**Matematika pro ekonomy**
**Domácí úkol 12 (28.11.2011)**

## Parciální derivace funkcí více proměnných

Spočtěte parciální derivace zadané funkce podle všech proměnných v příslušných definičních oborech:

**1.** $f(x,y) = x^3y^2 + xy^3$
**2.** $f(x,y) = e^{xy^2}$
**3.** $f(x,y,z) = \ln(xz) + \frac{y}{z} - xy$

## Volné lokální extrémy funkcí více proměnných

Vyšetřete, ve kterých bodech nastávají lokální extrémy a sedla dané funkce (uvažujeme $x, y \in \mathbb{R}$).

**4.** $f(x,y) = y^4 + 32x^2 - 32xy$
**5.** $f(x,y) = x - y^2 - e^{x-2y}$
**6.** $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 15$

## Extrémy funkcí více proměnných na množinách s rovnou hranicí

Vyšetřete extrémy dané funkce na dané množině $M$. (Pozn.: označení např. $\langle 0,1\rangle \times \langle -1,2\rangle$ znamená obdélník $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \in \langle 0,1\rangle, y \in \langle -1,2\rangle\}$, podobně $\langle -2,1\rangle^2 = \langle -2,1\rangle \times \langle -2,1\rangle$.)

| | $f(x,y)$ | $M$ |
|---|---|---|
| **7.** | $x - y - x^2y^3$ | $\langle 0,1\rangle \times \langle -1,2\rangle$ |
| **8.** | $xy^2 - 2xy - 3x^2 + x - y$ | $\langle 0,2\rangle \times \langle 0,3\rangle$ |
| **9.** | $x^2 - y^2 + \ln(1 + x^2 + y^2)$ | $\langle -1,1\rangle^2$ |
| **10.** | $x^3 - y^3 - 2x + 3y$ | *trojúhelník s vrcholy* $(0,0), (1,0), (0,2)$ |
| **11.** | $xy(x - y - 2)$ | *trojúhelník s vrcholy* $(-1,1), (0,-2), (2,0)$ |
| **12.** | $xy(x - y - 2)^2$ | *čtyřúhelník s vrcholy* $(-2,0), (2,0), (1,1), (-1,1)$ |
| **13.** | $\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}$ | *čtyřúhelník s vrcholy* $(2,0), (0,0), (0,2), (-1,1)$ |

**Řešení:**

**1.** $\partial_x f(x,y) = 3x^2y^2 + y^3$
$\partial_y f(x,y) = 2x^3y + 3xy^2$
**2.** $\partial_x f(x,y) = y^2e^{xy^2}$
$\partial_y f(x,y) = 2xye^{xy^2}$
**3.** $\partial_x f(x,y,z) = \frac{1}{x} - y$
$\partial_y f(x,y,z) = \frac{1}{z} - x$
$\partial_z f(x,y,z) = \frac{1}{z} + \frac{-y}{z^2}$ (vše pro $xz > 0$)

**4.** sedlo v $[0,0]$, lok. minima v $[1,2], [-1,-2]$, **5.** lok. maximum v $[2,1]$, **6.** sedlo v $[0,0]$, lok. minimum v $[3,3]$,

| | *min* | *max* |
|---|---|---|
| **7.** | $f(1,2) = -9$ | $f(1,-1) = 3$ |
| **8.** | $f(2,\frac{5}{4}) = -\frac{105}{8}$ | $f(\frac{1}{6},0) = \frac{1}{12}$ |
| **9.** | $f(0,\pm 1) = \ln 2 - 1 = -0{,}307...$ | $f(\pm 1,0) = \ln 2 + 1 = 1{,}693...$ |
| **10.** | $f(0,2) = -2$ | $f(0,1) = 2$ |
| **11.** | $f(\frac{2}{3},\frac{4}{9}) = f(-\frac{4}{9},-\frac{2}{3}) = -\frac{128}{243}$ | $f(-1,1) = 4$ |
| **12.** | $f(-1,1) = -16$ | $f(1,1) = 4$ |
| **13.** | $f(0,0) = -1$ | $f(0,2) = f(2,0) = \frac{3}{5}$ |

**K dalšímu počítání:** Na konci kapitoly 4 ze Žluté učebnice, str. 113, úloha 2, abdeghjl: spočtěte všechny parciálních derivace zadaných funkcí. Spočtěte úlohy 6–8 na str. 114.