langle -\infty, 2\rangle$, asymptoty $y = -x - \frac{9}{2}$ v $-\infty$, $y = x + \frac{9}{2}$ v $+\infty$.
B. $D_f = \mathbb{R}$, kořen: 0, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} = 0$, roste v $\langle -1, 1\rangle$, klesá v $(-\infty, -1\rangle$ a v $\langle 1, +\infty)$, je konkávní v $(-\infty, -\sqrt{6}\rangle$ a v $\langle 0, \sqrt{6}\rangle$, je konvexní v $(-\sqrt{6}, 0\rangle$ a v $\langle \sqrt{6}, +\infty)$, asymptota $y = 0$ v $\pm\infty$.
C. $D_f = \mathbb{R}$, kořen: 0, $\lim\limits_{x\to-\infty} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} = 0$, roste v $\langle 0, 2\rangle$, klesá v $(-\infty, 0\rangle$ a v $\langle 2, +\infty)$, je konkávní v $\langle 2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\rangle$, je konvexní v $(-\infty, 2-\sqrt{2}\rangle$ a v $\langle 2+\sqrt{2}, +\infty)$, asymptota $y = 0$ v $+\infty$, neexistuje v $-\infty$.
D. $D_f = \mathbb{R}$, kořen: 2, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} = +\infty$, roste v $\langle 2, +\infty)$, klesá v $(-\infty, 2\rangle$, je konvexní v $\langle 1, 3\rangle$, je konkávní v $(-\infty, 1\rangle$ a v $\langle 3, +\infty)$, asymptoty neexistují.

2.

	stac. body	min	max
A.	$(0,0)$ sedlo, $(2,2)$ lok. max.	$f(-1,9) = -782$	$f(-1,-3) = 46$
B.	$(-1,1)$ sedlo, $(1,1)$ lok. min.	$f(1,1) = -3$	$f(0,4) = 8$
C.	$(1,3)$ lok. max.	$f(5,0) = 8\ln 5 - 25 \doteq -12,12$	$f(1,3) = 8\ln 4 - 7 \doteq 4,09$
D.	$(0,0)$ sedlo, $(2,0)$ lok. max.	$f(3,-2) = -48$	$f(2,0) = 4$

3a.

	min	max
A.	$f(-2,6,-4) = -28$	$f(2,-6,4) = 28$
B.	$f(0,0,0) = 0$	$f(0,\pm\sqrt{6},0) = 6$
C.	$f(0,0,\pm 2) = -4$	$f(\pm 2,0,0) = 8$
D.	$f(-4,-1,2) = -21$	$f(4,1,-2) = 21$

3b.

	min	max
A.	$f(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{3}{2}) = -\frac{28}{2}$	$f(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{5}{2}) = \frac{28}{2}$
B.	$f(-3,1,0) = f(3,-1,0) = 10$	$f(1,3,2) = f(-1,-3,-2) = 14$
C.	$f(\pm(1,3,2)) = 7$	$f(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}(4,2,1)) = \frac{70}{3}$
D.	$f(-7,2,-1) = -24$	$f(\frac{1}{3}(1,14,-17)) = \frac{52}{3}$

Na ukázku přikládám ještě vzorové řešení (poněkud obtížnější) úlohy 3Cb.

Je zadána funkce $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - z^2$. Určete globální extrémy funkce f na množině dané vazbami $g_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-14 = 0$, $g_2(x,y,z) = x+y-2z = 0$.

Řešení:

Lagrangeova funkce:

$$L(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - z^2 + \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - 14) + \lambda_2(x + y - 2z)$$

Rovnice:

$$\begin{array}{llrl} (1) & \partial_x L = & 4x + 2\lambda_1 x + \lambda_2 & = 0 \\ (2) & \partial_y L = & 2y + 2\lambda_1 y + \lambda_2 & = 0 \\ (3) & \partial_z L = & -2z + 2\lambda_1 z - 2\lambda_2 & = 0 \\ (4) & g_1 = & x^2 + y^2 + z^2 - 14 & = 0 \\ (5) & g_2 = & x + y - 2z & = 0 \end{array}$$

Z prvních tří rovnic vyjádříme proměnné:

$$x = \frac{-\lambda_2}{2(2+\lambda_1)}, y = \frac{-\lambda_2}{2(1+\lambda_1)}, z = \frac{2\lambda_2}{2(-1+\lambda_1)}$$

a to dosadíme do rovnice (5) (upravte sami):

$$0 = -\frac{\lambda_2}{2}\left(\frac{1}{(2+\lambda_1)} + \frac{1}{(1+\lambda_1)} + \frac{4}{(-1+\lambda_1)}\right) = -\frac{\lambda_2}{2}\left(\frac{6\lambda_1^2 + 13\lambda_1 + 5}{(2+\lambda_1)(1+\lambda_1)(-1+\lambda_1)}\right)$$

Můžeme vyloučit možnost $\lambda_2 = 0$, neboť ta nevede k řešení (je ve sporu s rovnicí (4)), tedy hledáme řešení kvadratické rovnice $6\lambda_1^2 + 13\lambda_1 + 5 = 0$, a ta jsou $-\frac{1}{2}, -\frac{5}{3}$. Pak už jen obě možnosti dosadíme do výrazů pro x, y, z, která tak budou vyjádřena už jen pomocí λ_2, a tato x, y, z dosadíme do rovnice (4), čímž dopočteme λ_2 a vychází nám nakonec body a hodnoty:

min	max
$f(\pm(1,3,2)) = 7$	$f(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}(4,2,1)) = \frac{70}{3}$