

Proj. geom. 2.12.2020

Afinní klasifikace křivek

Pozn: v proj. geom. musíme rozlišit pouze reg./sing. křivky. Projektivně nemůžeme rozlišit elipsu/parabolu/hyperbolu. K tomu potřebujeme afinní rovinu. V ní máme:

- ① rozlišením sl. a nevsl. bodů
- ② —||— různos. a rovnoběžek

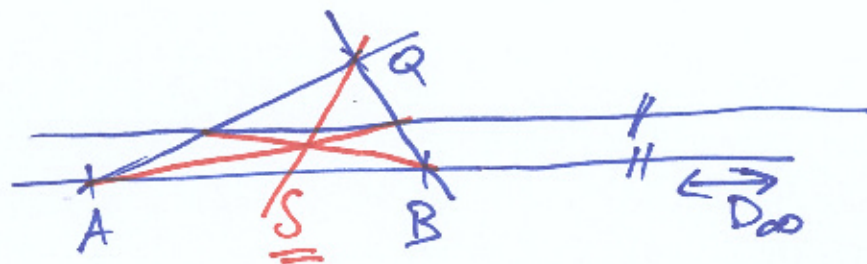
- ③ dělicí poměr: $(ABC) = (ABCD_\infty)$



- ④ střed úsečky: $(ABC) = (ABCD_\infty) = -1$

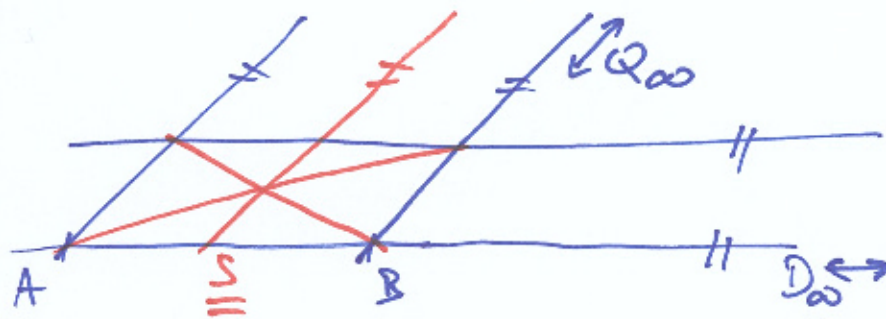
↓
Konstrukce nalezení středu úsečky:

a)

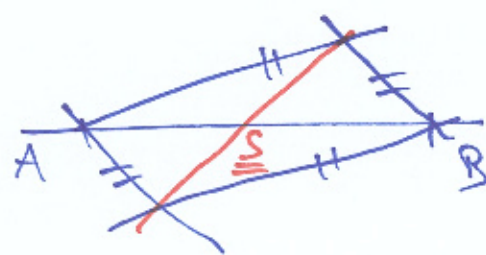


[Pozn.: úsečka $AB = \{C; (ABC) < 0\}$
Def.]

b)



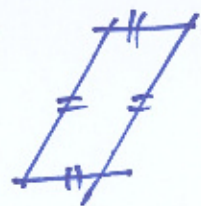
c)



⑤ přenos "délky" na romoběžky:

Def: 2 úsečky jsou stejně dlouhé

$\equiv$ jsou protilehlými stranami
v romoběžníku



⑥ za to vše platíme základem
principu duality: některé
pojmy/věty nemají duální
Pozn, nevl. přímka a
nevl. bod nejm mají duální
pojmy?

Def: Křivka je $\left\langle \begin{array}{l} \text{elipsa (E)} \\ \text{parabola (P)} \\ \text{hyperbola (H)} \end{array} \right\rangle \equiv$

$\equiv$ má $\left\langle \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right\rangle$ nevlastních bodů.
(reálných)

[Pozn: elipsa má 2 komplexní
sdružené nevl. body $\rightarrow$ PG II]

Asymptoty křivky = tečny v nevl. bodech,
tj. pro E/P/H existují 0/1/2
reálné tečny.

E: 2 kompl. sdružené tečny
P: má 1 ~~tečnu~~ asymptotu
a více nevl. přímek

Střed křivky = průsečík jejích
asymptot

Střed: H:  jasné

E: Věta: kompl. sdruž. asymptoty
elipsy mají reálný přeseč $= S$

P: za střed parabol považujeme
nevl. bod dotyku S_{∞}
nevl. přímky k parabole



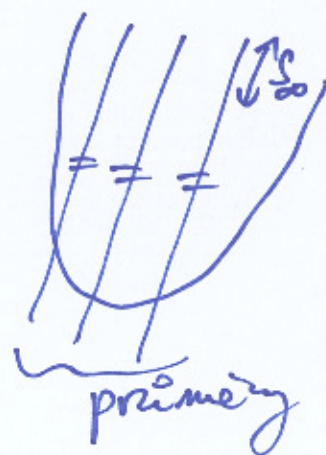
Středové křivky: E, H
(mají vlnit S)

Osová křivka: P (střed S_{∞})

Příměr křivky = přímka
procházející jejím středem

Omezený příměr = úsečka na
příměru vymezená
dvěma projekcemi s křivkou
vlastními

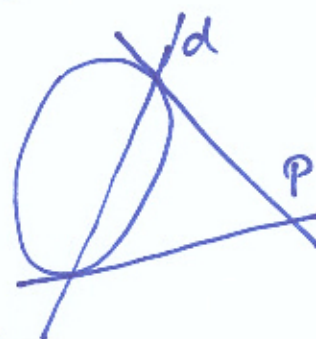
Pozn: P nemá omezené příměry,



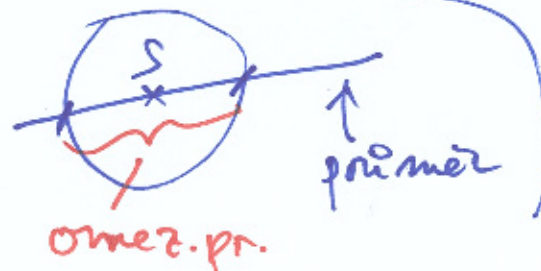
$\forall$ příměr je protínán
v 1 vl. bodě,

S_{∞} se nazývá též
směr příměru parabol
(také směr osy)

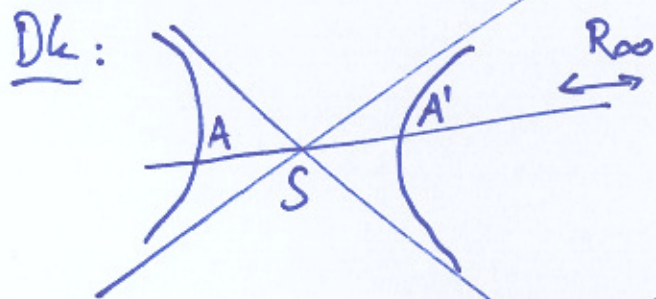
Pozn: střed křivky je pól nevl. přímky
přímky vůči této křivce.



$\rightarrow$ pro d = nevl. př.
je P = střed S



Věta: Střed E/H patří každé její omezený průměr.

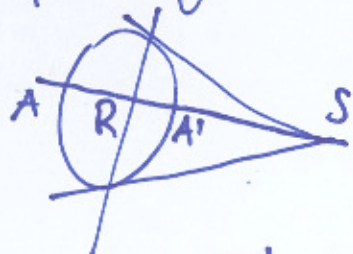


S je pól nevř. přímky a

známe větu:

$$(AA'SR_{\infty}) = -1$$

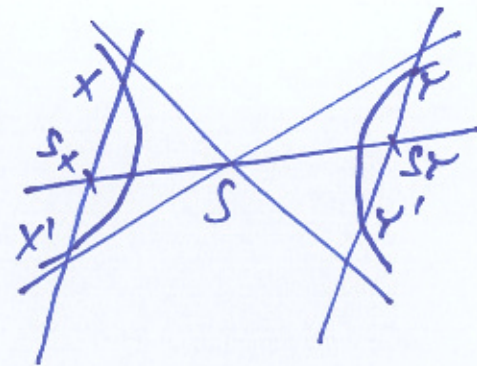
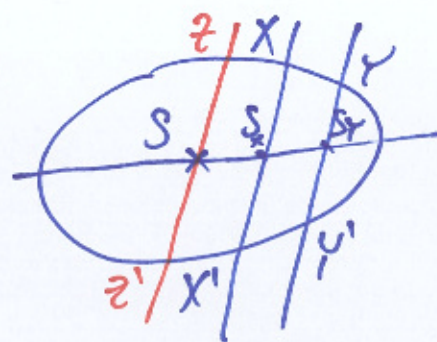
$$(AA'S) \Rightarrow S \text{ je střed } AA' \quad \square$$



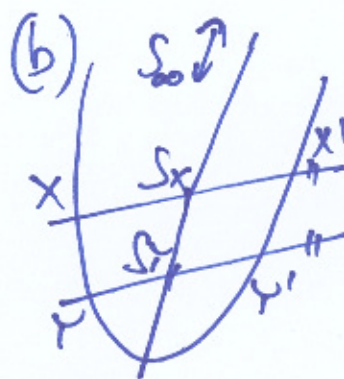
Věta: Necht' jsou spojnice bodů $X, X'; Y, Y' (\in B)$ rovnoběžné.

Pak spojnice středů S_x, S_y úseček XX', YY' procházejí

středem S křivky B .

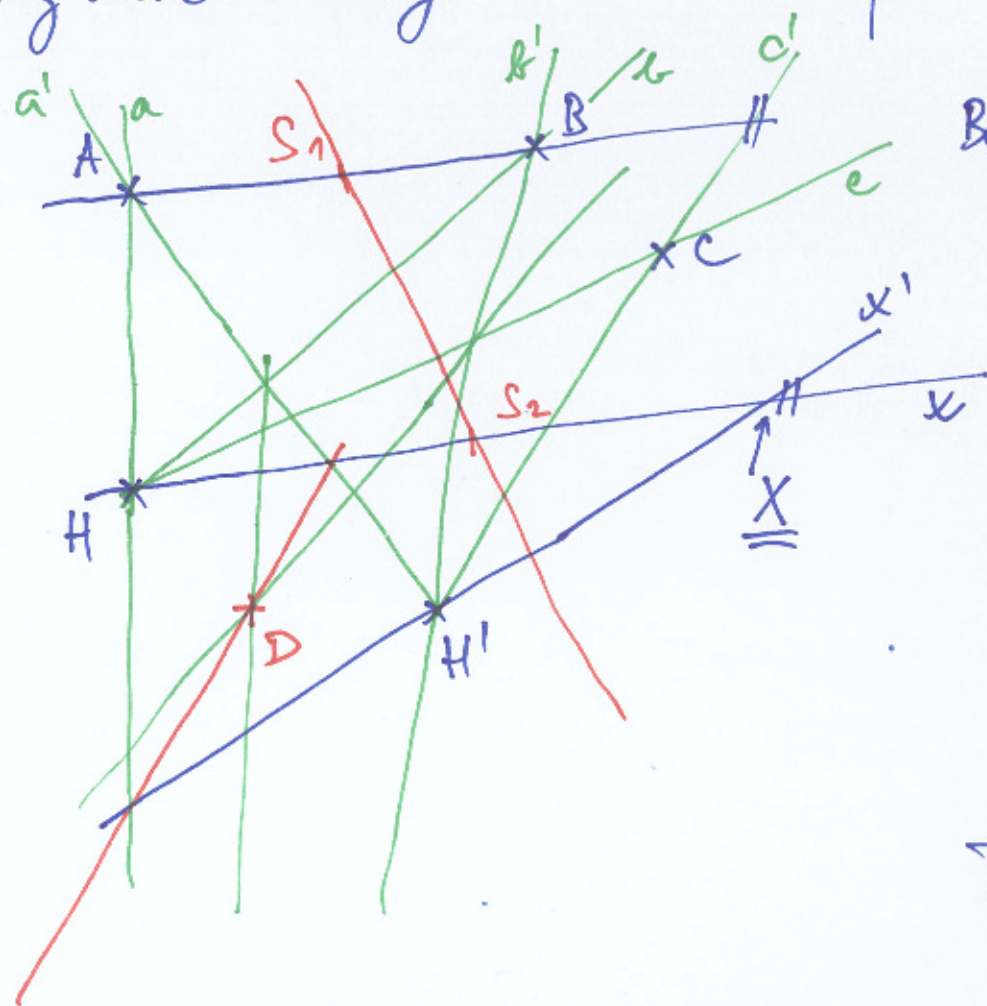


Dk (a) pro středové: $X, X'; Y, Y'$ jsou 2 páry involuce indukované spol. směrem přímkou XX', YY' . Pak osa této involuce je přímka $S_x S_y$ (opět díky větě " $(AA'RP) = -1$ "); pak vezmeme pár této involuce z, z' , že $S \in zz'$, pak zřejmé $S \in$ ose inv. = $S_x S_y$.



pro parabolu: střed involuce je opět na nevř. přímce, ta je však asymptotou paraboly $\Rightarrow$ osa inv. $S_x S_y$ prochází bodem dotyku nevř. přímky = bodem S_{∞} .

Konstrukce : sestojit střed
kružky dané 5 body



Idea : k A, B najdeme 2 body na křivce,
aby byly tyto 2 seciny //

Bodem H provedeme rovnoběžnou s AB,
 $\downarrow x$

k mi standardně přes div. bod D

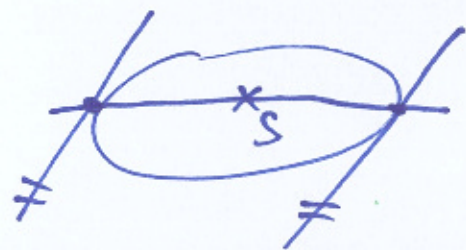
najdu x' , $X = x \cap x'$, $\Rightarrow HX \parallel AB$

nyní určíme středy AB a HC
(to umíme) $\downarrow S_1$ $\downarrow S_2$

pak $S_1 S_2$ je první přímka, na
níž leží S

Totéž uděláme pro jinou volbu
bodů $\Rightarrow$ 2. přímka $\Rightarrow \underline{\underline{S}}$.

Věta: spojnice bodů dotyku
rhombových tečen E/H
je přímkou této křivky.



Důk: pro involuci induk.
společným směrem leží
tyto body dotyku na ose inv.,
a ta prochází středem S (víme)
(je to limitní případ předch. věty)

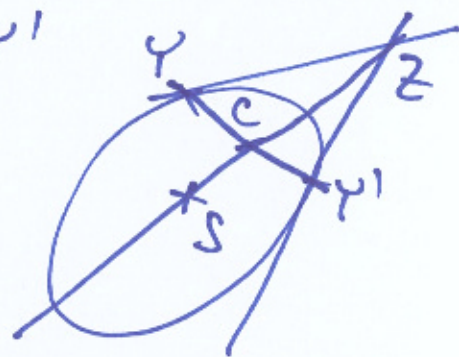
Věta: pro parabolu neexistují
rhombové tečny.

Důk: ?? $\exists 2$ rhomb. tečny $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ jejich průsečík je nevlastní,
ale nevlast. přímka je také tečnou
k parabole $\Rightarrow$ z tohoto bodu
jsou 3 tečny $\downarrow$

Věta: Y, Y' = vlastní body dotyku tečen
z bodu Z ke křivce

C = střed YY'

Pak $S \in ZC$.



Důk: směr př. YY' indukce involuci,
víme, že její osa prochází body:

Z (z věty o inv. (3))

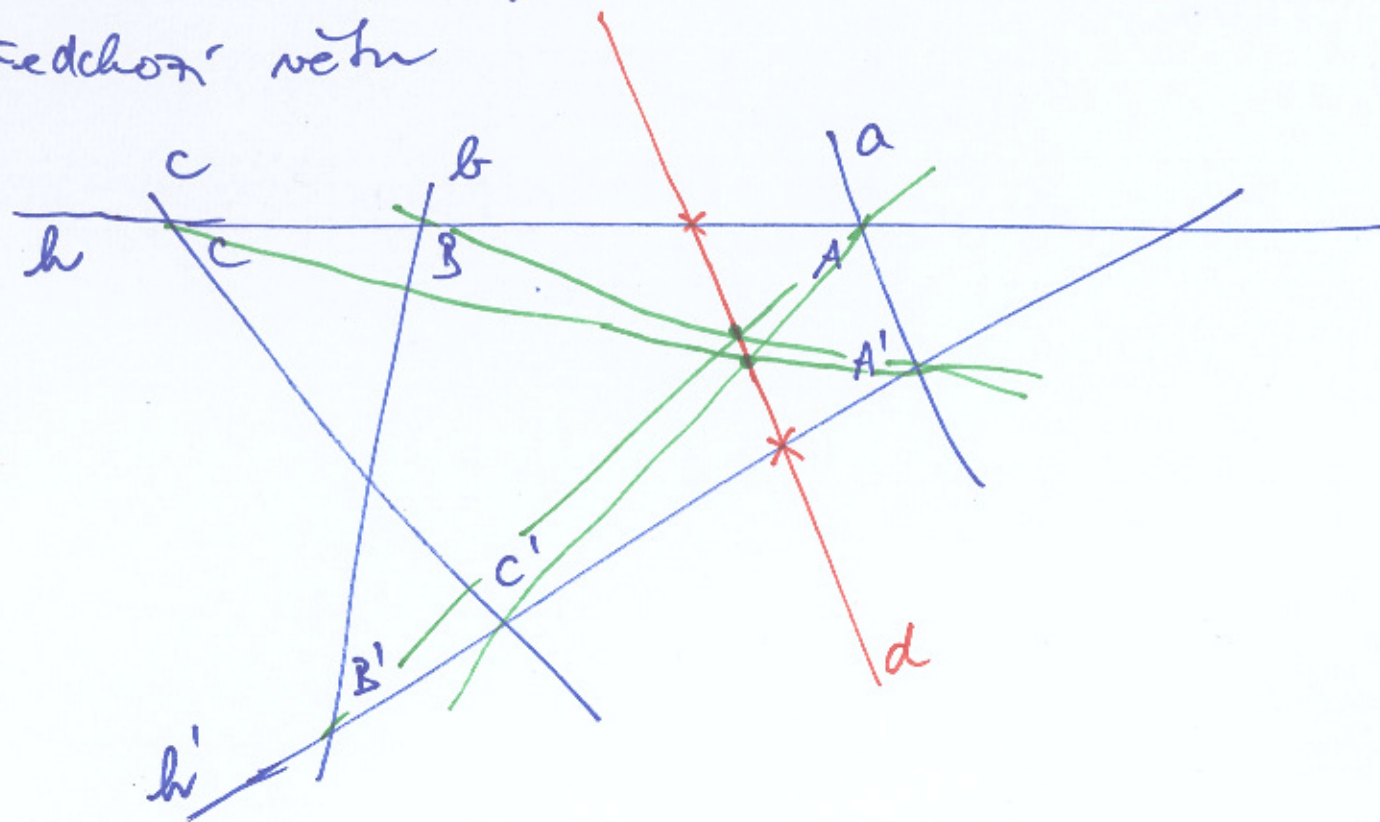
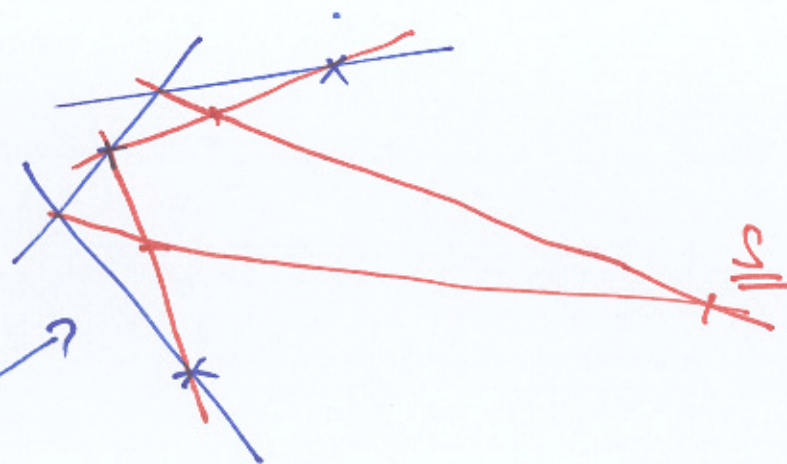
C (AAP) = -1)

S (viz Důk věty o spojnici středů sečen)

$\square$

Konstrukce: sestavit střed
 křivky zadané 5 tečnami.

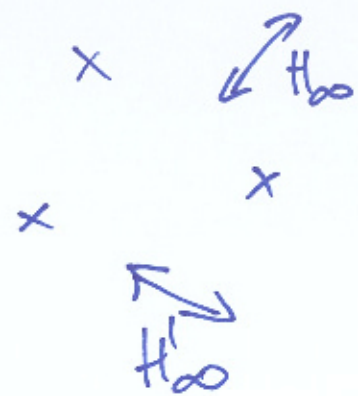
Idea: najdeme body dotyku,
 stačí na 3 tečnách, vždy (2x)
 pro 2 z nich použijeme
 předchozí větu



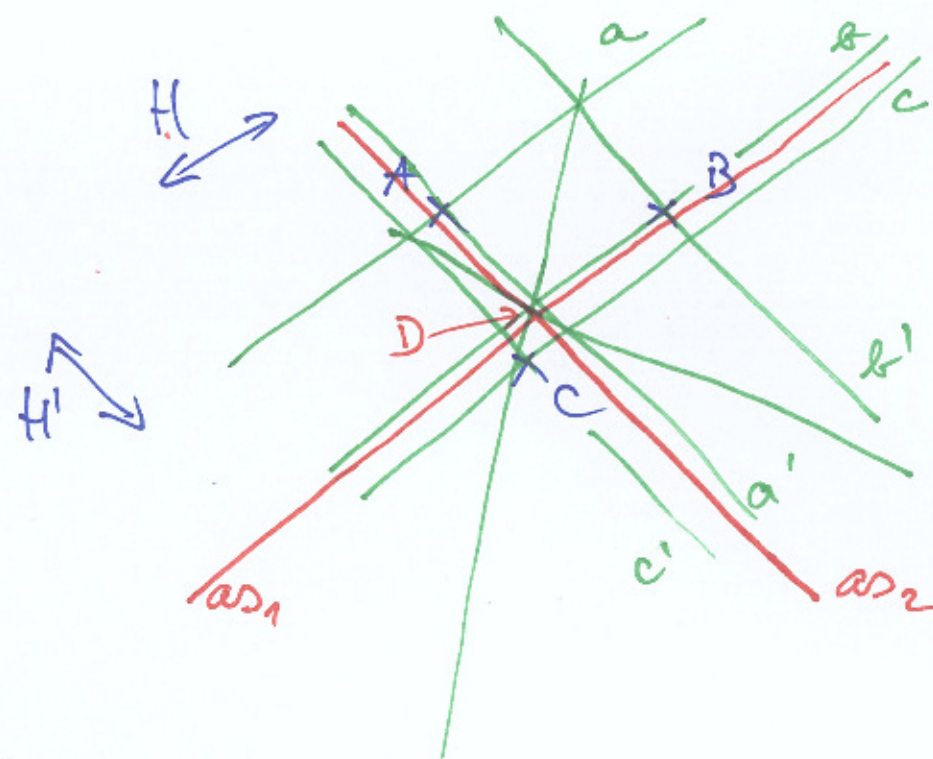
Hyperbola - speciální konstrukce anot.

Konstrukce: sestavit hyperbolu včetně asymptot a středů, jsou-li zadány 3 vl. body a 2 směry asymptot.

Pozn: toto je vlastně zadání 5 body, z toho 2 jsou nevlastní



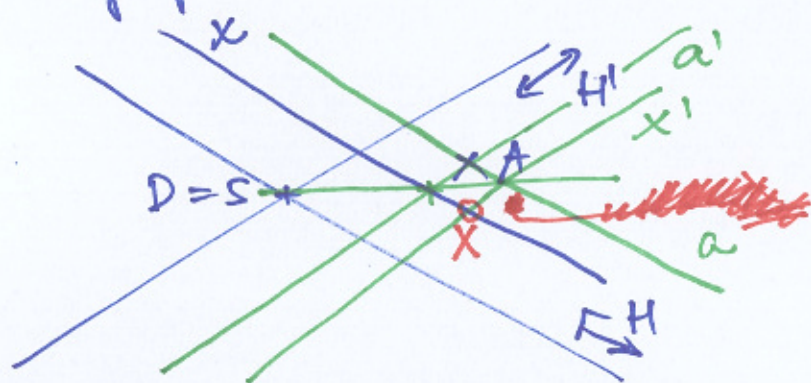
Označíme
 $H, H' = \text{nevl. body}$
(směry as.)



! Při tomto označení totiž
je $D=S$?

Asymptoty ~~H, H'~~ = DH, DH'

Konstrukce: sestavit hyperbolu
z asymptot a 1 bodu (A)



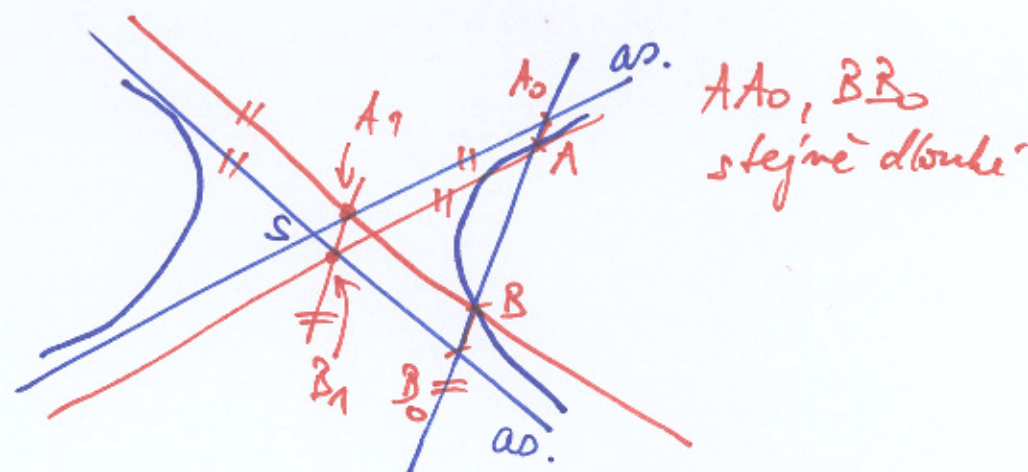
Pozn: toto je 5 podmínek
(3 body + 2 tečny)

A lude $D=S=as_1 \cap as_2$

Nalezení dalšího bodu hyperbol:
dáme x , $H \in x \rightarrow$ přes D najdu x' .

Pozn: Další body středových kříž
lze hledat středovou symetrií
(známe-li střed S).

Věta: hyperbola a její asymptoty
vytínají na libovolné secině
stejně dlouhé úsečky.



Dk: z předchozí konstrukce

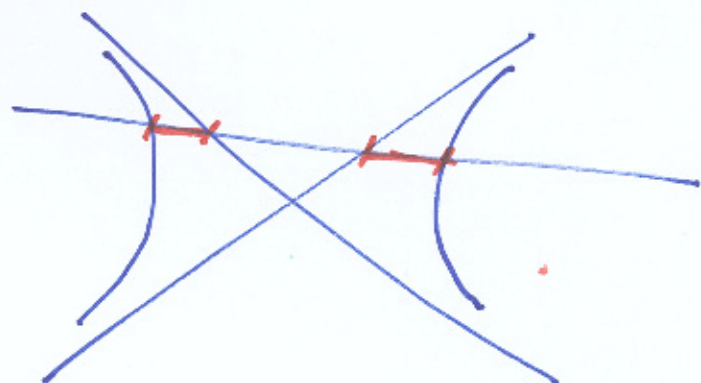
1. rombožníky AA_0, B_1A_1 stejně dlouhé
2. BB_0, B_1A_1 ————

□

Pozn: pojem "stejně dlouhé úsečky"
se vztahuje i na úsečky na
stejně přímce.

Upraxi: "délky" přeneseme
konstruktorem

Pozn: jiná poloha seciny:



Věta: Je-li c libov. tečna k hyperbole, C = její bod dotyku
body C, S doplníme na
romoběžník $CC_1SC_2 \rightarrow$
 C_1S, C_2S na asymptotách.
Pak $c \parallel C_1C_2$ a bod C
je střed A_0B_0

Dle: limitní případ předchozí
věty pro $A=B=C$.

