Matematická analýza pro fyziky IV

Robert Černý & Milan Pokorný

17. května 2020

Obsah

Kapitola 19

Fourierovy řady

V kapitole o stejnoměrné konvergenci jsme se při řešení rovnice vedení tepla

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && \text{na } (0,\pi)\times(0,T)\\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0 && \text{na } (0,T)\\
u(x,0) &= u_0(x) && \text{na } (0,\pi)
\end{aligned}$$

prostřednictvím Fourierovy metody separace proměnných dostali do situace, kdy jsme potřebovali zadanou funkci $u_0 \in C([0,\pi])$ reprezentující počáteční podmínku zapsat na intervalu $[0,\pi]$ ve tvaru

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

(kde $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných koeficientů). Tím jsme si ukázali, že uplatnění v matematice a fyzice nacházejí i jiné typy řad funkcí, než jsou jen mocninné řady. Zejména řady funkcí, jejichž členy jsou reálnými násobky funkcí $\sin(kx)$ a $\cos(kx)$, se využívají velice často. Je to způsobeno jednak tím, že prostřednictvím sinu a kosinu jsou reprezentovaná některá řešení obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu s konstantními koeficienty, a jednak skutečností, že právě funkce sinus a kosinus se přirozeně vyskytují v popisu periodických jevů, jako je třeba pohyb matematického kyvadla či kmity strun.

V této kapitole se budeme zabývat především rozkladem funkcí zadaných na intervalu $[-\pi,\pi]$ (případně 2π-periodických funkcí) do tvaru

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big)$$

(podivný člen $\frac{a_0}{2}$ je aditivní konstantou a vhodnost jejího zápisu v uvedeném tvaru si ujasníme níže). Budeme se také zabývat otázkou, jak souvisí lichost či sudost funkce s absencí kosinových či sinových členů v jejím rozkladu. Navíc je přirozené se ptát, jaké má mít funkce f vlastnosti, aby jí odpovídající řada konvergovala všude na $[-\pi, \pi]$ a součet řady se všude rovnal funkční hodnotě, případně aby řada konvergovala ve vhodném Lebesgueově prostoru k funkci f.

Budou nás zajímat i jiné periody než 2π. Dokonce si vybudujeme abstraktní teorii rozkladu do vhodné „báze“ uvažovaného prostoru funkcí. Vedlejším produktem budou nové metody sčítání číselných řad (konečně se naučíme sečíst $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$).

19.1 Úplné ortogonální systémy

Nejprve si připomeňme výsledek z lineární algebry, že je-li $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N\}$ ortonormální báze v $\mathbb{R}^N$ a $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$, pak platí

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^{N} (\mathbf{u}, \mathbf{v}_k)\mathbf{v}_k$$

(výraz $(\mathbf{u}, \mathbf{v}_k)$ zastupuje skalární součin prvků $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}_k$). V případě ortogonální báze máme (uvažujeme eukleidovskou normu)

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^{N} \Big(\mathbf{u}, \frac{\mathbf{v}_k}{\|\mathbf{v}_k\|}\Big) \frac{\mathbf{v}_k}{\|\mathbf{v}_k\|} = \sum_{k=1}^{N} \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_k)}{\|\mathbf{v}_k\|^2} \mathbf{v}_k =: \sum_{k=1}^{N} a_k \mathbf{v}_k.$$

Tento zápis se nyní pokusíme přenést do libovolného Hilbertova prostoru (úplný prostor se skalárním součinem). Protože nás budou zajímat především separabilní Hilbertovy prostory nekonečné dimenze (jejichž prvky jsou funkce), budeme v definici používat značení, při kterém má analogie ortogonální báze spočetný počet prvků (vztah separability a spočetnosti „báze“ si ujasníme později).

Definice 19.1.1 (Ortogonální systém, ortonormální systém, úplný systém)**.** Nechť H je Hilbertův prostor a $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ je systém jeho prvků. Řekneme, že $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *ortogonální systém*, jestliže obsahuje pouze netriviální prvky a platí

$$(\Phi_m, \Phi_n)_H = 0 \qquad \text{kdykoliv } m \neq n.$$

Řekneme, že $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *ortonormální systém*, jestliže je ortogonální a navíc

$$\|\Phi_n\|_H = 1 \qquad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Řekneme, že $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *úplný systém*, jestliže pro každé $\Phi \in H$ platí

$$(\Phi, \Phi_n)_H = 0 \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N} \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi = 0.$$

Příklad 19.1.2. Připomeňme si Hilbertův prostor

$$\ell_2 := \Big\{ \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} \colon \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty \Big\}$$

se skalárním součinem $(\{x_k\}_{k=1}^\infty, \{y_k\}_{k=1}^\infty)_{\ell_2} = \sum_{k=1}^\infty x_k y_k$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme prvek $\Phi_n \in \ell_2$ po složkách předpisem

$$(\Phi_n)_k = \delta_{kn} \qquad \text{pro } k \in \mathbb{N}.$$

Pak systém $\{\Phi_n\}_{n=1}^\infty$ je úplný ortonormální systém v ℓ_2.

Nejdůležitějším Hilbertovým prostorem pro nás bude prostor $L^2(\Omega)$. Na rozdíl od prostoru ℓ_2 se na prostoru $L^2(\Omega)$ nenabízí žádný přirozeně působící úplný ortogonální systém (dokonce ani není zřejmé, že takový systém existuje). V dalším si ukážeme, že takové systémy mohou být tvořeny řešeními vhodných tříd diferenciálních rovnic.

Teorii budeme budovat pro obecnější třídu prostorů, což je motivováno fyzikálními aplikacemi.

Definice 19.1.3 (Váhový prostor L^2)**.** Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $\varrho \in C(\Omega)$ je kladná na Ω. Pak definujeme *váhový prostor* $L^2_\varrho(\Omega)$ jako množinu tříd ekvivalence (vzhledem k rovnosti skoro všude) na množině

$$\Big\{f\colon \Omega \to \mathbb{R}\colon f \text{ je měřitelná a } \int_\Omega f^2 \varrho \,\mathrm{d}x < \infty\Big\}.$$

Dále zde definujeme

$$(f,g)_{L^2_\varrho(\Omega)} := \int_\Omega fg\varrho \,\mathrm{d}x.$$

Poznámka 19.1.4. (i) Klasický prostor $L^2(\Omega)$ je speciálním případem váhového prostoru $L^2_\varrho(\Omega)$ s vahou $\varrho \equiv 1$.
(ii) V dalším textu budeme některé jevy vztahovat k prostoru $L^2(\Omega)$ a jiné k prostoru $L^2_\varrho(\Omega)$. Abychom viditelně odlišili práci v těchto prostorech, normu a skalární součin v prostoru $L^2(\Omega)$ budeme značit $\|f\|_2$ a $(f,g)_2$, zatímco na prostoru $L^2_\varrho(\Omega)$ budeme psát jako v předchozí definici $\|f\|_{L^2_\varrho(\Omega)}$ a $(f,g)_{L^2_\varrho(\Omega)}$.
(iii) V případě váhových Lebesgueových prostorů komplexních funkcí se základní pojmy definují jako

$$L^2_\varrho(\Omega) := \Big\{f\colon \Omega \to \mathbb{C}\colon f \text{ je měřitelná a } \int_\Omega |f|^2 \varrho \,\mathrm{d}x < \infty\Big\}$$

a

$$(f,g)_{L^2_\varrho(\Omega)} := \int_\Omega f\overline{g}\varrho \,\mathrm{d}x.$$

Příklad 19.1.5. Volba váhy významným způsobem ovlivňuje podobu prostoru $L^2_\varrho(\Omega)$. Zvolíme-li například $\varrho(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, pak pro funkci $f \equiv 1$ platí $f \in L^2_\varrho(\mathbb{R})$ třebaže $f \notin L^2(\mathbb{R})$. Naopak pro $\varrho(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ a $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$ máme $f \notin L^2_\varrho(\mathbb{R})$, ale $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Na definici prostoru $L^2_\varrho(\Omega)$ je přirozené pohlížet prostřednictvím Věty o míře s hustotou (Věta 15.7.12), kde za hustotu považujeme funkci ϱ. Novou míru na chvíli nazývejme ν. Pak je předchozí definice jen variantou definice Lebesgueova prostoru, kde jsme Lebesgueovu míru nahradili obecnější mírou ν. Povšimněme si ještě, že pro každou lebesgueovsky měřitelnou množinu $E \subset \Omega$ díky Větě o vztahu nulovosti integrálu a nulovosti funkce (Věta 15.8.11) platí

$$\nu(E) = \int_E \varrho \, \mathrm{d}x = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda_N(E) = 0.$$

Proto jsou i pro prostor $L^2_\varrho(\Omega)$ ekvivalentní výroky $f = g$ skoro všude a $\|f - g\|_{L^2_\varrho(\Omega)} = 0$. Díky tomu se dá ověřit (kontrolou odpovídajících důkazů v kapitole o Lebesgueových prostorech), že $\|\cdot\|_{L^2_\varrho(\Omega)}$ je norma a pro nový prostor platí Hölderova nerovnost (Věta 16.2.1), Věta o konvergenci skoro všude a úplnosti Lebesgueových prostorů (Věta 16.3.3) a Věta o hustých množinách $L^p(\Omega)$ (Věta 16.4.3). Navíc operace $(\cdot,\cdot)_{L^2_\varrho(\Omega)}$ zadefinovaná na konci předchozí definice má vlastnosti skalárního součinu. Celkově jsme dostali následující výsledek.

Věta 19.1.6 (O váhovém prostoru L^2)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $\varrho \in C(\Omega)$ je kladná na Ω. Pak $L^2_\varrho(\Omega)$ je separabilní Hilbertův prostor, v němž jsou husté funkce z $\mathcal{D}(\Omega)$.*

Nyní se budeme zabývat konstrukcí úplných ortogonálních systémů na prostorech $L^2_\varrho(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}$. Občas se v literatuře postupuje tak, že nejprve uvážíme systém polynomů $\{1, x, x^2, \dots\}$ a ten postupně modifikujeme použitím Gram–Schmidtova ortogonalizačního procesu. My si zde představíme přístup, který v sobě skrývá analogii práce s vlastními čísly a vlastními vektory symetrických matic.

Definice 19.1.7 (Adjungovaný operátor)**.** Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina. Nechť $A, B \colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ jsou lineární operátory s definičními obory $D(A)$, $D(B) \subset L^2(\Omega)$. Jestliže

$$(A(y), z)_2 = (y, B(z))_2 \qquad \text{pro všechna } y \in D(A), z \in D(B),$$

řekneme, že operátor B je *adjungovaný* (nebo *sdružený*) k operátoru A a značíme jej A^*. Řekneme, že operátor A je *samoadjungovaný* (nebo *samosdružený*), jestliže $A = A^*$ (včetně rovnosti definičních oborů).

Definice 19.1.8 (Symetrický operátor)**.** Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina. Nechť $A \colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ je lineární operátor s definičním oborem $D(A) \subset L^2(\Omega)$. Jestliže

$$(A(y), z)_2 = (y, A(z))_2 \qquad \text{pro všechna } y, z \in D(A),$$

řekneme, že operátor A je *symetrický*. Pro případ komplexního Hilbertova prostoru se někdy symetrický operátor nazývá *hermiteovský*.

Příklad 19.1.9. (i) Adjungovaný operátor se dá definovat na libovolném Hilbertově prostoru H. Pokud je například $H = \mathbb{R}^N$ a $\mathbb{A}$ je matice o N řádcích a N sloupcích, pak zobrazení $\mathbf{y} \mapsto \mathbb{A}\mathbf{y}$ je lineární operátor. Jeho adjungovaný operátor je reprezentován transponovanou maticí $\mathbb{A}^\top$. Náš operátor je samoadjungovaný právě tehdy, když matice $\mathbb{A}$ je symetrická.

(ii) Je-li prostor $H = \mathbb{C}^N$ a $\mathbb{A}$ je opět matice o N řádcích a N sloupcích, pak je adjungovaný operátor reprezentován maticí $\overline{\mathbb{A}}^\top$, tedy matice je nejen transponovaná, ale její prvky jsou navíc komplexně sdružené, tedy reprezentuje-li matice $\mathbb{B}$ adjungovaný operátor k operátoru reprezentovaném maticí $\mathbb{A}$, pak platí $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$ pro všechna $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$.

Příklad 19.1.10. Nechť $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$. Uvažujme Hilbertův prostor $L^2((\alpha, \beta))$ a na něm operátor definovaný předpisem

$$A(y) := -(a(x)y')' + b(x)y,$$

kde $a \in C^1([\alpha, \beta])$ a $b \in C([\alpha, \beta])$. Definičním oborem operátoru A nemůže být celý prostor $L^2((\alpha, \beta))$ (problémy přináší už jen to, že prvky Lebesgueova prostoru nejsou skutečné funkce, ale třídy funkcí, které nemají jednoznačně zadané funkční hodnoty, a proto je nemůžeme ani derivovat; navíc kupříkladu ve třídě reprezentované funkcí $\chi_{(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2})}$ neleží žádná funkce, která by měla vlastní derivaci v bodě $\frac{\alpha+\beta}{2}$). Můžeme však přejít k množině $C^2([\alpha, \beta]) \subset L^2((\alpha, \beta))$ (každá funkce z $C([\alpha, \beta])$ je omezená, což implikuje integrovatelnost její druhé mocniny; omezili jsme se na lebesgueovské třídy obsahující C^2-reprezentanta, operátor A nám z uvedeného reprezentanta vyrobí funkci z $C([\alpha, \beta])$, která je reprezentantem jisté třídy v $L^2((\alpha, \beta))$ a tuto třídu chápeme jako obraz třídy, se kterou jsme proces začínali).

Pokud nás nyní bude zajímat symetrie (či dokonce samoadjungovanost) našeho operátoru na $C^2([\alpha, \beta])$, potřebujeme si spočítat (dvakrát integrujeme per partes)

$$\begin{aligned}
(A(y), z) &= \int_\alpha^\beta \Big(-(a(x)y')'z + b(x)yz \Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\alpha^\beta \Big(a(x)y'z' + b(x)yz \Big)\,\mathrm{d}x - [a(x)y'z]_\alpha^\beta \\
&= \int_\alpha^\beta \Big(-(a(x)z')'y + b(x)yz \Big)\,\mathrm{d}x - [a(x)y'z - a(x)yz']_\alpha^\beta \\
&= (y, A(z)) - [a(x)y'z - a(x)yz']_\alpha^\beta.
\end{aligned}$$

Symetrie operátoru A bude proto zaručena, pokud
(a) uvažujeme definiční obor

$$D(A) := \{y \in C^2([\alpha, \beta]) \colon y(\alpha) = y(\beta) = 0\}.$$

To ale není jediná možnost. Protože se nám to bude v následujícím hodit, uvědomme si, že symetrie operátoru A bude zaručena i v následujících případech:
(b) definiční obor

$$D(A) := \{y \in C^2([\alpha, \beta]) \colon y'(\alpha) = y'(\beta) = 0\}$$

(c) pokud $a(\alpha) = a(\beta)$, lze brát za definiční obor

$$D(A) := \{y \in C^2([\alpha, \beta]) \colon y(\alpha) = y(\beta), y'(\alpha) = y'(\beta)\}$$

(d) pokud $a(\alpha) = a(\beta) = 0$, lze brát za definiční obor

$$D(A) := C^2([\alpha, \beta]).$$

Případně lze uvažovat i různé kombinace výše uvedených podmínek.

Definice 19.1.11 (Vlastní číslo a vlastní funkce)**.** Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina, $\varrho \in C(\Omega)$ je kladná funkce, A je lineární operátor z $D(A) \subset L^2_\varrho(\Omega)$ do $L^2_\varrho(\Omega)$, $y \in D(A)$ je netriviální funkce a $\lambda \in \mathbb{R}$. Jestliže platí

$$A(y) = \lambda \varrho y,$$

pak se číslo λ nazývá *vlastní číslo* s vahou ϱ operátoru A a funkce y se nazývá *vlastní funkce* příslušející vlastnímu číslu λ.

Následující výsledek je základním kamenem konstrukce ortogonálních systémů na $L^2_\varrho(\Omega)$.

Věta 19.1.12 (O vlastních číslech a vlastních funkcích symetrického operátoru)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina, $\varrho \in C(\Omega)$ je kladná funkce a A je lineární operátor z $D(A) \subset L^2_\varrho(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ do $L^2_\varrho(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, který je navíc symetrický. Pak vlastní funkce odpovídající různým vlastním číslům jsou vzájemně ortogonální v $L^2_\varrho(\Omega)$.*

Důkaz. Nechť $\lambda_1 \neq \lambda_2$ jsou vlastní čísla operátoru A a y_1 je vlastní funkce odpovídající vlastnímu číslu λ_1 a y_2 je vlastní funkce odpovídající vlastnímu číslu λ_2. Pak máme (v předposledním kroku využíváme symetrii A)

$$\begin{aligned}
(\lambda_1 - \lambda_2)(y_1, y_2)_{L^2_\varrho(\Omega)} &= \lambda_1 (y_1, y_2)_{L^2_\varrho(\Omega)} - \lambda_2 (y_1, y_2)_{L^2_\varrho(\Omega)} \\
&= (\lambda_1 y_1, y_2)_{L^2_\varrho(\Omega)} - (y_1, \lambda_2 y_2)_{L^2_\varrho(\Omega)} \\
&= \int_\Omega \lambda_1 y_1 y_2 \varrho \, \mathrm{d}x - \int_\Omega y_1 \lambda_2 y_2 \varrho \, \mathrm{d}x \\
&= (A(y_1), y_2)_2 - (y_1, A(y_2))_2 \\
&= (A(y_1), y_2)_2 - (A(y_1), y_2)_2 = 0.
\end{aligned}$$

□

Poznámka 19.1.13. V případě komplexního prostoru $L^2_\varrho(\Omega)$ lze předchozí větu rozšířit o tvrzení, že všechna vlastní čísla odpovídající symetrickému (tj. hermiteovskému) operátoru jsou reálná. Máme totiž

$$\begin{aligned}
\lambda \int_\Omega |y|^2 \varrho \, \mathrm{d}x &= \int_\Omega \lambda y \overline{y} \varrho \, \mathrm{d}x = (A(y), y)_2 = (y, A(y))_2 \\
&= \int_\Omega y \overline{\lambda \varrho y} \, \mathrm{d}x = \int_\Omega y \overline{\lambda} \varrho \overline{y} \, \mathrm{d}x = \overline{\lambda} \int_\Omega |y|^2 \varrho \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Poznámka 19.1.14. Každému vlastnímu číslu je přiřazeno nekonečné mnoho vlastních funkcí. To je především způsobeno tím, že díky linearitě operátoru A je libovolný reálný násobek vlastní funkce také vlastní funkcí. V aplikacích uvedených níže navíc uvidíme, že mohou nastat i situace, kdy je jednomu vlastnímu číslu přiřazen dvoudimenzionální podprostor vlastních funkcí.

V aplikacích nás budou zajímat již zmíněné operátory typu $A(y) = -(a(x)y')' + b(x)y$. Při vhodných okrajových podmínkách budou mít ještě následující dvě vlastnosti.
(i) Vlastní čísla operátoru A jsou nezáporná, je jich spočetně mnoho a seřadíme-li je do rostoucí posloupnosti, pak má tato posloupnost limitu rovnou nekonečnu.
(ii) Normalizované vlastní funkce (odpovídající jednotlivým vlastním číslům, přičemž každému číslu přiřadíme takové z nich, aby jejich počet odpovídal dimenzi podprostoru vlastních funkcí a současně tento prostor generovaly) tvoří úplný ortogonální systém.

Důkazy těchto vlastností v konkrétních případech založíme na hustotě funkcí z $\mathcal{D}((\alpha,\beta))$ (nekonečněkrát spojitě diferencovatelné funkce s kompaktním nosičem obsaženým v (α,β)) v $L^2_\varrho(\Omega)$ a na Weierstrassově aproximační větě (o hustotě polynomů v $C([\alpha,\beta])$, tedy Větě 11.5.2). Tento přístup však vyžaduje omezenost intervalu (α,β).

Připomeňme, že symetrii operátoru A ověřujeme v prostoru $L^2((\alpha,\beta))$ zatímco ortogonalitu vlastních funkcí a velikost jejich normy vztahujeme k prostoru $L^2_\varrho((\alpha,\beta))$.

Příklad 19.1.15. (i) Uvažujme prostor $L^2((0,l))$ s pevným $l > 0$ a operátor $A(y) = -y''$ na

$$D(A) = \{y \in C^2([0,l])\colon y(0) = y(l), y'(0) = y'(l)\}.$$

Symetrie našeho operátoru plyne přímo z případu (c) v Příkladu 19.1.10. Případná vlastní čísla operátoru A splňují rovnici $-y'' = \lambda y$, neboli $y'' + \lambda y = 0$. Nejprve se zabývejme případem $\lambda = 0$. Zde má řešení tvar $y = c_1 x + c_2$ a v $D(A)$ leží pouze tehdy, když $c_1 = 0$.

Zabývejme se dále případem $\lambda < 0$. Zde máme řešení ve tvaru $y = c_1 \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}x} + c_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}x}$. Tentokrát okrajové podmínky z definice $D(A)$ požadují

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= c_1 \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}l} + c_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}l} \\ c_1 - c_2 &= c_1 \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}l} - c_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}l}. \end{aligned}$$

Odtud dostáváme $c_1 = c_2 = 0$, neboli $y \equiv 0$. Proto žádné $\lambda < 0$ není vlastním číslem operátoru A.

Konečně, pro $\lambda > 0$ máme řešení tvaru $y = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$. Okrajové podmínky dávají

$$\begin{aligned} c_1 &= c_1 \cos(\sqrt{\lambda}l) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}l) \\ c_2 &= -c_1 \sin(\sqrt{\lambda}l) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}l). \end{aligned}$$

Pokud $c_1 = 0$ (pak musí být $c_2 \neq 0$, aby řešení bylo netriviální), první rovnice dává $\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0$. Pokud $c_2 = 0$, druhá rovnice dává $\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0$. Pokud jsou oba koeficienty nenulové, první rovnici vynásobíme číslem $\frac{1}{c_1}$, druhou číslem $\frac{1}{c_2}$, získané rovnice od sebe odečteme a dostáváme opět $\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0$. Díky této informaci z výše uvedených rovnic ještě snadno získáváme $\cos(\sqrt{\lambda}l) = 1$. Nutnou podmínkou pro splnění okrajových podmínek je proto $\lambda = \left(\frac{2n\pi}{l}\right)^2$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Snadno se ověří, že se zároveň jedná i o podmínku postačující.

Zatím jsme zjistili, že vlastní čísla operátoru A tvoří posloupnost

$$\left\{0, \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2, \left(2\frac{2\pi}{l}\right)^2, \left(3\frac{2\pi}{l}\right)^2, \dots\right\} = \left\{\left(\frac{2n\pi}{l}\right)^2\right\}_{n=0}^{\infty}.$$

Nultému vlastnímu číslu odpovídají vlastní funkce tvaru $y \equiv c_2$. Protože

$$\|1\|_2^2 = \int_0^l 1 \,\mathrm{d}x = l,$$

normalizací dostáváme funkci $y \equiv \frac{1}{\sqrt{l}}$. Pro n-té vlastní číslo $\left(\frac{2n\pi}{l}\right)^2$ máme odpovídající vlastní funkci tvaru

$$y = c_1 \cos\Big(\frac{2n\pi}{l}x\Big) + c_2 \sin\Big(\frac{2n\pi}{l}x\Big).$$

Povšimněme si, že platí

$$\begin{aligned}\left\|\cos\Big(\frac{2n\pi}{l}x\Big)\right\|_2^2 &= \int_0^l \cos^2\Big(\frac{2n\pi}{l}x\Big)\,\mathrm{d}x = \frac{l}{2}\\ &= \int_0^l \sin^2\Big(\frac{2n\pi}{l}x\Big)\,\mathrm{d}x = \left\|\sin\Big(\frac{2n\pi}{l}x\Big)\right\|_2^2\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\left(\cos\Big(\frac{2n\pi}{l}x\Big), \sin\Big(\frac{2n\pi}{l}x\Big)\right) &= \int_0^l \cos\Big(\frac{2n\pi}{l}x\Big)\sin\Big(\frac{2n\pi}{l}x\Big)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^l \frac{1}{2}\sin\Big(\frac{4n\pi}{l}x\Big)\,\mathrm{d}x = 0.\end{aligned}$$

Podle posledního výpočtu jsou funkce $\cos(\frac{2n\pi}{l}x)$ a $\sin(\frac{2n\pi}{l}x)$ ortogonální. Podle Věty o vlastních číslech a vlastních funkcích symetrického operátoru (Věta 19.1.12) jsou pro $n \neq m$ ortogonální také funkce

$$c_1 \cos\Big(\frac{2n\pi}{l}x\Big) + c_2 \sin\Big(\frac{2n\pi}{l}x\Big) \qquad \text{a} \qquad c_3 \cos\Big(\frac{2m\pi}{l}x\Big) + c_4 \sin\Big(\frac{2m\pi}{l}x\Big)$$

a funkce

$$c_1 \cos\Big(\frac{2n\pi}{l}x\Big) + c_2 \sin\Big(\frac{2n\pi}{l}x\Big) \qquad \text{a} \qquad \text{konstantní funkce.}$$

Odtud je $\cos(\frac{2n\pi}{l})$ ortogonální k funkcím 1, $\sin(\frac{2n\pi}{l})x$, $\cos(\frac{2m\pi}{l}x)$ a $\sin(\frac{2n\pi}{l}x)$. Podobně pro funkci $\sin(\frac{2n\pi}{l}x)$. Celkově jsme dostali, že

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{l}}, \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\Big(\frac{2\pi}{l}x\Big), \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\Big(\frac{2\pi}{l}x\Big), \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\Big(\frac{4\pi}{l}x\Big), \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\Big(\frac{4\pi}{l}x\Big), \dots\right\}$$

je ortonormální systém v $L^2((0,l))$. Úplnost tohoto systému ověříme později v kapitole, která bude přímo tomuto systému věnována.

(ii) Uvažujme prostor $L^2((0,l))$ a operátor $A(y) = -y''$ na

$$D(A) = \{y \in C^2([0,l]) \colon y(0) = y(l) = 0\}.$$

Symetrii operátoru A zde plyne z případu (a) v Příkladu 19.1.10. Při hledání ortogonálního systému opět řešíme diferenciální rovnici $y''+\lambda y = 0$ a postupujeme velmi podobně jako výše. Dojde však ke dvěma změnám. Jednak okrajové podmíky vyloučí případ $\lambda = 0$ (máme jen triviální řešení a to jako vlastní funkce není přípustné) a pro $\lambda > 0$ dostáváme podmínku

$$c_1 = c_1 \cos(\sqrt{\lambda} l) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda} l) = 0.$$

To je ekvivalentní podmínkám $c_1 = 0$ a $\sin(\sqrt{\lambda} l) = 0$. Druhá z uvedených podmínek znamená, že $\lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$. Dostáváme proto ortonormální systém

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{l}} \sin\Big(\frac{n\pi}{l} x\Big)\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Příklad 19.1.16 (Hermiteovy polynomy)**.** Uvažujme váhový prostor $L^2_{\varrho}(\mathbb{R})$ s vahou $\varrho(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ a operátor $A(y) = -(\mathrm{e}^{-x^2} y')'$ na

$$D(A) = \{y \in C^2(\mathbb{R}) \colon y, y' \text{ mají nejvýše polynomiální růst na okolí nekonečna}\}.$$

Symetrie operátoru A je vidět z výpočtu

$$\begin{aligned}
(A(y), z)_2 &= \int_{\mathbb{R}} A(y) z \,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}} (\mathrm{e}^{-x^2} y')' z \,\mathrm{d}x = -[y' z \mathrm{e}^{-x^2}]_{-\infty}^{\infty} + \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2} y' z' \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2} y' z' \,\mathrm{d}x = [y z' \mathrm{e}^{-x^2}]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} y (\mathrm{e}^{-x^2} z')' \,\mathrm{d}x \ = \int_{\mathbb{R}} y A(z) \,\mathrm{d}x \\
&= (y, A(z))_2.
\end{aligned}$$

Dále tvrdíme, že posloupnost $\{2n\}_{n=0}^{\infty}$ je tvořena vlastními čísly operátoru A a funkce

$$H_n(x) := (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} (\mathrm{e}^{-x^2})^{(n)}$$

jsou jim odpovídající vlastní funkce. Díky Leibnizovu pravidlu totiž máme

$$(\mathrm{e}^{-x^2})^{(n+2)} = (-2x\mathrm{e}^{-x^2})^{(n+1)} = -2x(\mathrm{e}^{-x^2})^{(n+1)} - 2(n+1)(\mathrm{e}^{-x^2})^{(n)},$$

a proto

$$\begin{aligned}
A(H_n)(x) &= -(H_n'(x)\mathrm{e}^{-x^2})' \\
&= (-1)^{n+1}\Big(\Big(2x\mathrm{e}^{x^2}(\mathrm{e}^{-x^2})^{(n)} + \mathrm{e}^{x^2}(\mathrm{e}^{-x^2})^{(n+1)}\Big)\mathrm{e}^{-x^2}\Big)' \\
&= (-1)^{n+1}\Big(2x(\mathrm{e}^{-x^2})^{(n)} + (\mathrm{e}^{-x^2})^{(n+1)}\Big)' \\
&= (-1)^{n+1}\Big(2(\mathrm{e}^{-x^2})^{(n)} + 2x(\mathrm{e}^{-x^2})^{(n+1)} + (\mathrm{e}^{-x^2})^{(n+2)}\Big) \\
&= (-1)^{n+2} 2n (\mathrm{e}^{-x^2})^{(n)} \\
&= 2n\varrho(x) H_n(x).
\end{aligned}$$

Podle Věty o vlastních číslech a vlastních funkcích symetrického operátoru (Věta 19.1.12) je $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ ortogonální systém v $L^2_\varrho(\mathbb{R})$. Snadno se nahlédne, že každá funkce H_n je polynom stupně n, přičemž u n-té mocniny má nenulový koeficient. Tyto funkce se nazývají *Hermiteovy polynomy.*

Je známo, že Hermiteovy polynomy tvoří úplný ortogonální systém (důkaz vyžaduje techniky, jimiž dosud nejsme vybaveni). To má za následek, že výše uvedená posloupnost vlastních čísel operátoru A obsahuje všechna jeho vlastní čísla (pokud by existovalo ještě další vlastní číslo, odpovídala by mu netriviální vlastní funkce ortogonální ke všem Hermiteovým polynomům, což by bylo ve sporu s jejich úplností).

Příklad 19.1.17 (Legendreovy polynomy)**.** Uvažujme prostor $L^2((-1,1))$ a operátor $A(y) = -((1-x^2)y')'$ na

$$D(A) = C^2([-1,1]).$$

Ověření symetrie operátoru A je opět snadné cvičení na integraci per partes, respektive plyne z bodu (d) Příkladu 19.1.10. Ukažme, že posloupnost $\{n(n+1)\}_{n=0}^{\infty}$ je tvořena vlastními čísly operátoru A a funkce

$$L_n(x) := \frac{1}{2^n n!}((x^2-1)^n)^{(n)}$$

jsou jim odpovídající vlastní funkce. Nejprve si povšimněme, že platí

$$(x^2-1)((x^2-1)^n)' = 2nx(x^2-1)^n.$$

Tuto rovnost $(n+1)$-krát zderivujeme s využitím Leibnizova pravidla

$$\begin{aligned}(x^2-1)((x^2-1)^n)^{(n+2)} + 2(n+1)x((x^2-1)^n)^{(n+1)} + (n+1)n((x^2-1)^n)^{(n)}\\ = 2nx((x^2-1)^n)^{(n+1)} + 2n(n+1)((x^2-1)^n)^{(n)}.\end{aligned}$$

Získaná rovnost se dá zjednodušit na

$$(x^2-1)((x^2-1)^n)^{(n+2)} + 2x((x^2-1)^n)^{(n+1)} = n(n+1)((x^2-1)^n)^{(n)}.$$

Díky tomu máme

$$\begin{aligned}A(L_n)(x) &= -((1-x^2)L_n'(x))'\\ &= \frac{1}{2^n n!}\Big((x^2-1)((x^2-1)^n)^{(n+1)}\Big)'\\ &= \frac{1}{2^n n!}\Big(2x((x^2-1)^n)^{(n+1)} + (x^2-1)((x^2-1)^n)^{(n+2)}\Big)\\ &= \frac{1}{2^n n!}n(n+1)((x^2-1)^n)^{(n)}\\ &= n(n+1)L_n(x).\end{aligned}$$

Podle Věty o vlastních číslech a vlastních funkcích symetrického operátoru (Věta 19.1.12) je $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ ortogonální systém v $L^2((-1,1))$. Každá funkce L_n je zřejmě polynom stupně n, přičemž u n-té mocniny má nenulový koeficient. Tyto polynomy se nazývají *Legendreovy polynomy.*

Zabývejme se ještě úplností uvedeného systému v $L^2((-1,1))$. Nechť funkce $u \in L^2((-1,1))$ je ortogonální ke všem funkcím L_n. Zvolme $\varepsilon > 0$. Díky hustotě $\mathcal{D}((-1,1))$ v $L^2((-1,1))$ existuje funkce $v \in \mathcal{D}((-1,1))$ taková, že $\|u - v\|_{L^2((-1,1))} < \varepsilon$. Na množině $[-1,1]$ použijme Weierstrassovu aproximační větu (Věta 11.5.2) a získejme tak polynom P pro který platí $\max_{[-1,1]} |v - P| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Stupeň polynomu P označme m. Dále si povšimněme, že

$$\|v - P\|_2^2 = \int_{-1}^{1} |v - P|^2 \, \mathrm{d}x < \int_{-1}^{1} \frac{\varepsilon^2}{2} \, \mathrm{d}x = \varepsilon^2.$$

Celkově proto máme $\|u-P\|_2 < 2\varepsilon$. Navíc existují reálné koeficienty $a_0, a_1, \dots, a_m$ takové, že

$$P = \sum_{n=0}^{m} a_n L_n,$$

a proto u je ortogonální k P. Z dosavadních výsledků a Hölderovy rovnosti dostáváme

$$\|u\|_2^2 = (u,u)_2 = (P,u)_2 + (u-P,u)_2 = (u-P,u)_2 \le \|u-P\|_2\|u\|_2 \le 2\varepsilon\|u\|_2.$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, dostáváme $\|u\|_2 = 0$ a úplnost systému je tím dokázána. Jako vedlejší produkt také zjišťujeme, že posloupnost $\{n(n+1)\}_{n=0}^{\infty}$ obsahuje všechna vlastní čísla operátoru A.

Příklad 19.1.18 (Čebyševovy polynomy)**.** Uvažujme prostor $L^2_\varrho((-1,1))$ s vahou $\varrho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ a operátor $A(y) = -(\sqrt{1-x^2}y')'$ na

$$D(A) = C^2([-1,1]).$$

Ověření symetrie operátoru A je opět snadné cvičení na integraci per partes. Zderivováním se dá jednoduše ověřit, že posloupnost $\{n^2\}_{n=0}^{\infty}$ je tvořena vlastními čísly operátoru A a funkce

$$T_n(x) := \cos(n \arccos x)$$

jsou jim odpovídající vlastní funkce. Podle Věty o vlastních číslech a vlastních funkcích symetrického operátoru (Věta 19.1.12) je $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ ortogonální systém v $L^2_\varrho((-1,1))$. Funkce T_n se nazývají *Čebyševovy polynomy.* Že se skutečně jedná o polynomy se dá zjistit indukcí ze součtového vzorce $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$, neboť máme

$$\begin{aligned}
T_0(\cos t) &= \cos 0 = 1\\
T_1(\cos t) &= \cos t\\
T_2(\cos t) &= \cos(2t) = 2\cos t\cos t - \cos(0t)\\
T_3(\cos t) &= \cos(3t) = 2\cos(2t)\cos t - \cos t
\end{aligned}$$

a obecně pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

$$T_n(\cos t) = \cos(nt) = 2\cos((n-1)t)\cos t - \cos((n-2)t).$$

Zároveň odtud také vidíme, že každý polynom T_n má stupeň n a nenulový koeficient u nejvyšší mocniny.

Zabývejme se ještě úplností uvedeného systému v $L^2_\varrho((-1,1))$. Nechť funkce $u \in L^2_\varrho((-1,1))$ je ortogonální ke všem funkcím T_n. Zvolme $\varepsilon > 0$. Díky hustotě $\mathcal{D}((-1,1))$ v $L^2_\varrho((-1,1))$ existuje funkce $v \in \mathcal{D}((-1,1))$ taková, že $\|u - v\|_{L^2_\varrho((-1,1))} < \varepsilon$. Na množině $[-1,1]$ použijme Weierstrassovu aproximační větu (Věta 11.5.2) a získejme tak polynom P pro který platí $\max_{[-1,1]} |v - P| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}$. Stupeň polynomu P označme m. Dále si povšimněme, že

$$\|v - P\|^2_{L^2_\varrho((-1,1))} = \int_{-1}^1 |v-P|^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon^2}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \varepsilon^2.$$

Celkově proto máme $\|u - P\|_{L^2_\varrho((-1,1))} < 2\varepsilon$. Navíc existují reálné koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_m$ takové, že

$$P = \sum_{n=0}^m a_n T_n,$$

a proto u je ortogonální k P. Z dosavadních výsledků a Hölderovy nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{L^2_\varrho((-1,1))} &= (u,u)_2 = (P,u)_{L^2_\varrho((-1,1))} + (u-P,u)_{L^2_\varrho((-1,1))} \\
&= (u-P,u)_{L^2_\varrho((-1,1))} \leq \|u-P\|_{L^2_\varrho((-1,1))}\|u\|_{L^2_\varrho((-1,1))} \\
&\leq 2\varepsilon\|u\|_{L^2_\varrho((-1,1))}.
\end{aligned}$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, dostáváme $\|u\|_{L^2_\varrho((-1,1))} = 0$ a úplnost systému je tím dokázána. Úplnost má opět za následek, že ve výše uvedené posloupnosti vlastních čísel žádné vlastní číslo nechybí.

Příklad 19.1.19 (Laguerreovy polynomy)**.** Uvažujme prostor $L^2_\varrho((0,\infty))$ s vahou $\varrho(x) = \mathrm{e}^{-x}$ a operátor $A(y) = -(x\mathrm{e}^{-x}y')'$ na

$$\begin{aligned}
D(A) = \{y \in C^2((0,\infty))\colon y, y' &\text{ jsou omezené v počátku} \\
&\text{a mají nejvýše polynomiální růst na okolí nekonečna}\}.
\end{aligned}$$

Ověření symetrie operátoru A je opět snadné cvičení na integraci per partes. Ukažme, že posloupnost $\{n\}_{n=0}^\infty$ je tvořena vlastními čísly operátoru A a funkce

$$L_n(x) := (-1)^n \mathrm{e}^x (x^n \mathrm{e}^{-x})^{(n)}$$

jsou jim odpovídající vlastní funkce.

$$
\begin{aligned}
&A(L_n)(x)\\
&\quad= -(x\mathrm{e}^{-x}L_n'(x))' = (-1)^{n+1}\Big(x(x^n\mathrm{e}^{-x})^{(n)} + x(x^n\mathrm{e}^{-x})^{(n)}\Big)'\\
&\quad= (-1)^{n+1}\Big(x\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(n+k)!}{k!}\frac{x^k}{k!} + x\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(n+k)!}{(k-1)!}\frac{x^{k-1}}{k!}\Big)'\\
&\quad= (-1)^{n+1}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(n+k)!}{k!}\frac{x^{k+1}}{k!} + \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{(n+m+1)!}{m!}\frac{x^{m+1}}{(m+1)!}\Big)'\\
&\quad= (-1)^{n+1}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\Big(1-\frac{n+k+1}{k+1}\Big)\frac{(n+k)!}{k!}\frac{x^{k+1}}{k!}\Big)'\\
&\quad= (-1)^n n\Big(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(n+k)!}{k!}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\Big)' = (-1)^n n\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(n+k)!}{k!}\frac{x^k}{k!}\\
&\quad= (-1)^n n(x^n\mathrm{e}^{-x})^{(n)} = n\mathrm{e}^{-x}L_n(x).
\end{aligned}
$$

Podle Věty o vlastních číslech a vlastních funkcích příslušejících symetrickému operátoru (Věta 19.1.12) je $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ ortogonální systém v $L^2_{\varrho}((0,\infty))$. Snadno se nahlédne, že funkce L_n jsou polynomy, přičemž každá funkce L_n je polynom n-tého řádu s nenulovým koeficientem u nejvyšší mocniny. Nazývají se *Laguerreovy polynomy*. Důkaz úplnosti tohoto systému v $L^2_{\varrho}((0,\infty))$ je opět (vzhledem k neomezenosti intervalu) velmi obtížný. Úplnost má opět za následek, že ve výše uvedné posloupnosti vlastních čísel žádné vlastní číslo nechybí.

Poznámka 19.1.20. Pozornému čtenáři jistě neuniklo, že jsme se nezabývali konstrukcí úplného ortogonálního systému na $L^2(\Omega)$ třeba pro omezenou otevřenou množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, kde $N \geq 2$. Důvodem je to, že pro dimenzi $N \geq 2$ nebude látka těchto skript obsahovat žádné aplikace. Na druhou stranu hlubší teorie parciálních diferenciálních rovnic i takový výsledek požaduje a zmíněný systém lze získat prostřednictvím vlastních funkcí Laplaceova operátoru s nulovou okrajovou podmínkou. Tedy jako řešení úlohy

$$-\Delta u = \lambda u \text{ v } \Omega, \qquad u = 0 \text{ na } \partial\Omega.$$

Vybudování potřebné teorie je poměrně pracné, nicméně bývá běžnou součástí knih věnovaným úvodu do teorie parciálních diferenciálních rovnic.

19.2 Abstraktní Fourierovy řady

Nechť v dalším H je Hilbertův prostor a $\{\Phi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ je ortonormální systém. Nechť $f \in H$ a $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$. Položme

$$t_n := \sum_{k=1}^{n} a_k\Phi_k.$$

Bude nás zajímat, s jakou přesností aproximují prvky t_n prvek f a hlavně zda platí $t_n \to f$ v H (neboli $\|t_n - f\|_H \to 0$, kde $\|g\|_H = (g,g)_H^{\frac{1}{2}}$ a $(f,g)_H$ označuje skalární součin na Hilbertově prostoru H).

Nejprve si povšimněme, že situace je jasná, pokud existují $m \in \mathbb{N}$ a $\{c_k\}_{k=1}^m \subset \mathbb{R}$ tak, že $f = \sum_{k=1}^m c_k \Phi_k$. Pak jednak máme $c_k = (f, \Phi_k)_H$ pro všechna $k \in \{1, \dots, m\}$, neboť

$$(f, \Phi_k)_H = \Big(\sum_{j=1}^m c_j \Phi_j, \Phi_k\Big)_H = \sum_{j=1}^m c_j (\Phi_j, \Phi_k)_H = \sum_{j=1}^m c_j \delta_{jk} = c_k$$

a navíc pro všechna $n \in \{1, \dots, m\}$ platí

$$\begin{aligned}
\|f - t_n\|_H^2 &= (f - t_n, f - t_n)_H \\
&= \Big(\sum_{j=1}^n (c_j - a_j)\Phi_j + \sum_{j=n+1}^m c_j \Phi_j, \sum_{j=1}^n (c_j - a_j)\Phi_j + \sum_{j=n+1}^m c_j \Phi_j\Big)_H \\
&= \sum_{j=1}^n (c_j - a_j)^2 + \sum_{j=n+1}^m c_j^2.
\end{aligned}$$

Zde vidíme, že nejlepší aproximaci dostaneme, pokud $a_k = c_k$ pro všechna $k \in \{1, \dots, n\}$.

Podobný výsledek platí i pro obecné $f \in H$.

Věta 19.2.1 (O nejlepší aproximaci)**.** *Nechť H je Hilbertův prostor, $\{\Phi_k\}_{k=1}^\infty \subset H$ je ortonormální systém, $f \in H$, $\{c_k\}_{k=1}^\infty := \{(f, \Phi_k)_H\}_{k=1}^\infty$ a $\{a_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}$. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ položme $s_n := \sum_{k=1}^n c_k \Phi_k$ a $t_n := \sum_{k=1}^n a_k \Phi_k$. Pak*
(i) *$\|f - s_n\|_H \le \|f - t_n\|_H$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$*
(ii) *pro pevné $n \in \mathbb{N}$ platí $\|f - s_n\|_H = \|f - t_n\|_H$ právě tehdy, když $a_k = c_k$ pro všechna $k \in \{1, \dots, n\}$*
(iii) *pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\|f - s_n\|_H = \|f - t_n\|_H$ právě tehdy, když $a_k = c_k$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$.*

Důkaz. Všechny výsledky plynou z rovnosti

$$\begin{aligned}
\|f - t_n\|_H^2 &= \Big(f - \sum_{k=1}^n a_k \Phi_k, f - \sum_{k=1}^n a_k \Phi_k\Big)_H \\
&= (f,f)_H - 2\Big(f, \sum_{k=1}^n a_k \Phi_k\Big)_H + \Big(\sum_{k=1}^n a_k \Phi_k, \sum_{k=1}^n a_k \Phi_k\Big)_H \\
&= \|f\|_H^2 - 2\sum_{k=1}^n a_k (f, \Phi_k)_H + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_k a_j (\Phi_k, \Phi_j)_H \\
&= \|f\|_H^2 - 2\sum_{k=1}^n a_k c_k + \sum_{k=1}^n a_k^2 \\
&= \|f\|_H^2 + \sum_{k=1}^n (a_k - c_k)^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2.
\end{aligned}$$

□

Definice 19.2.2 (Fourierova řada prvku)**.** Nechť H je Hilbertův prostor, nechť $\{\Phi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ je ortonormální systém, $f \in H$ a $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} := \{(f, \Phi_k)_H\}_{k=1}^{\infty}$. Pak řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_k$$

nazýváme *Fourierovou řadou* prvku f. Číslo c_k se nazývá k-tým Fourierovým koeficientem prvku f.

Poznámka 19.2.3. Zatím nevíme, zda má řada $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_k$ nějaký součet v H, či čemu se případný součet rovná. Proto jsme oprávněni psát

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_k$$

jen ve speciálních situacích, které jsme zmínili před Větou o nejlepší aproximaci (Věta 19.2.1). Často však budeme potřebovat stručně popsat skutečnost, že uvažovaná Fourierova řada přísluší k nějakému prvku f (byla z něj zkonstruována jako v předchozí definici). Tehdy budeme psát

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_k.$$

Příklad 19.2.4. Na prostoru $L^2((0, 2\pi))$ jsme si zkonstruovali ortonormální systém

$$\Big\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(2x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(2x), \dots \Big\}.$$

Každému prvku $f \in L^2((0, 2\pi))$ pak odpovídá Fourierova řada (jednotlivé sčítance indexujeme poněkud nestandardně, nicméně poměrně přirozeně vzhledem k tvaru výše uvedeného ortonormálního systému)

$$f \sim \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{\alpha_k}{\sqrt{\pi}} \cos(kx) + \frac{\beta_k}{\sqrt{\pi}} \sin(kx) \Big),$$

kde

$$\gamma := \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \,\mathrm{d}x, \quad \alpha_k := \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx) \,\mathrm{d}x$$
$$\text{a} \quad \beta_k := \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx) \,\mathrm{d}x.$$

Pokud multiplikativní konstantu $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ přesuneme ze zápisu řady do definice koeficientů a ještě si uvědomíme, že $1 = \cos(0x)$, dostáváme příjemnější zápis (už se nejedná o vyjádření vzhledem k ortonormálnímu systému ale pouze ortogonálnímu systému)

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(bx) \big),$$

kde

$$a_k := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x \qquad \text{pro } k \in \{0,1,2,\dots\}$$

a

$$b_k := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x \qquad \text{pro } k \in \{1,2,\dots\}.$$

Pokud bychom pracovali s prostorem $L^2((-\pi,\pi))$, dostali bychom opět ortonormální systém

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(2x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(2x), \dots\right\}$$

(díky 2π-periodicitě uvedených funkcí). Vztahy pro výpočet koeficientů by se od vztahů uvedených výše lišily jen v tom, že bychom integrovali přes interval $(-\pi,\pi)$.

Poznámka 19.2.5. Ortogonální systém popsaný v předchozím příkladu se používá velice často. Fourierovy řady odpovídající tomuto systému bývají označeny jako *Fourierovy řady vzhledem k trigonometrickému systému* nebo stručně *Fourierovy řady*. Fourierovým řadám v obecném Hilbertově prostoru při zadaném ortogonálním či ortonormálním systému se obvykle říká *abstraktní Fourierovy řady.*

Věta 19.2.6 (O vlastnostech abstraktních Fourierových řad)**.** *Nechť H je Hilbertův prostor, $\{\Phi_k\}_{k=1}^\infty \subset H$ je ortonormální systém, $f \in H$, $f \sim \sum_{k=1}^\infty c_k\Phi_k$ a $s_n := \sum_{k=1}^n c_k\Phi_k$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak platí*

$$\sum_{k=1}^\infty c_k^2 \le \|f\|_H^2$$

a

$$\sum_{k=1}^\infty c_k^2 = \|f\|_H^2 \quad \iff \quad \lim_{n\to\infty} \|s_n - f\|_H = 0.$$

Důkaz. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Pokud v důkazu Věty o nejlepší aproximaci (Věta 19.2.1) položíme $a_k = c_k$, $k = 1,2,\dots,n$, dostáváme

$$0 \le \|f - s_n\|_H^2 = \|f\|_H^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2.$$

Díky tomu jsou všechny částečné součty řady $\sum_{k=1}^\infty c_k^2$ omezené číslem $\|f\|_H^2$, řada $\sum_{k=1}^\infty c_k^2$ konverguje a její součet je zmíněným číslem omezený také.

Z rovnosti $\|f - s_n\|_H^2 = \|f\|_H^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2$ dokázané výše plyne druhé tvrzení. □

Poznámka 19.2.7. Nerovnost $\sum_{k=1}^\infty c_k^2 \le \|f\|_H^2$ se nazývá *Besselova nerovnost.* Rovnost $\sum_{k=1}^\infty c_k^2 = \|f\|_H^2$ se nazývá *Parsevalova nerovnost.* Parsevalova rovnost nemusí obecně platit. Stačí uvážit situaci, kdy systém $\{\Phi_k\}_{k=1}^\infty$ není úplný a pak vzít netriviální prvek $f \in H$, který je ortogonální ke všem Φ_k.

Důsledek 19.2.8. *Nechť H je Hilbertův prostor, $\{\Phi_k\}_{k=1}^\infty \subset H$ je ortonormální systém, $f \in H$ a $f \sim \sum_{k=1}^\infty c_k\Phi_k$. Pak*
(i) $\{c_k\} \in \ell_2$
(ii) $c_k \to 0$ *pro* $k \to \infty$
(iii) $f = \sum_{k=1}^\infty c_k\Phi_k$ *právě tehdy, když platí Parsevalova rovnost* $\|f\|_H^2 = \sum_{k=1}^\infty c_k^2$.

Náš dosavadní postup se také dá obrátit. Každé posloupnosti koeficientů z ℓ_2 můžeme přiřadit Fourierovu řadu a tu se pokusit sečíst.

Věta 19.2.9 (Riesz–Fischerova věta)**.** *Nechť H je Hilbertův prostor, $\{\Phi_k\}_{k=1}^\infty \subset H$ je ortonormální systém a $\{c_k\}_{k=1}^\infty \in \ell_2$. Pak*
(i) *řada* $\sum_{k=1}^\infty c_k\Phi_k$ *konverguje v* H
(ii) $c_k = (\sum_{j=1}^\infty c_j\Phi_j, \Phi_k)_H$ *pro všechna* $k \in \mathbb{N}$
(iii) $\|\sum_{k=1}^\infty c_k\Phi_k\|_H^2 = \sum_{k=1}^\infty c_k^2$.

Důkaz. První tvrzení plyne z toho, že Hilbertův prostor je úplný a posloupnost $\{\sum_{k=1}^n c_k\Phi_k\}_{n=1}^\infty$ je cauchyovská, neboť pro $m > n$ máme

$$\Big\|\sum_{k=1}^m c_k\Phi_k - \sum_{k=1}^n c_k\Phi_k\Big\|_H^2 = \Big\|\sum_{k=n+1}^m c_k\Phi_k\Big\|_H^2 = \Big(\sum_{k=n+1}^m c_k\Phi_k, \sum_{k=n+1}^m c_k\Phi_k\Big)_H$$
$$= \sum_{k=n+1}^m c_k^2.$$

Druhé tvrzení plyne ze prvního a Cauchy–Schwarzovy nerovnosti, neboť při zafixovaném $k \in \mathbb{N}$ máme pro všechna $n > k$

$$\Big|c_k - \Big(\sum_{j=1}^\infty c_j\Phi_j, \Phi_k\Big)_H\Big| = \Big|\Big(\sum_{j=1}^n c_j\Phi_j, \Phi_k\Big)_H - \Big(\sum_{j=1}^\infty c_j\Phi_j, \Phi_k\Big)_H\Big|$$
$$= \Big|\Big(\sum_{j=n+1}^\infty c_j\Phi_j, \Phi_k\Big)_H\Big| \le \Big\|\sum_{j=n+1}^\infty c_j\Phi_j\Big\|_H \|\Phi_k\|_H$$
$$= \Big\|\sum_{j=n+1}^\infty c_j\Phi_j\Big\|_H \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Třetí tvrzení plyne z prvního a druhého tvrzení. □

Poznámka 19.2.10. Riesz–Fischerova věta rozšiřuje naše vědomosti i za situace, kdy $f \sim \sum_{k=1}^\infty c_k\Phi_k$. Díky této větě teď navíc víme, že zmíněná Fourierova řada má vždy součet v H, fourierovské koeficienty součtu jsou stejné jako koeficienty sčítané řady a pro zmíněný součet platí Parsevalova rovnost.

Příklad 19.2.11. V případě trigonometrického systému na $L^2((-\pi,\pi))$ má Besselova nerovnost tvar

$$\gamma^2 + \sum_{k=1}^\infty \alpha_k^2 + \beta_k^2 \le \|f\|_{L^2((-\pi,\pi))}^2,$$

neboli

$$\frac{\pi}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \pi(a_k^2 + b_k^2) \le \|f\|^2_{L^2((-\pi,\pi))}.$$

Pracujeme-li třeba s funkcí $f(x) = x$, pak máme díky její lichosti

$$a_k = 0 \qquad \text{pro všechna } k \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

a pro všechna $k \in \mathbb{N}$ integrací per partes dostáváme

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\Big[-x\frac{\cos(kx)}{k}\Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(kx)}{k}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\Big(-\pi\frac{(-1)^k}{k} - \pi\frac{(-1)^k}{k}\Big) + 0 = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}. \end{aligned}$$

Navíc

$$\|x\|^2_{L^2((-\pi,\pi))} = \int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{x^3}{3}\Big]_{-\pi}^{\pi} = 2\frac{\pi^3}{3}.$$

Celkově proto máme

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}(-1)^{k+1}\sin(kx)$$

a Besselova nerovnost zde má tvar

$$\|x\|^2_{L^2((-\pi,\pi))} = 2\frac{\pi^3}{3} \ge \sum_{k=1}^{\infty}\pi\frac{4}{k^2}.$$

Brzy se dozvíme, že platí $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Díky tomu jsme výše dostali Parsevalovu rovnost, a proto

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}(-1)^{k+1}\sin(kx).$$

Poslední rovnost však musíme chápat jako rovnost v prostoru $L^2((-\pi,\pi))$. Z hlediska funkčních hodnot máme pouze jistotu, že rovnost nastává skoro všude na intervalu $(-\pi,\pi)$. To plyne z poměrně hluboké Carlesonovy věty (Věta 19.4.23), teorie Lebesgueových prostorů vybudovaná v předchozím díle nám pouze zaručuje, že

$$\lim_{l\to\infty}\sum_{k=1}^{n_l}\frac{2}{k}(-1)^{k+1}\sin(kx) = x$$

pro vhodnou vybranou podposloupnost $n_l \to \infty$ a pro s.v. $x \in (-\pi,\pi)$.

Shrňme si naše dosavadní poznatky o situaci při pevně zvoleném ortonormálním systému v Hilbertově prostoru. Každému prvku je přiřazena posloupnost jeho fourierovských koeficientů a jeho Fourierova řada. Fourierova řada však může být Fourierovou řadou více prvků. Jedním z těchto prvků je součet uvedené Fourierovy řady a jen pro tento prvek platí Parsevalova rovnost.

Následující výsledek nám říká, že ve speciálním případě, kdy systém $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ je úplný, žádná Fourierova řada nemůže být Fourierovou řadou více než jednoho prvku.

Věta 19.2.12 (O charakterizaci úplných systémů)**.** *Nechť H je Hilbertův prostor a $\{\Phi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ je ortonormální systém. Pak následující výroky jsou ekvivalentní.*
(i) *Systém $\{\Phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ je úplný*
(ii) *pro všechna $f \in H$ platí*

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_k \qquad \Longrightarrow \qquad f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_k$$

(iii) *pro všechna $f \in H$ platí Parsevalova rovnost*
(iv) *množina všech prvků, které vzniknou jako lineární kombinace konečně mnoha prvků systému $\{\Phi_k\}_{k=1}^{\infty}$, je hustá v H.*

Důkaz. Nejprve dokažme „(i)⇒(ii)“. Nechť $f \in H$ a $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_k$. Označme $g := \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_k$. Podle Riesz–Fischerovy věty (Věta 19.2.9) pak máme pro všechna $k \in \mathbb{N}$

$$0 = c_k - c_k = (f, \Phi_k)_H - (g, \Phi_k)_H = (f - g, \Phi_k)_H.$$

Protože systém $\{\Phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ je úplný, dostáváme $f - g = 0$.

Ukažme, že „(iii)⇒ (i)“. Jestliže $(f, \Phi_k) = 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, pak máme $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} 0\Phi_k$ a z Parsevalovy rovnosti dostáváme $\|f\|^2 = 0$, čímž jsme ověřili úplnost systému $\{\Phi_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Podle Věty o vlastnostech abstraktních Fourierových řad (Věta 19.2.6) máme „(ii)⇒ (iii)“.

Ukázali jsme tedy „(i)⇔(ii)⇔(iii)“.

Nyní si povšimněme, že zřejmě platí „(ii)⇒(iv)“. Ukažme ještě „(iv)⇒(ii)“. Nechť $f \in H$ a $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_k$. Díky (iv) ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ a $\{a_k\}_{k=1}^{n_0}$ tak, že

$$\Big\| f - \sum_{k=1}^{n_0} a_k \Phi_k \Big\|_H < \varepsilon.$$

Věta o nejlepší aproximaci (Věta 19.2.1) pak zaručuje, že $\|f - \sum_{k=1}^{n} c_k \Phi_k\|_H < \varepsilon$ pro všechna $n \geq n_0$, a odtud $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_k$. □

Důsledek 19.2.13. *Každý Hilbertův prostor, ve kterém existuje úplný ortonormální systém, je separabilní.*

Důkaz. Jako spočetnou hustou podmnožinu stačí vzít množinu všech prvků, které vzniknou jako lineární kombinace s racionálními koeficienty konečně mnoha prvků systému $\{\Phi_k\}_{k=1}^{\infty}$. □

Platí však i obrácené tvrzení.

Věta 19.2.14 (O existenci úplného systému v separabilním Hilbertově prostoru)**.** *V každém separabilním Hilbertově prostoru existuje úplný ortonormální systém.*

Důkaz. Budeme rozlišovat dva případy. Nejprve nechť H je Hilbertův prostor konečné dimenze. Pak stačí vzít libovolnou ortonormální bázi.

Nyní nechť H má nekonečnou dimenzi. Díky předpokládané separabilitě v něm existuje spočetná hustá podmnožina. Seřaďme její prvky do posloupnosti $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$.

Požadovaný systém budeme nyní konstruovat za pomoci Gram–Schmidtova ortogonalizačního procesu. Nejprve položme $\Phi_1 := \frac{x_{j_1}}{\|x_{j_1}\|_H}$, kde $j_1 \in \mathbb{N}$ je nejmenší index takový, že x_{j_1} je netriviální.

Dále vezměme $j_2 \in \mathbb{N}$ jako nejmenší index takový, že Φ_1 a x_{j_2} jsou lineárně nezávislé. Položme

$$y_2 := x_{j_2} - (x_{j_2}, \Phi_1)_H \Phi_1 \qquad \text{a} \qquad \Phi_2 := \frac{y_2}{\|y_2\|_H}.$$

Pokračujeme indukcí, kde po získání prvků $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ nejprve najdeme nejmenší index $j_{n+1} \in \mathbb{N}$ takový, že $x_{j_{n+1}} \notin \operatorname{span}\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$, a pak položíme

$$y_{n+1} := x_{j_{n+1}} - \sum_{j=1}^{n} (x_{j_{n+1}}, \Phi_j)_H \Phi_j \qquad \text{a} \qquad \Phi_{n+1} := \frac{y_{n+1}}{\|y_{n+1}\|_H}.$$

Povšimněme si, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\} \subset \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_{j_n}\} = \operatorname{span}\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}.$$

Tato vlastnost spolu s poslední částí Věty o charakterizaci úplných systémů (Věta 19.2.12) zaručuje, že získaný ortonormální systém je skutečně úplný. □

Příklad 19.2.15. Na začátku kapitoly se nám podařilo zkonstruovat úplný ortonormální systém na prostoru ℓ_2. Proto je tento prostor separabilní.

Definice 19.2.16 (Izometrie, izometrické prostory)**.** Nechť $(P_1, \varrho_1), (P_2, \varrho_2)$ jsou metrické prostory a $I\colon P_1 \to P_2$ je zobrazení. Řekneme, že I je *izometrie*, jestliže pro všechna $x, y \in P_1$ platí

$$\varrho_2(I(x), I(y)) = \varrho_1(x, y).$$

Dále řekneme, že prostory $(P_1, \varrho_1), (P_2, \varrho_2)$ jsou *izometrické*, jestliže existuje izometrie zobrazující P_1 na P_2.

Poznámka 19.2.17. (i) Podmínka z definice izometrie implikuje, že definiční obor I je celé P_1 a I je prosté.
(ii) Pokud I je izometrie zobrazující P_1 na P_2, pak I^{-1} je izometrie zobrazující P_2 na P_1.

Věta 19.2.18 (O vztahu separabilních Hilbertových prostorů a ℓ_2)**.** *Každý nekonečně dimenzionální separabilní Hilbertův prostor je izometrický s ℓ_2.*

Důkaz. V separabilním Hilbertově prostoru H existuje úplný ortonormální systém. Nechť I je zobrazení, které každému prvku $f \in H$ přiřadí posloupnost jeho fourierovských koeficientů $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ vůči uvedenému systému. Již víme, že I je definované na celém H, zobrazuje H na ℓ_2 (každá Fourierova řada splňující $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$ konverguje v H) a platí Parsevalova rovnost

$$\|f\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|\{c_k\}_{k=1}^{\infty}\|_{\ell_2} = \|I(f)\|_{\ell_2}.$$

Teď už si stačí jen uvědomit, že linearita skalárního součinu v první proměnné implikuje linearitu zobrazení I, a proto pro libovolná $f, g \in H$ máme

$$\|I(f) - I(g)\|_{\ell_2} = \|I(f-g)\|_{\ell_2} = \|f-g\|_H^2.$$

$\square$

Nyní se budeme zabývat takzvanými *ortogonálními projekcemi* Hilbertova prostoru H na jeho podprostor M. Ukažme si, o co se bude jednat, na jednoduchém případu Hilbertova prostoru H s úplným ortonormálním systémem $\{\Phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ a $M := \operatorname{span}\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$, kde $n \in \mathbb{N}$ je nějaké pevné číslo (jednoduchost tohoto případu spočívá zejména v tom, že podprostor M má konečnou dimenzi).

Definujme zde projekci $P\colon H \to M$ tak, že každému prvku $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_k$ přiřadíme $P(f) = \sum_{k=1}^{n} c_k \Phi_k$. Pak definičním oborem P je celé H, oborem hodnot je M a platí $P \circ P = P$. Dále díky Parsevalově rovnosti platí analogie Pythagorovy věty

$$\|f\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2 = \|P(f)\|_H^2 + \|f - P(f)\|_H^2$$

a

$$z = P(f) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (f-z, y)_H = 0 \quad \text{pro všechna } y \in M.$$

Bude nás zajímat, zda podobné výsledky platí i pro podprostory nekonečné dimenze. Pozitivní výsledky získáme pro uzavřené podprostory (podprostory, které jsou zároveň uzavřené množiny).

Příklad 19.2.19. (i) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je neprázdná otevřená množina, která splňuje $\lambda_N(\Omega) < \infty$. Definujme množinu

$$M := \Big\{ f \in L^2(\Omega)\colon \int_\Omega f \,\mathrm{d}x = 0 \Big\}.$$

Pak M je zřejmě podprostor $L^2(\Omega)$. Navíc pokud $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ a $f_n \to f$ v $L^2(\Omega)$, pak z Hölderovy nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned}\Big|\int_\Omega f \,\mathrm{d}x\Big| &\le \Big|\int_\Omega (f - f_n) \,\mathrm{d}x\Big| + \Big|\int_\Omega f_n \,\mathrm{d}x\Big| = \Big|\int_\Omega (f - f_n) \,\mathrm{d}x\Big| \le \int_\Omega |f - f_n| \,\mathrm{d}x \\ &\le \|f - f_n\|_{L^2(\Omega)} \|1\|_{L^2(\Omega)} \overset{n\to\infty}{\to} 0.\end{aligned}$$

Proto $f \in M$. Následně M je uzavřený. Rozmyslete si, že podprostor M je nekonečnědimenzionální.
(ii) Definujme

$$M := \Big\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2\colon \text{existuje } n_0 \in \mathbb{N} \text{ takové, že } x_n = 0 \text{ pro všechna } n > n_0 \Big\}.$$

Pak M je zřejmě podprostor. Tento podprostor není uzavřený, neboť posloupnost jeho prvků

$$\{1, 0, \dots\}, \quad \{1, \tfrac{1}{2}, 0, \dots\}, \quad \{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, 0, \dots\}, \quad \{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, 0, \dots\}, \quad \dots$$

konverguje v ℓ_2 k prvku $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2 \setminus M$.

V obecném případě ortogonální projekci zavedeme tak, že k zadanému $f \in H$ nalezeneme nejbližší prvek podprostoru M.

Věta 19.2.20 (O ortogonální projekci)**.** *Nechť H je Hilbertův prostor a M je jeho uzavřený podprostor. Pak pro každé $f \in H$ existuje právě jeden prvek $f_M \in M$ takový, že*

$$\|f - f_M\|_H = \inf_{y \in M} \|f - y\|_H.$$

Na H definujme zobrazení $P\colon H \to M$ předpisem $P(f) = f_M$. Pak platí
(i) $P(H) = M$
(ii) $P \circ P = P$
(iii) *pro každé $z \in M$ platí*

$$z = P(f) \quad \Longleftrightarrow \quad (f - z, y)_H = 0 \text{ pro všechna } y \in M$$

(iv) $\|f\|_H^2 = \|P(f)\|_H^2 + \|f - P(f)\|_H^2$ *pro všechna $f \in H$.*

Důkaz. Krok 1: Konstrukce prvku f_M.
Zafixujme $f \in H$. Z definice infima je možné zkonstruovat posloupnost $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset M$ takovou, že

$$\|f - y_n\|_H \overset{n\to\infty}{\to} I := \inf_{y \in M} \|f - y\|_H.$$

Ukažme, že posloupnost $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ je cauchyovská. Zafixujme $\varepsilon \in (0,1)$. Protože $\|f - y_n\|_H \to I$, lze nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ tak velké, že $\|f - y_n\|_H < (1+\varepsilon)I$ pro všechna $n > n_0$. Zvolme $n > n_0$ a $p \in \mathbb{N}$. Pak máme

$$\begin{aligned}
2(\|f - y_n\|_H^2 &+ \|f - y_{n+p}\|_H^2) - 4\left\|f - \frac{y_n + y_{n+p}}{2}\right\|_H^2 \\
&= 4\|f\|_H^2 + 2\|y_n\|_H^2 + 2\|y_{n+p}\|_H^2 - 4(f, y_n)_H - 4(f, y_{n+p})_H \\
&\qquad - 4\|f\|_H^2 - \|y_n + y_{n+p}\|_H^2 + 4(f, y_n + y_{n+p}) \\
&= 2\|y_n\|_H^2 + 2\|y_{n+p}\|_H^2 - \|y_n + y_{n+p}\|_H^2 \\
&= \|y_n\|_H^2 + \|y_{n+p}\|_H^2 - 2(y_n, y_{n+p})_H \\
&= \|y_{n+p} - y_n\|_H^2.
\end{aligned}$$

Protože M je podprostor, platí $\frac{y_n + y_{n+p}}{2} \in M$ a z předešlé rovnosti dostáváme

$$\begin{aligned}
\|y_{n+p} - y_n\|_H^2 &= 2(\|f - y_n\|_H^2 + \|f - y_{n+p}\|_H^2) - 4\left\|f - \frac{y_n + y_{n+p}}{2}\right\|_H^2 \\
&\le 2((1+\varepsilon)^2 I^2 + (1+\varepsilon)^2 I^2) - 4I^2 = (8\varepsilon + 4\varepsilon^2) I^2 \\
&\le 12 I^2 \varepsilon.
\end{aligned}$$

Proto je posloupnost $\{y_n\}$ cauchyovská. Úplnost H pak zaručuje existenci $f_M \in H$ takového, že $y_n \to f_M$. Protože M je uzavřená množina, máme $f_M \in M$. Protože norma je spojitá, platí $\|f - f_M\|_H = \min_{y \in M} \|f - y\|_H$.

Krok 2: ortogonalita $f - f_M$ a y pro $y \in M$.
Zafixujme libovolné $y \in M$. Definujme funkci

$$\varphi(t) = \|f - (f_M + ty)\|_H^2 = \|f - f_M\|_H^2 + t^2\|y\|_H^2 - 2t(f - f_M, y).$$

Pak vlastnost $\|f - f_M\|_H = \min_{y \in M} \|f - y\|_H$ implikuje

$$0 = \varphi'(0) = -2(f - f_M, y).$$

Odtud $(f - f_M, y) = 0$.

Krok 3: jednoznačnost f_M.
Nechť prvek $\widetilde{f}_M \in M$ také splňuje $\widetilde{f}_M = \min_{y \in M} \|f - y\|_H$. Pak $f_M - \widetilde{f}_M \in M$ a pro prvek $\widetilde{f}_M$ lze použít argumenty druhého kroku k získání vlastnosti $(f - \widetilde{f}_M, y) = 0$ pro všechna $y \in M$. Následně máme

$$\begin{aligned}\|f_M - \widetilde{f}_M\|_H^2 &= (f_M - f + f - \widetilde{f}_M, f_M - \widetilde{f}_M)_H \\ &= (f_M - f, f_M - \widetilde{f}_M)_H + (f - \widetilde{f}_M, f_M - \widetilde{f}_M)_H = 0 + 0 = 0.\end{aligned}$$

Krok 4: důkaz zbylých tvrzení.
Připomeňme, že jsme již dokázali existenci a jednoznačnost prvku f_M. Tím je také dobře definováno zobrazení P. Protože každý prvek množiny M se zobrazí sám na sebe, okamžitě dostáváme vlastnosti (i) a (ii).

Ve druhém kroku jsme již dokázali implikaci „$\Rightarrow$“ z vlastnosti (iii). Odtud plyne vlastnost (iv), neboť

$$\begin{aligned}\|f\|_H^2 &= \|f - f_M + f_M\|_H^2 = \|f_M\|_H^2 + \|f - f_M\|_H^2 - 2(f - f_M, f_M)_H \\ &= \|f_M\|_H^2 + \|f - f_M\|_H^2.\end{aligned}$$

Dokažme ještě implikaci „$\Leftarrow$“ z vlastnosti (iii). Nechť $z \in M$ a platí $(f - z, u) = 0$ pro všechna $u \in M$. Pak pro všechna $y \in M$ máme (využijeme, že $u := z - y \in M$)

$$\begin{aligned}\|f - y\|_H^2 &= \|f - z + z - y\|_H^2 = \|f - z\|_H^2 + \|z - y\|_H^2 + 2(f - z, z - y)_H \\ &= \|f - z\|_H^2 + \|z - y\|_H^2 \geq \|f - z\|_H^2.\end{aligned}$$

Odtud $\|f - z\|_H^2 = \min_{y \in M} \|f - y\|_H^2$ a podle třetího kroku máme $z = f_M$. Tím je důkaz dokončen. □

19.3 Fourierovy řady odpovídající trigonometrickému systému

Podle předchozího textu víme, že pokud $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$ a $f \in L^2((a, a+l))$, pak funkci f můžeme přiřadit její Fourierovu řadu odpovídající trigonometrickému systému

$$\Big\{1, \cos\Big(\frac{2\pi}{l}x\Big), \sin\Big(\frac{2\pi}{l}x\Big), \cos\Big(\frac{4\pi}{l}x\Big), \sin\Big(\frac{4\pi}{l}x\Big), \dots\Big\}$$

(zabývali jsme se jen případem $a = 0$, nicméně naše drobné zobecnění je oprávněné díky l-periodičnosti funkcí z trigonometrického systému). V zájmu lepší čitelnosti nebudeme tento systém normalizovat (multiplikativní konstanty se projeví ve vzorcích pro koeficienty). Máme tedy

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big) + b_k \sin\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\Big),$$

kde

$$a_k := \frac{2}{l}\int_a^{a+l} f(x)\cos\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\,\mathrm{d}x \qquad \text{pro } k \in \{0,1,2,\dots\}$$

a

$$b_k := \frac{2}{l}\int_a^{a+l} f(x)\sin\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\,\mathrm{d}x \qquad \text{pro } k \in \{1,2,\dots\}.$$

Vztah funkce f a její Fourierovy řady je silně ovlivňován případnou úplností ortogonálního systému, vůči němuž jsme Fourierovu řadu zkonstruovali. Následující výsledek si dokážeme v technické pasáži na konci kapitoly.

Věta 19.3.1 (O úplnosti trigonometrického systému)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $l > 0$. Pak trigonometrický systém odpovídající periodě l je úplný na $L^2((a, a+l))$.*

Díky tomuto výsledku platí

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\cos\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big) + b_k\sin\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\Big) \quad \text{(rovnost prvků na } L^2((a,a+l)))$$

a odtud

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\cos\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big) + b_k\sin\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\Big) \qquad \text{skoro všude na } (a, a+l)$$

(nicméně tento výsledek plyne až z Carlesonovy věty 19.4.23 uvedené níže, konvergence na $L^2((a, a+l))$ zaručuje pouze konvergenci skoro všude pouze pro podposloupnost částečných součtů).

Výsledky na prostoru $L^2((a, a+l))$ jsou hezké (elegantně rozšiřují teorii vyjádření vektoru pomocí báze z lineární algebry) a navíc byly poměrně snadno získané. Připomeneme-li si však naši aplikaci na rovnici vedení tepla, pak se ukazuje, že tyto výsledky nejsou dostatečně silné, neboť nezaručují bodovou konvergenci ve všech bodech intervalu $(a, a+l)$ či dokonce stejnoměrnou konvergenci derivované řady, která by nám umožnila prohazování sumy a derivace.

Právě otázce bodové a stejnoměrné konvergence Fourierovy řady se zde budeme věnovat. Nejprve však ještě uveďme několik poznámek ke koeficientům $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$.

19.3.1 Vlastnosti Fourierových koeficientů

Předně si povšimněme, že tvar trigonometrického systému je ovlivněn pouze volbou l, ale hodnoty koeficientů závisí také na volbě a. Máme-li totiž třeba $f(x) = x$ na $\mathbb{R}$ a $l = 2\pi$ pak v případě $a = 0$ platí

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\frac{(2\pi)^2}{2} = 2\pi,$$

ale pro $a = -\pi$ máme

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\mathrm{d}x = 0.$$

Na druhou stranu, má-li funkce f periodu délky l, můžeme při výpočtu hodnoty koeficientu integrovat přes libovolný interval délky l a vždy dostaneme správnou hodnotu koeficientu. Toho se dá využít třeba v případech, kdy f je navíc sudá nebo lichá, ke snadnému získání informace, že některé koeficienty jsou nulové.

Příklad 19.3.2. Rozviňme funkci e^x do kosinové řady na $(0,1)$. Požadovaného výsledku zřejmě dosáhneme, pokud budeme rozvíjet funkci (zadanou funkci sudě rozšiřujeme) $f(x) = \mathrm{e}^{|x|}$ na intervalu $(-1,1)$. Pak máme

$$\mathrm{e}^{|x|} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos(k\pi) + b_k \sin(k\pi) \Big),$$

kde díky sudosti

$$b_k = 0 \qquad \text{pro všechna } k \in \mathbb{N}$$

a pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\begin{aligned} a_k &= 2\int_0^1 \mathrm{e}^x \cos(k\pi x)\,\mathrm{d}x = 2\operatorname{Re}\Big(\int_0^1 \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i}k\pi)x}\,\mathrm{d}x\Big) = 2\operatorname{Re}\Big(\frac{1}{1+\mathrm{i}k\pi}(\mathrm{e}^{1+\mathrm{i}k\pi}-1)\Big) \\ &= \frac{2}{1+k^2\pi^2}\operatorname{Re}\Big((1-\mathrm{i}k\pi)(\mathrm{e}(\cos(k\pi)+\mathrm{i}\sin(k\pi))-1)\Big) = \frac{2(\mathrm{e}(-1)^k-1)}{1+k^2\pi^2}. \end{aligned}$$

Celkově

$$\mathrm{e}^x = \mathrm{e} - 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(\mathrm{e}(-1)^k-1)}{1+k^2\pi^2}\cos(k\pi) \qquad \text{na } L^2((0,1)).$$

Poznámka 19.3.3. Povšimněte si, že v předchozím příkladu jsme trikem s přechodem k sudé funkci sice odstranili sinové členy, ale zaplatili jsme za to nahrazením intervalu $(0,1)$ intervalem $(-1,1)$. Kdybychom tento krok neučinili, pracovali bychom s ortogonálním systémem

$$\{1, \cos(2\pi x), \sin(2\pi x), \cos(4\pi x), \sin(4\pi x), \dots\}.$$

Náš přístup pracuje s funkcemi

$$\{1, \cos(\pi x), \cos(2\pi x), \cos(3\pi x), \cos(4\pi x), \dots\},$$

kde se už sice nevyskytuje funkce sinus, ale zase nám oproti původnímu systému přibyly nové funkce $\cos(\pi x)$, $\cos(3\pi x)$, atd.

Parsevalova rovnost

$$\begin{aligned} \|f\|^2_{L^2((a,a+l))} &= \Big(\frac{a_0}{2}\Big)^2 \|1\|^2_{L^2((a,a+l))} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \Big\|\cos\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\Big\|^2_{L^2((a,a+l))} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \Big\|\sin\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\Big\|^2_{L^2((a,a+l))} \\ &= \frac{a_0^2 l}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{a_k^2 l}{2} + \frac{b_k^2 l}{2}\Big), \end{aligned}$$

za kterou vděčíme Větě o úplnosti trigonometrického systému (Věta 19.3.1), nám nabízí novou metodu sčítání číselných řad.

Příklad 19.3.4. Na intervalu $(-\pi,\pi)$ přiřaďme Fourierovu řadu funkci signum. Díky její lichosti platí $a_k = 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Dále pro všechna $k \in \mathbb{N}$ máme

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{k\pi}[-\cos(kx)]_0^\pi = \frac{2}{k\pi}(1-(-1)^k).$$

Proto

$$\operatorname{sign} x = \sum_{k=1}^\infty \frac{2}{k\pi}(1-(-1)^k)\sin(kx) = \sum_{n=0}^\infty \frac{4}{(2n+1)\pi}\sin((2n+1)x) \quad \text{na } L^2(-\pi,\pi).$$

Dále máme

$$\|\operatorname{sign} x\|^2_{L^2((-\pi,\pi))} = 2\int_0^\pi 1\,\mathrm{d}x = 2\pi$$

a

$$\|\sin(kx)\|^2_{L^2((-\pi,\pi))} = \int_{-\pi}^\pi \sin^2(kx)\,\mathrm{d}x = \pi.$$

Proto zde má Parsevalova rovnost podobu

$$2\pi = \|\operatorname{sign} x\|^2_{L^2((-\pi,\pi))} = \sum_{k=1}^\infty b_k^2\|\sin(kx)\|^2_{L^2((-\pi,\pi))} = \sum_{n=0}^\infty\Big(\frac{4}{(2n+1)\pi}\Big)^2\pi.$$

Odtud $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Někdy je výhodné nahradit ve Fourierově řadě funkce sinus a kosinus komplexními exponenciálami. Pokud totiž položíme

$$c_0 := \frac{a_0}{2}, \qquad c_k := \frac{a_k - \mathrm{i}b_k}{2} \qquad \text{a} \qquad c_{-k} := \frac{a_k + \mathrm{i}b_k}{2}$$

pro všechna $k \in \mathbb{N}$, pak díky rovnosti

$$\begin{aligned} &c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{l}x} + c_{-k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2k\pi}{l}x} = \\ &\frac{a_k-\mathrm{i}b_k}{2}\Big(\cos\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)+\mathrm{i}\sin\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\Big) + \frac{a_k+\mathrm{i}b_k}{2}\Big(\cos\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)-\mathrm{i}\sin\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\Big) \\ &= a_k\cos\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big) + b_k\sin\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\end{aligned}$$

dostáváme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty\Big(a_k\cos\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big) + b_k\sin\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\Big) = \sum_{k=-\infty}^\infty c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{l}x}.$$

Součet nekonečné řady je zde chápán jako

$$\sum_{k=-\infty}^\infty c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{l}x} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^n c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{l}x}.$$

Povšimněme si ještě, že pro všechna $k \in \mathbb{Z}$ platí

$$c_k = \frac{1}{l}\int_a^{a+l} f(x)\Big(\cos\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big) - \mathrm{i}\sin\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\Big)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{l}\int_a^{a+l} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2k\pi}{l}x}\,\mathrm{d}x.$$

Funkce $\cos(\frac{2k\pi}{l}x)$, $\sin(\frac{2k\pi}{l}x)$ a $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{l}x}$ jsou pro všechna přípustná $k \in \mathbb{Z}$ omezené. Díky tomu dávají formule pro koeficienty a_k, b_k a c_k dobře definovaná konečná čísla nejen pro funkce z námi dosud používaného prostoru $L^2((a, a+l))$, ale dokonce pro funkce z širšího prostoru $L^1((a, a+l))$ (za vnoření $L^2((a, a+l)) \subset L^1((a, a+l))$ vděčíme omezenosti intervalu $(a, a+l)$). Proto bývá zvykem budovat teorii bodového chování Fourierových řad v prostoru $L^1((a, a+l))$.

V dalším výkladu budeme Fourierovu řadu přiřazenou funkci $f \in L^1((a, a+l))$ (prostřednictvím vypočtených koeficientů) značit

$$F_f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\cos\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big) + b_k\sin\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\Big)$$

se standardní konvencí, že v bodech, kde $F_f(x)$ konverguje, znak $F_f(x)$ také zastupuje hodnotu součtu řady. Dále n-tý částečný součet Fourierovy řady v bodě $x \in \mathbb{R}$ bude $F_{f,n}(x)$.

Zápis

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\cos\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big) + b_k\sin\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\Big)$$

tentokrát bude při zadaném $x \in [a, a+l]$ znamenat, že řada napravo konverguje v bodě x a navíc se v tomto bodě součet řady rovná funkční hodnotě funkce f (přesněji funkční hodnotě upřesněného reprezentanta uvažované Lebesgueovy třídy).

Poznámka 19.3.5. Nechť $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}, \{b_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak funkce

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\Big(a_k\cos\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big) + b_k\sin\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\Big)$$

se nazývá *trigonometrický polynom*. Funkce

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\cos\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big) + b_k\sin\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\Big)$$

se nazývá *trigonometrická řada* a o *Fourierově řadě* hovoříme až tehdy, když posloupnosti $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}, \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ jsou tvořeny Fourierovými koeficienty příslušejícími nějaké funkci $f \in L^1((a, a+l))$.

Fourierovy koeficienty jsou pro funkci z $L^1((a, a+l))$ nejen dobře definované, ale dokonce musí mít právě tvar uvedený v jejich definici, má-li mít Fourierova řada rozumné aproximační vlastnosti.

Věta 19.3.6 (O jednoznačnosti Fourerových koeficientů)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$, $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ a $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$. Jestliže*

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k \cos\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big) + \beta_k \sin\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\right) \rightrightarrows f \qquad \text{na } [a, a+l],$$

pak posloupnosti Fourierových koeficientů funkce f jsou totožné s posloupnostmi $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ a $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ (přesněji $\alpha_0 = a_0$, $\alpha_k = a_k$ a $\beta_k = b_k$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$).

Důkaz. Z předpokladů plyne

$$\left(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big) + \beta_k \sin\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\right) \cos\Big(\frac{2m\pi}{l}x\Big) \rightrightarrows f(x) \cos\Big(\frac{2m\pi}{l}x\Big)$$

na $[a, a+l]$. Odtud pro libovolné $m \in \mathbb{N}$ díky ortogonalitě trigonometrického systému máme

$$\begin{aligned}
a_m &= \frac{2}{l} \int_a^{a+l} f(x) \cos\Big(\frac{2m\pi}{l}x\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{l} \int_a^{a+l} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big) + \beta_k \sin\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\right) \cos\Big(\frac{2m\pi}{l}x\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{l} \int_a^{a+l} \left(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big) + \beta_k \sin\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\right) \cos\Big(\frac{2m\pi}{l}x\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{l} \int_a^{a+l} \alpha_m \cos^2\Big(\frac{2m\pi}{l}x\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{l} \alpha_m \frac{l}{2} = \alpha_m.
\end{aligned}$$

Podobně pro a_0 a sinové koeficienty. □

Pro funkce z $L^2((a, a+l))$ platilo, že $a_k \to 0$ a $b_k \to 0$ pro $k \to \infty$. Podobný výsledek si ukážeme i pro funkce z $L^1((a, a+l))$.

Věta 19.3.7 (Riemann–Lebesgueovo lemma)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$ a $f \in L^1((a, a+l))$. Pak*

$$\int_a^{a+l} f(x) \cos\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\,\mathrm{d}x \overset{k\to\infty}{\to} 0 \qquad \text{a} \qquad \int_a^{a+l} f(x) \sin\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\,\mathrm{d}x \overset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Speciálně $a_k \to 0$ a $b_k \to 0$ pro $k \to \infty$.

Důkaz. Díky hustotě funkcí z $\mathcal{D}((a, a+l))$ v $L^1((a, a+l))$ můžeme zkonstruovat posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}((a, a+l))$ takovou, že $f_n \to f$ v $L^1((a, a+l))$. Navíc podle Důsledku Věty o vlastnostech abstraktních Fourierových řad (Důsledek 19.2.8) víme, že pro každou funkci z $L^2((a, a+l)) \supset \mathcal{D}((a, a+l))$ konvergují její Fourierovy koeficienty k nule. K zadanému $\varepsilon > 0$ proto existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\|f - f_{n_0}\|_{L^1((a,a+l))} < \varepsilon$ a existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\Big| \int_a^{a+l} f_{n_0}(x) \cos\Big(\frac{2k\pi}{l} x\Big) \,\mathrm{d}x \Big| < \varepsilon \qquad \text{pro všechna } k \geq k_0.$$

Pak pro všechna $k \geq k_0$ máme

$$\begin{aligned} \Big| \int_a^{a+l} & f(x) \cos\Big(\frac{2k\pi}{l} x\Big) \,\mathrm{d}x \Big| \\ & \leq \Big| \int_a^{a+l} (f(x) - f_{n_0}(x)) \cos\Big(\frac{2k\pi}{l} x\Big) \,\mathrm{d}x \Big| + \Big| \int_a^{a+l} f_{n_0}(x) \cos\Big(\frac{2k\pi}{l} x\Big) \,\mathrm{d}x \Big| \\ & \leq \int_a^{a+l} |f(x) - f_{n_0}(x)| \,\mathrm{d}x + \varepsilon < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Analogicky dostaneme výsledek pro funkci sinus. □

Připomeňme, že z chování Fourierových koeficientů umíme poznat, kdy součet Fourierovy řady patří do $L^2((a, a+l))$ (to je díky Parsevalově rovnosti ekvivalentní podmínce $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) < \infty$). Zde si ukážeme, že chování jistých číselných řad konstruovaných z Fourierových koeficientů úzce souvisí s hladkostí funkce f.

Definice 19.3.8 (Po částech spojitá funkce)**.** Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$. O funkci $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ říkáme, že je *po částech spojitá* na $[a, b]$, jestliže existuje konečný počet bodů $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_m = b$ takových, že $f \in C((a_{j-1}, a_j))$ pro každé $j \in \{1, \ldots, m\}$ a v bodech $a_0, \ldots, a_m$ má f vlastní jednostranné limity (v bodech a_0 a a_m stačí z vnitřní strany intervalu (a, b)).

Poznámka 19.3.9. (i) V dělících bodech $a_0, \ldots, a_m$ funkce f nemusí být definována.
(ii) Po částech spojitá funkce je omezená a lebesgueovsky integrovatelná.
(iii) Naše definice po částech C^1-funkce z teorie křivkového integrálu je ekvivalentní tomu, že f je spojitá a f' je po částech spojitá.
(iv) Pokud je funkce po částech C^1, zřejmě jsou f a f' po částech spojité. Obrácená implikace neplatí, stačí uvážit funkci signum.

Věta 19.3.10 (O vztahu hladkosti funkce a chování Fourierových koeficientů)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$ a $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*
(i) *Nechť $f \in C^n(\mathbb{R})$, f je l-periodická, $f^{(n+1)}$ existuje v intervalu $(a, a+l)$ až na konečně mnoho bodů a je po částech spojitá na $[a, a+l]$. Pak*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^n (|a_k| + |b_k|) < \infty.$$

Dále $F_{f,n} \rightrightarrows f$ na $[a, a+l]$, řadu F_f lze až n-krát derivovat člen po členu, výsledné řady konvergují stejnoměrně na $[a, a+l]$ k odpovídajícím derivacím funkce f a jsou jejich Fourierovými řadami.

(ii) *Jestliže $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňuje $\sum_{k=1}^{\infty} k^n(|a_k| + |b_k|) < \infty$, pak trigonometrická řada odpovídající koeficientům a_k, b_k konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$, součet je l-periodická $C^n([a, a+l])$-funkce, řadu lze až n-krát derivovat člen po členu a výsledné řady konvergují stejnoměrně na $\mathbb{R}$ k odpovídajícím derivacím součtu řady a jsou jejich Fourierovými řadami.*

Důkaz. Dokažme konvergenci řady uvedené v prvním tvrzení. Nejprve nechť $n = 0$. Nechť $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_m = a + l$ jsou tak zvolené body, že f' je spojitá a omezená na každém intervalu (a_{j-1}, a_j), kde $j \in \{1, \ldots, m\}$. Pak pro všechna $k \in \mathbb{N}$ díky spojitosti a l-periodicitě funkce f máme

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{l} \int_a^{a+l} f(x) \cos\Big(\frac{2k\pi}{l} x\Big) \, \mathrm{d}x = \frac{2}{l} \sum_{j=1}^{m} \int_{a_{j-1}}^{a_j} f(x) \cos\Big(\frac{2k\pi}{l} x\Big) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{l} \sum_{j=1}^{m} \Big[f(x) \frac{l}{2k\pi} \sin\Big(\frac{2k\pi}{l} x\Big) \Big]_{a_{j-1}}^{a_j} - \frac{2}{l} \sum_{j=1}^{m} \int_{a_{j-1}}^{a_j} f'(x) \frac{l}{2k\pi} \sin\Big(\frac{2k\pi}{l} x\Big) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{l} \Big[f(x) \frac{l}{2k\pi} \sin\Big(\frac{2k\pi}{l} x\Big) \Big]_a^{a+l} - \frac{l}{2k\pi} \frac{2}{l} \int_a^{a+l} f'(x) \sin\Big(\frac{2k\pi}{l} x\Big) \, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{l}{2k\pi} \frac{2}{l} \int_a^{a+l} f'(x) \sin\Big(\frac{2k\pi}{l} x\Big) \, \mathrm{d}x =: -\frac{l}{2k\pi} \widetilde{b}_k
\end{aligned}
$$

a

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{l} \int_a^{a+l} f(x) \sin\Big(\frac{2k\pi}{l} x\Big) \, \mathrm{d}x = \frac{2}{l} \sum_{j=1}^{m} \int_{a_{j-1}}^{a_j} f(x) \sin\Big(\frac{2k\pi}{l} x\Big) \, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{2}{l} \sum_{j=1}^{m} \Big[f(x) \frac{l}{2k\pi} \cos\Big(\frac{2k\pi}{l} x\Big) \Big]_{a_{j-1}}^{a_j} + \frac{2}{l} \sum_{j=1}^{m} \int_{a_{j-1}}^{a_j} f'(x) \frac{l}{2k\pi} \cos\Big(\frac{2k\pi}{l} x\Big) \, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{2}{l} \Big[f(x) \frac{l}{2k\pi} \cos\Big(\frac{2k\pi}{l} x\Big) \Big]_a^{a+l} + \frac{l}{2k\pi} \frac{2}{l} \int_a^{a+l} f'(x) \cos\Big(\frac{2k\pi}{l} x\Big) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{l}{2k\pi} \frac{2}{l} \int_a^{a+l} f'(x) \cos\Big(\frac{2k\pi}{l} x\Big) \, \mathrm{d}x =: \frac{l}{2k\pi} \widetilde{a}_k.
\end{aligned}
$$

Povšimněme si ještě, že $\widetilde{b}_k$ je k-tý sinový Fourierův koeficient funkce f' a $\widetilde{a}_k$ je k-tý kosinový Fourierův koeficient funkce f'. Zároveň lze získané výsledky interpretovat jako

$$
|a_k| + |b_k| = \frac{l}{2k\pi} (|\widetilde{a}_k| + |\widetilde{b}_k|).
$$

Dále protože f' je po částech spojitá, je omezená, a proto $f' \in L^2((a, a+l))$. Díky tomu nám Youngova nerovnost dává

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) = \frac{l}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (|\widetilde{a}_k| + |\widetilde{b}_k|) &\le \frac{l}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{2} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2} (|\widetilde{a}_k| + |\widetilde{b}_k|)^2 \Big) \\
&\le \frac{l}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{2} \frac{1}{k^2} + \widetilde{a}_k^2 + \widetilde{b}_k^2 \Big) < \infty.
\end{aligned}
$$

Pokud $n \in \mathbb{N}$, postupujeme analogicky. Dostaneme rovnost

$$|a_k| + |b_k| = \Big(\frac{l}{2k\pi}\Big)^{n+1}(|\widetilde{a}_k| + |\widetilde{b}_k|),$$

kde $\widetilde{a}_k, \widetilde{b}_k$ jsou Fourierovy koeficienty funkce $f^{(n+1)}$. Odtud podobně jako výše

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} k^n(|a_k| + |b_k|) &= \Big(\frac{l}{2\pi}\Big)^{n+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(|\widetilde{a}_k| + |\widetilde{b}_k|)\\ &\le \Big(\frac{l}{2\pi}\Big)^{n+1}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{2}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{2}(|\widetilde{a}_k| + |\widetilde{b}_k|)^2\Big)\\ &\le \Big(\frac{l}{2\pi}\Big)^{n+1}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{2}\frac{1}{k^2} + \widetilde{a}_k^2 + \widetilde{b}_k^2\Big) < \infty.\end{aligned}$$

Nyní se zabývejme otázkou derivování Fourierovy řady člen po členu. Předně si povšimněme, že platí

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big|a_k\cos\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big) + b_k\sin\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\Big| \le \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|)$$

a

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\cos\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big) + b_k\sin\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\Big)'\\ =&\frac{2\pi}{l}\sum_{k=1}^{\infty}k\Big(-a_k\sin\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big) + b_k\cos\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\Big).\end{aligned}$$

Odtud je vidět, že předpoklad $\sum_{k=1}^{\infty} k^n(|a_k| + |b_k|) < \infty$ zaručuje, že na funkční řady získané z původní řady nula-násobným až n-násobným zderivováním člen po členu lze aplikovat Weierstrassovo kritérium (pro stejnoměrnou konvergenci; Věta 14.2.2). Následně z Věty o vztahu stejnoměrné konvergence a derivace (Věta 14.3.15) dostáváme, že součty zmíněných řad získaných derivací člen po členu jsou derivace součtu původní Fourierovy řady.

K dokončení důkazu potřebujeme ještě ukázat, že za uvedených předpokladů Fourierova řada stejnoměrně konverguje k funkci f. Na jednu stranu máme $f \in L^2((a, a+l))$, a proto podle abstraktní teorie částečné součty Fourierovy řady $F_{f,n}$ splňují

$$F_{f,n} \to f \qquad \text{v } L^2((a, a+l)).$$

Na druhou stranu, z výsledků uvedených výše plyne, že existuje $g \in C([a, a+l])$ taková, že $F_{f,n} \rightrightarrows g$ na $[a, a+l]$. Odtud plyne $F_{f,n} \to g$ v $L^2((a, a+l))$, a proto $f = g$ skoro všude na $[a, a+l]$. Protože obě funkce jsou spojité, musejí se rovnat všude (pokud by se v nějakém bodě nerovnaly, na jistém okolí by byl rozdíl funkčních hodnot alespoň poloviční a pak by norma $\|f-g\|_2$ nemohla být nulová). Část (ii) plyne z toho, co bylo dokázáno výše. $\square$

19.3.2 Bodové chování Fourierových řad

Nyní se budeme zabývat bodovou a stejnoměrnou konvergencí Fourierovy řady příslušející zadané funkci $f \in L^1((a, a+l))$. Protože Fourierova řada je vždy l-periodická, je přirozené uvažovat také l-periodickou funkci f.

V důkazu dalších hlubších výsledků pro nás bude výhodné pracovat s následující reprezentací Fourierovy řady, kterou je přirozené odvozovat od exponenciálního zápisu.

Věta 19.3.11 (O integrálním zápisu Fourierovy řady)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$, $f \in L^1((a, a+l))$, f je l-periodická a $n \in \mathbb{N}$. Pak pro n-tý částečný součet Fourierovy řady platí*

$$F_{f,n}(x) = \int_a^{a+l} D_n(x-t) f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{na } \mathbb{R},$$

kde

$$D_n(z) := \begin{cases} \frac{2n+1}{l} & \text{pro } z = ml, m \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{l}\frac{\sin(\frac{2\pi}{l}(n+\frac{1}{2})z)}{\sin(\frac{2\pi}{l}\frac{z}{2})} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Důkaz. Platí

$$\begin{aligned} F_{f,n}(x) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{l}x} = \sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{1}{l}\int_a^{a+l} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2k\pi}{l}t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{l}x} \\ &= \int_a^{a+l} f(t) \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{l}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{l}(x-t)}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Zbývá dokázat, že

$$\sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{l}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{l}z} = D_n(z).$$

Pokud $z = ml$, kde $m \in \mathbb{Z}$, pak platí $\frac{2k\pi}{l}z = 2km\pi$, a odtud

$$\sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{l}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{l}z} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{l} = \frac{2n+1}{l}.$$

Ve zbývajících případech dostáváme ze vzorce $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) - \sin(\beta -$

$\alpha))$

$$
\begin{aligned}
l\sin\Big(\frac{2\pi}{l}\frac{z}{2}\Big)\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{l}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{l}z} &= \sin\Big(\frac{\pi}{l}z\Big)\sum_{k=-n}^{n}\Big(\cos\Big(\frac{2k\pi}{l}z\Big)+\mathrm{i}\sin\Big(\frac{2k\pi}{l}z\Big)\Big)\\
&= \sin\Big(\frac{\pi}{l}z\Big)\sum_{k=-n}^{n}\cos\Big(\frac{2k\pi}{l}z\Big)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n}\Big(\sin\Big(\frac{(2k+1)\pi}{l}z\Big)-\sin\Big(\frac{(2k-1)\pi}{l}z\Big)\Big)\\
&= \frac{1}{2}\sin\Big(\frac{(2n+1)\pi}{l}z\Big)-\frac{1}{2}\sin\Big(\frac{-(2n+1)\pi}{l}z\Big)\\
&= \sin\Big(\frac{(2n+1)\pi}{l}z\Big),
\end{aligned}
$$

což jsme chtěli ukázat. □

Poznámka 19.3.12. Funkce D_n z předchozí věty se nazývá Dirichletovo jádro (příslušející periodě l).

Lemma 19.3.13 (O vlastnostech Dirichletova jádra)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $l > 0$.*
(i) *Dirichletovo jádro je sudé, nekonečně hladké, l-periodické a*

$$\int_a^{a+l} D_n(z)\,\mathrm{d}z = 1.$$

(ii) *Jestliže $h \in L^1((a, a+l))$, pak*

$$\int_a^{a+l} h(z)\sin\Big(\frac{2\pi}{l}\Big(n+\frac{1}{2}\Big)z\Big)\,\mathrm{d}z \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Důkaz. První tři vlastnosti z první části věty jsou zřejmé. Dokažme čtvrtou vlastnost. Zvolme $n \in \mathbb{N}$ a položme $f \equiv 1$. Díky ortogonalitě trigonometrického systému pak máme

$$F_{f,n}(x) = F_f(x) = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{l}\int_a^{a+l} 1\,\mathrm{d}x = 1 \quad \text{na } \mathbb{R}.$$

Na druhou stranu z Věty o integrálním zápisu Fourierovy řady (Věta 19.3.11) dostáváme

$$F_{f,n}(0) = \int_a^{a+l} D_n(-t)f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{a+l} D_n(-t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{a+l} D_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Odtud plyne čtvrtá vlastnost.

Dokažme druhou část věty. Máme

$$h(z)\sin\Big(\frac{2\pi}{l}\Big(n+\frac{1}{2}\Big)z\Big) = h(z)\cos\Big(\frac{\pi}{l}z\Big)\sin\Big(\frac{2n\pi}{l}z\Big) + h(z)\sin\Big(\frac{\pi}{l}z\Big)\cos\Big(\frac{2n\pi}{l}z\Big).$$

Předpoklad $h \in L^1((a, a+l))$ navíc dává

$$h(z)\cos\Big(\frac{\pi}{l}z\Big), h(z)\sin\Big(\frac{\pi}{l}z\Big) \in L^1((a, a+l)).$$

Proto dokazovaný výsledek plyne z Riemann–Lebesgueova lemmatu (Věta 19.3.7). □

Dalším zajímavým jevem je skutečnost, že součet Fourierovy řady v bodě $x \in \mathbb{R}$ je ovlivňován chováním funkce f pouze na malých okolích bodu x (třebaže hodnoty Fourierových koeficientů závisí na chování funkce f na celém intervalu $(a, a+l)$).

Věta 19.3.14 (O lokalizaci)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$, $f \in L^1((a, a+l))$ a f je l-periodická. Nechť $x \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$ a $\delta \in (0, \frac{l}{2})$. Pak*

$$F_f(x) = A \qquad \iff \qquad \int_0^\delta \big(f(x+z) + f(x-z) - 2A\big) D_n(z)\,\mathrm{d}z \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Důkaz. Nejprve si povšimněme, že z Věty o integrálním zápisu Fourierovy řady (Věta 19.3.11) a Lemmatu o vlastnostech Dirichletova jádra (Lemma 19.3.13) plyne

$$\begin{aligned} F_{f,n}(x) &= \int_a^{a+l} D_n(x-t) f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a-x}^{a+l-x} f(x+z) D_n(-z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} f(x+z) D_n(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{l}{2}} (f(x+z) + f(x-z)) D_n(z)\,\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Odtud dostáváme

$$\begin{aligned} F_{f,n}(x) - A &= \int_0^{\frac{l}{2}} \big(f(x+z) + f(x-z) - 2A\big) D_n(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^\delta \cdots + \int_\delta^{\frac{l}{2}} \cdots =: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Stačí už jen dokázat, že $I_2 \to 0$ pro $n \to \infty$. Tento výsledek plyne z druhé části Lemmatu o vlastnostech Dirichletova jádra (Lemma 19.3.13), neboť funkce $\sin(\frac{\pi}{l}z)$ je odražená od nuly na množině $(\delta, \frac{l}{2})$, a proto funkce

$$\begin{aligned} &\chi_{(\delta,\frac{l}{2})}\big(f(x+z) + f(x-z) - 2A\big) \frac{D_n(z)}{\sin(\frac{2\pi}{l}(n+\frac{1}{2})z)} \\ &= \frac{\chi_{(\delta,\frac{l}{2})}\big(f(x+z) + f(x-z) - 2A\big)}{l \sin(\frac{\pi}{l}z)} \end{aligned}$$

leží v $L^1((-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}))$. □

Kombinací Věty o lokalizaci (Věta 19.3.14) a druhé části Lemmatu o vlastnostech Dirichletova jádra (Lemma 19.3.13) se dá snadno obdržet následující jednoduché kritérium.

Věta 19.3.15 (Diniho kritérium). *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$, $f \in L^1((a, a+l))$, f je l-periodická a $x \in \mathbb{R}$. Nechť existují $\delta > 0$ a $A \in \mathbb{R}$ taková, že*

$$\int_0^\delta \frac{|f(x+z) + f(x-z) - 2A|}{z} \,\mathrm{d}z$$

konverguje. Pak $F_f(x) = A$.

Důkaz. Nechť $\delta \in (0, \frac{l}{2})$ je jako v předpokladech věty. Funkce $\frac{z}{\sin(\frac{\pi}{l} z)}$ je omezená na $(0, \delta)$, a proto máme

$$\frac{f(x+z) + f(x-z) - 2A}{\sin(\frac{\pi}{l} z)} = \frac{f(x+z) + f(x-z) - 2A}{z} \frac{z}{\sin(\frac{\pi}{l} z)} \in L^1((0, \delta)).$$

Díky tomu z druhé části Lemmatu o vlastnostech Dirichletova jádra (Lemma 19.3.13) plyne

$$\int_0^\delta (f(x+z) + f(x-z) - 2A) D_n(z) \,\mathrm{d}z \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Odtud za pomoci Věty o lokalizaci (Věta 19.3.14) dostáváme dokazovaný výsledek. □

Nyní Větu o lokalizaci využijeme k získání hlavního výsledku o bodovém chování součtu Fourierovy řady.

Věta 19.3.16 (O konvergenci Fourierovy řady). *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$, f je l-periodická, f' existuje v intervalu $(a, a+l)$ až na konečně mnoho bodů, f a f' jsou po částech spojité na $[a, a+l]$. Pak pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí*

$$F_f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Pokud je navíc f spojitá na jistém intervalu $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, pak dokonce platí

$$F_{f,n} \rightrightarrows f \qquad \text{na } (\alpha + \delta, \beta - \delta)$$

pro každé $\delta \in (0, \frac{\beta - \alpha}{2})$.

Důkaz bodové konvergence z předchozí věty je poměrně snadnou aplikací Diniho kritéria (Věta 19.3.15). Část o stejnoměrné konvergenci však vyžaduje důkladnou přípravu, na kterou se nyní zaměříme.

Lemma 19.3.17 (O vlivu translace na Fourierovy řady). *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$, $f \in L^1((a, a+l))$, f je l-periodická a $b > 0$. Položme $g(x) := f(x+b)$ na $\mathbb{R}$. Pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí*

$$F_{g,n}(x) = F_{f,n}(x+b).$$

Speciálně pokud $F_{f,n} \rightrightarrows F_f$ na $\mathbb{R}$, pak $F_{g,n} \rightrightarrows F_g$ na $\mathbb{R}$.

Důkaz. Vliv translace si stačí ukázat na jednotlivých sčítancích Fourierovy řady. Nechť $k \in \mathbb{N}$. Pak k-tý sčítanec Fourierovy řady funkce g má tvar

$$\frac{2}{l}\int_a^{a+l} g(t)\cos\Big(\frac{2k\pi}{l}t\Big)\,\mathrm{d}t\cos\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big) + \frac{2}{l}\int_a^{a+l} g(t)\sin\Big(\frac{2k\pi}{l}t\Big)\,\mathrm{d}t\sin\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)$$

$$= \frac{2}{l}\int_a^{a+l} f(t+b)\Big(\cos\Big(\frac{2k\pi}{l}t\Big)\cos\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big) + \sin\Big(\frac{2k\pi}{l}t\Big)\sin\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\Big)\,\mathrm{d}t =$$

$$\frac{2}{l}\int_{a+b}^{a+l+b} f(s)\Big(\cos\Big(\frac{2k\pi}{l}(s-b)\Big)\cos\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big) + \sin\Big(\frac{2k\pi}{l}(s-b)\Big)\sin\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\Big)\,\mathrm{d}s$$

$$= \frac{2}{l}\int_a^{a+l} f(s)\Big(\cos\Big(\frac{2k\pi}{l}(s-b)\Big)\cos\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big) + \sin\Big(\frac{2k\pi}{l}(s-b)\Big)\sin\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\Big)\,\mathrm{d}s$$

$$= \frac{2}{l}\int_a^{a+l} f(s)\Big(\cos\Big(\frac{2k\pi}{l}s\Big)\cos\Big(\frac{2k\pi}{l}(x+b)\Big) + \sin\Big(\frac{2k\pi}{l}s\Big)\sin\Big(\frac{2k\pi}{l}(x+b)\Big)\Big)\,\mathrm{d}s$$

$$= \frac{2}{l}\int_a^{a+l} f(t)\cos\Big(\frac{2k\pi}{l}t\Big)\,\mathrm{d}t\cos\Big(\frac{2k\pi}{l}(x+b)\Big)$$
$$+ \frac{2}{l}\int_a^{a+l} f(t)\sin\Big(\frac{2k\pi}{l}t\Big)\,\mathrm{d}t\sin\Big(\frac{2k\pi}{l}(x+b)\Big),$$

kde jsme v předposledním kroku využili rovnost

$$\cos(\alpha-\beta)\cos\gamma + \sin(\alpha-\beta)\sin\gamma = \cos\alpha\cos(\beta+\gamma) + \sin\alpha\sin(\beta+\gamma),$$

která se snadno ověří ze součtových vzorců. □

Dále potřebujeme zkonstruovat l-periodickou funkci spojitou na $(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2})$, mající skok v bodě $\frac{l}{2}$ takovou, že její Fourierova řada konverguje stejnoměrně na $[-\frac{l}{2} + \delta, \frac{l}{2} - \delta]$ pro všechna $\delta \in (0, \frac{l}{2})$.

Příklad 19.3.18. Nechť $l > 0$ a $W\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je l-periodická funkce definovaná předpisem

$$W(x) := \begin{cases} x & \text{pro } x \in (-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}) \\ 0 & \text{pro } x = \frac{l}{2}. \end{cases}$$

Spočítejme Fourierovy koeficienty funkce W. Díky l-periodicitě a lichosti funkce W máme $a_k = 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dále pro každé $k \in \mathbb{N}$ dostáváme

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{4}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} x\sin\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{4}{l}\Big[x\frac{l}{2k\pi}\cos\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\Big]_0^{\frac{l}{2}} + \frac{4}{l}\frac{l}{2k\pi}\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{-l}{k\pi}\cos(k\pi) + \frac{4}{l}\Big(\frac{l}{2k\pi}\Big)^2\Big[\sin\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\Big]_0^{\frac{l}{2}} = \frac{l}{\pi}\frac{(-1)^{k+1}}{k}. \end{aligned}$$

Odtud

$$F_W(x) = \frac{l}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big).$$

Zafixujme $\delta \in (0, \frac{l}{2})$. Dále si povšimněme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\sin(\frac{2k\pi}{l}x)$ má stejně stejnoměrně omezené částečné součty na $(-\frac{l}{2}+\delta, \frac{l}{2}-\delta)$. To plyne třeba z toho, že

$$(-1)^{k+1}\sin\left(\tfrac{2k\pi}{l}x\right) = -\cos(k\pi)\sin\left(\tfrac{2k\pi}{l}x\right) = -\sin\left(k\pi\left(\tfrac{2x}{l}+1\right)\right)$$

a o funkcích $\sin(kt)$ z kapitoly o stejnoměrné konvergenci víme, že mají stejně stejnoměrně omezené částečné součty na $[\tau, 2\pi-\tau]$ pro libovolné $\tau \in (0, \pi)$.

Podle Dirichletova kritéria pro stejnoměrnou konvergenci (Věta 14.2.10) proto dostáváme

$$F_{W,n} \rightrightarrows F_W \qquad \text{na } [-\tfrac{l}{2}+\delta, \tfrac{l}{2}-\delta].$$

Důkaz Věty o konvergenci Fourierovy řady (Věta 19.3.7). Nejprve se věnujme bodové konvergenci. Výsledek nám dá Diniho kritérium (Věta 19.3.15), pokud dokážeme, že

$$h(z) := \frac{f(x+z)+f(x-z)-f(x+)-f(x-)}{z} \in L^1((0,\delta)).$$

Za tím účelem si stačí zapsat

$$h(z) = h_1(z) + h_2(z) := \frac{f(x+z)-f(x+)}{z} + \frac{f(x-z)-f(x-)}{z}$$

a ukázat, že dokážeme najít $\delta > 0$ takové, že funkce h_1, h_2 jsou omezené na $(0,\delta)$. Zabývejme se funkcí h_1. Protože f a f' jsou po částech spojité, existují limity $f(x+)$ a $f'(x+)$. Díky tomu s využitím l'Hospitalova pravidla dostáváme

$$\lim_{z\to 0_+}\frac{f(x+z)-f(x+)}{z} = \lim_{z\to 0_+} f'(x+z) = f'(x+) \in \mathbb{R}.$$

Odtud již plyne omezenost funkce h_1 na jistém pravém okolí počátku. S funkcí h_2 naložíme podobně. Tím jsme završili důkaz bodové konvergence.

Nyní se věnujme konvergenci stejnoměrné. Nejprve uvažujme jednoduchý případ, kdy f je spojitá na $\mathbb{R}$. Pak jednak podle již dokázané první části věty máme

$$F_{f,n} \to f \qquad \text{bodově na } \mathbb{R}.$$

Zároveň podle Věty o vztahu hladkosti funkce a chování Fourierových koeficientů (Věta 19.3.10) dostáváme

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|) < \infty,$$

a odtud snadno z Weierstrassova kritéria (pro stejnoměrnou konvergenci; Věta 14.2.2) plyne $F_{f,n} \rightrightarrows F_f$ na $\mathbb{R}$. Proto $F_{f,n} \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$.

V obecném případě použijeme právě získaný výsledek na funkci f zmodifikovanou tak, aby byla spojitá. Modifikaci provedeme následujícím způsobem. Nechť

$a \leq a_1 < a_2 < \dots a_m < a+l$ jsou body nespojitosti funkce f na intervalu $[a, a+l)$. Definujme

$$g(x) = f(x) - \sum_{j=1}^{m} \frac{f(a_j+) - f(a_j-)}{l} W(x - a_j + \tfrac{l}{2}),$$

kde W je funkce z Příkladu 19.3.18. Pak g je spojitá na $\mathbb{R}$, a proto $F_{g,n} \rightrightarrows g$ na $\mathbb{R}$. Zároveň podle Příkladu 19.3.18 a Lemmatu o vlivu translace na Fourierovy řady (Lemma 19.3.17) víme, že Fourierovy řady odpovídající jednotlivým funkcím $W(x - a_j + \frac{l}{2})$ konvergují stejnoměrně k $W(x - a_j + \frac{l}{2})$ na každém uzavřeném podintervalu množiny $\mathbb{R} \setminus \{a_j + nl\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Z aritmetiky stejnoměrné konvergence proto dostáváme dokazovaný výsledek. □

Již delší dobu jsme čtenáři dlužni důkaz Věty o úplnosti trigonometrického systému (Věta 19.3.1). Nyní jsme k němu již dostatečně technicky vybaveni.

Důkaz Věty o úplnosti trigonometrického systému (Věta 19.3.1). Je nutno postupovat velice opatrně, neboť část výsledků uvedených v této kapitole úplnost trigonometrického systému využívá. Jedná se zejména o Větu o vztahu hladkosti funkce a chování Fourierových koeficientů (Věta 19.3.10), kde jsme sice stejnoměrnou konvergenci uvažovaných funkčních řad dostali z teorie stejnoměrné konvergence, ale za identifikaci limity vděčíme právě úplnosti trigonometrického systému. Zmíněnou Větu o vztahu hladkosti funkce a chování Fourierových koeficientů ve svém důkazu využila také Věta o konvergenci Fourierovy řady (Věta 19.3.16). Ta však využila jen informaci o kvalitě konvergence, identifikaci limity jsme získali „nastřelením“, když jsme při aplikaci Věty o lokalizaci (Věta 19.3.14) položili $A := \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

Přistupme k důkazu úplnosti trigonometrického systému. V prostoru $L^2((a, a+l))$ jsou husté funkce z $\mathcal{D}((a, a+l))$. Každé takové funkci $g \in \mathcal{D}((a, a+l))$ přiřaďme její Fourierovu řadu. Podle Věty o konvergenci Fourierovy řady (Věta 19.3.16) zmíněná Fourierova řada konverguje stejnoměrně k funkci g, tedy

$$F_{g,n} \rightrightarrows F_g = g \qquad \text{na } [a, a+l].$$

Protože stejnoměrná konvergence na $[a, a+l]$ implikuje konvergenci v $L^2((a, a+l))$, dostali jsme

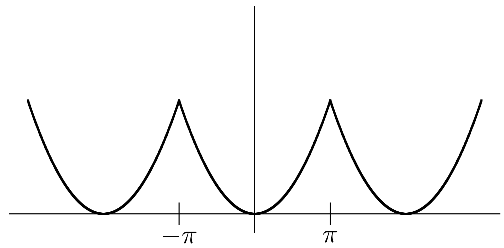
$$F_{g,n} \to g \qquad \text{v } L^2((a, a+l)).$$

Proto konečné lineární kombinace prvků trigonometrického systému jsou husté v $L^2((a, a+l))$. Odtud podle Věty o charakterizaci úplných systémů (Věta 19.2.12) plyne úplnost trigonometrického systému v $L^2((a, a+l))$. □

Příklad 19.3.19. (i) Uvažujme 2π-periodickou funkci f, která na intervalu $[-\pi, \pi]$ splňuje $f(x) = x^2$.

Spočítejme její Fourierovy koeficienty. Díky sudosti jednak máme $b_k = 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$. Dále

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \frac{\pi^3}{3} = \frac{2}{3}\pi^2$$



Obrázek 19.1: Při volbě $l = 2\pi$ je přirozené teorii Fourierových řad aplikovat na 2π-periodické funkce, jako je zde funkce x^2 rozšířená 2π-periodicky z intervalu $[-\pi, \pi]$.

a pro všechna $k \in \mathbb{N}$ máme

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\Big[x^2\frac{\sin(kx)}{k}\Big]_0^\pi - \frac{4}{k\pi}\int_0^\pi x\sin(kx)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{4}{k\pi}\int_0^\pi x\sin(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{k\pi}\Big[x\frac{\cos(kx)}{k}\Big]_0^\pi - \frac{4}{k^2\pi}\int_0^\pi \cos(kx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{k\pi}\pi\frac{\cos(k\pi)}{k} - 0 - \frac{4}{k^2\pi}\Big[\frac{\sin(kx)}{k}\Big]_0^\pi = (-1)^k\frac{4}{k^2}. \end{aligned}$$

Dostáváme

$$F_f(x) = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{k=1}^\infty (-1)^k\frac{4}{k^2}\cos kx \qquad \text{na } \mathbb{R}.$$

Navíc díky spojitosti funkce f všude na $\mathbb{R}$ platí $F_f = f$ na $\mathbb{R}$ a Fourierova řada konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$. Zvolíme-li $x = \pi$, dostáváme

$$\pi^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{k=1}^\infty (-1)^k\frac{4}{k^2}\cos k\pi = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{k=1}^\infty \frac{4}{k^2}.$$

Odtud

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Povšimněme si ještě, že řada

$$\sum_{k=1}^\infty k^n(|a_k| + |b_k|) = 4\sum_{k=1}^\infty \frac{k^n}{k^2}$$

konverguje pro $n = 0$ a nekonverguje pro žádné $n \in \mathbb{N}$. To je v souladu s Větou o vztahu hladkosti funkce a chování Fourierových koeficientů (Věta 19.3.10), neboť f je spojitá na $\mathbb{R}$ a f' je po částech spojitá na $[-\pi, \pi]$.
(ii) Uvažujme 2π-periodickou funkci f, která na intervalu $[-\pi, \pi]$ splňuje $f(x) =$

x^4. Spočítejme její Fourierovy koeficienty. Díky sudosti jednak máme $b_k = 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$. Dále

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^4 \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\frac{\pi^5}{5} = \frac{2}{5}\pi^4$$

a pro všechna $k \in \mathbb{N}$ máme (per partes provedeme jen dvakrát a na konci výpočtu využijeme již spočítaný integrál z první části příkladu)

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^4\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\Big[x^4\frac{\sin(kx)}{k}\Big]_0^\pi - \frac{8}{k\pi}\int_0^\pi x^3\sin(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{8}{k\pi}\int_0^\pi x^3\sin(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{8}{k\pi}\Big[x^3\frac{\cos(kx)}{k}\Big]_0^\pi - \frac{24}{k^2\pi}\int_0^\pi x^2\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{8}{k\pi}\pi^3\frac{\cos(k\pi)}{k} - 0 - \frac{12}{k^2}\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= (-1)^k\frac{8\pi^2}{k^2} - (-1)^k\frac{48}{k^4}.
\end{aligned}$$

Dostáváme

$$F_f(x) = \frac{1}{5}\pi^4 + \sum_{k=1}^\infty\Big((-1)^k\frac{8\pi^2}{k^2} - (-1)^k\frac{48}{k^4}\Big)\cos kx \qquad \text{na } \mathbb{R}.$$

Navíc díky spojitosti funkce f všude na $\mathbb{R}$ platí $F_f = f$ na $\mathbb{R}$ a Fourierova řada konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$. Zvolíme-li $x = \pi$, dostáváme

$$\pi^4 = \frac{1}{5}\pi^4 + \sum_{k=1}^\infty\Big((-1)^k\frac{8\pi^2}{k^2} - (-1)^k\frac{48}{k^4}\Big)\cos k\pi = \frac{1}{5}\pi^4 + \sum_{k=1}^\infty\Big(\frac{8\pi^2}{k^2} - \frac{48}{k^4}\Big).$$

Odtud díky identitě $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ získané v první části příkladu máme

$$\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^4} = \frac{1}{48}\Big(8\pi^2\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^2} - \frac{4}{5}\pi^4\Big) = \frac{1}{48}\Big(\frac{8}{6} - \frac{4}{5}\Big)\pi^4 = \frac{\pi^4}{90}.$$

Rozmyslete si, proč dvojím zderivováním zde získané Fourierovy řady nezískáme násobek Fourierovy řady z první části příkladu.

Již jsme se zabývali derivováním Fourierových řad. Stejně přirozené je zabývat se jejich integrací.

Věta 19.3.20 (O integraci Fourierových řad)**.** *Nechť $l > 0$, f je l-periodická a po částech spojitá na intervalu $(0, l)$. Fourierovy koeficienty funkce f značme a_k a b_k. Označme*

$$g(x) := \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{a_0}{2}x.$$

Pak g je l-periodická spojitá funkce, existuje vlastní g' všude v $(0, l)$ až na konečný počet bodů a je po částech spojitá na $[0, l]$. Dále platí

$$F_g(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty\Big(A_k\cos\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big) + B_k\sin\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\Big),$$

kde

$$\frac{A_0}{2} = \frac{l}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k}, \qquad A_k = -\frac{l}{2\pi}\frac{b_k}{k} \qquad a \qquad B_k = \frac{l}{2\pi}\frac{a_k}{k}$$

pro všechna $k \in \mathbb{N}$*. Navíc* $F_{g,n} \rightrightarrows g$ *na* $\mathbb{R}$*.*

Důkaz. Z teorie Riemannova integrálu víme, že uvedený integrál existuje, výsledná funkce je spojitá a ve všech bodech spojitosti funkce f platí $(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t)' = f(x)$. Následně z Věty o konvergenci Fourierovy řady (Věta 19.3.16) dostáváme $F_{g,n} \rightrightarrows g$ na $\mathbb{R}$ a zbývá nám už jen zjistit tvar Fourierových koeficientů funkce g.

Zabývejme se nyní speciálním případem, kdy f je navíc spojitá na $(0, l)$. Pak máme pro všechna $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
A_k &= \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\cos\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{l}\Big[g(x)\frac{l}{2k\pi}\sin\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\Big]_0^l - \frac{2}{l}\frac{l}{2k\pi}\int_0^l \Big(f(x)-\frac{a_0}{2}\Big)\sin\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{2}{l}\frac{l}{2k\pi}\int_0^l f(x)\sin\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\,\mathrm{d}x = -\frac{l}{2k\pi}b_k,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_k &= \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{l}\Big[-g(x)\frac{l}{2k\pi}\cos\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\Big]_0^l + \frac{2}{l}\frac{l}{2k\pi}\int_0^l \Big(f(x)-\frac{a_0}{2}\Big)\cos\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{l}\frac{l}{2k\pi}\int_0^l f(x)\cos\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\,\mathrm{d}x = \frac{l}{2k\pi}a_k.
\end{aligned}$$

V obecném případě, kdy f je pouze po částech spojitá na $[0, l]$, integrály rozdělíme na

$$\int_0^l \cdots = \int_0^{a_1} \cdots + \int_{a_1}^{a_2} \cdots + \cdots + \int_{a_m}^{l} \cdots,$$

kde $0 < a_1 < \cdots < a_m < l$ jsou body nespojitosti funkce f. Pod jednotlivými integrály můžeme provést per partes a pak integrály sečteme. Díky spojitosti funkce g na $\mathbb{R}$ se všechny hraniční členy opět vyruší, a proto dostaneme stejný výsledek jako ve speciálním případě.

Při určování konstanty A_0 je výhodné použít Větu o konvergenci Fourierovy řady (Věta 19.3.16), neboť

$$0 = \int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t - 0 = g(0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos(0k) = \frac{A_0}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{l}{2k\pi}b_k.$$

Odtud $\frac{A_0}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{l}{2k\pi}b_k$. □

Poznámka 19.3.21. (i) V případě, kdy $\int_0^l f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, předchozí věta říká, že Fourierova řada příslušející zobecněné primitivní funkci k funkci f je rovna funkční

řadě, kterou získáme integrací člen po členu z Fourierovy řady F_f.
(ii) Ve speciálním případě $l = 2\pi$ máme úhlednější vzorce

$$\frac{A_0}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}, \qquad A_k = -\frac{b_k}{k} \qquad \text{a} \qquad B_k = \frac{a_k}{k}.$$

19.4 Funkce s konečnou variací, absolutně spojité funkce, hlubší výsledky o bodovém chování Fourierových řad

U velké části výsledků uvedených výše je možné zeslabit předpoklady. Typicky se jedná o předpoklad po částech spojitosti funkce či derivace. K nahrazení takových předpokladů slabšími potřebujeme zavést dvě nové třídy funkcí: funkce s *konečnou variací* a *absolutně spojité* funkce. Nové třídy funkcí mají řadu zajímavých a užitečných vlastností. Ty si zde budeme uvádět nejčastěji bez důkazu (látka se podrobně přednáší na oboru matematika; všechny chybějící důkazy je možné najít v knihách [Ja DPII] a [Ja IPII]; některá zde uvedená tvrzení je nutné poskládat z většího počtu výsledků uvedených ve jmenovaných knihách).

19.4.1 Nové třídy funkcí

Začneme definicí dvou nových pojmů.

Definice 19.4.1 (Variace funkce, funkce s konečnou variací)**.** Nechť $[a,b] \subset \mathbb{R}$ a $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definovaná na $[a,b]$. Pak veličinu

$$V_a^b(f) := \sup_D \sum_{j=1}^{n_D} |f(x_j) - f(x_{j-1})|,$$

kde supremum počítáme přes všechna konečná dělení intervalu $[a,b]$ vyjádřená jako $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n_D} = b$, se nazývá *variace* funkce f na intervalu $[a,b]$. Jestliže $V_a^b(f) < \infty$, říkáme, že f má *konečnou variaci* na $[a,b]$. Definujme dále funkci

$$v(x) := V_a^x(f) \qquad \text{pro } x \in [a,b].$$

Příklad 19.4.2. (i) Funkce signum má na intervalech neobsahujících počátek nulovou variaci a na intervalech obsahujících počátek jako vnitřní bod variaci rovnou dvěma.
(ii) Funkce sinus má na intervalu $[0,2\pi]$ variaci rovnou čtyřem.

Poznámka 19.4.3. (i) Je-li f monotonní na $[a,b]$, pak $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$.
(ii) Každá funkce s konečnou variací na $[a,b]$ je omezená na $[a,b]$.

Základní vlastnosti právě představených pojmů nám dávají následující věty.

Věta 19.4.4 (O aritmetice funkcí s konečnou variací)**.** *Nechť* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *a* $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mají konečnou variaci na* $[a, b]$*. Pak také funkce* $|f|$*,* fg*,* $f + g$*,* $f - g$*,* $\max\{f, g\}$ *a* $\min\{f, g\}$ *mají konečnou variaci na* $[a, b]$*. Pokud je navíc funkce* g *odražená od nuly na* $[a, b]$*, má také funkce* $\frac{f}{g}$ *konečnou variaci na* $[a, b]$*.*

Věta 19.4.5 (O rozkladu funkce s konečnou variací)**.** *Nechť* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *a* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je definovaná na* $[a, b]$*. Pak* f *má konečnou variaci na* $[a, b]$ *právě tehdy, když lze psát*

$$f = f_1 - f_2,$$

kde f_1, f_2 *jsou neklesající funkce na* $[a, b]$*.*

Poznámka 19.4.6. Díky předchozí větě má každá funkce s konečnou variací ve všech bodech intervalu $[a, b]$ konečné jednostranné limity.

Věta 19.4.7 (O spojitosti funkce s konečnou variací)**.** *Nechť* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *a* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *má konečnou variaci na* $[a, b]$*.*
(i) *Nechť* $x_0 \in [a, b)$*. Pak* f *je spojitá zprava v bodě* x_0 *právě tehdy, když funkce* v *je spojitá zprava v bodě* x_0*.*
(ii) *Nechť* $x_0 \in (a, b]$*. Pak* f *je spojitá zleva v bodě* x_0 *právě tehdy, když funkce* v *je spojitá zleva v bodě* x_0*.*

Věta 19.4.8 (O rozkladu spojité funkce s konečnou variací)**.** *Nechť* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *a* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je spojitá na* $[a, b]$*. Pak* f *má konečnou variaci na* $[a, b]$ *právě tehdy, když lze psát*

$$f = f_1 - f_2,$$

kde f_1, f_2 *jsou neklesající spojité funkce na* $[a, b]$*.*

Definice 19.4.9 (Absolutně spojitá funkce)**.** Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$ a $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definovaná na $[a, b]$. Řekneme, že funkce f je *absolutně spojitá* na $[a, b]$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ s následující vlastností. Jestliže $n \in \mathbb{N}$ a $\{(a_j, b_j)\}_{j=1}^n$ je soubor po dvou disjunktních podintervalů intervalu $[a, b]$, pak

$$\sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon.$$

Poznámka 19.4.10. (i) Každá absolutně spojitá funkce je zřejmě stejnoměrně spojitá.
(ii) Snadno se ověří, že Cantorova funkce je stejnoměrně spojitá, ale není absolutně spojitá (při zadaném libovolném $\delta \in (0, 1)$ umíme z intervalu $[0, 1]$ odebrat konečný počet intervalů, na nichž je Cantorova funkce konstantní a součet jejich délek je větší než $1 - \delta$. Zbylých intervalů je konečný počet, součet jejich délek je menší než δ a Cantorova funkce zde postupně zvětší svoji funkční hodnotu o jedničku).
(iii) Každá lipschitzovská funkce je zřejmě absolutně spojitá.
(iv) Funkce $\sqrt{x}$ není lipschitzovská na $[0, 1]$. Snadno se však nahlédne, že je zde absolutně spojitá.
(v) Každá absolutně spojitá funkce má konečnou variaci na $[a, b]$.

Věta 19.4.11 (O aritmetice absolutně spojitých funkcí)**.** *Nechť* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *a* $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jsou absolutně spojité na* $[a,b]$*. Pak také funkce* $|f|$, fg, $f+g$, $f-g$, $\max\{f,g\}$ *a* $\min\{f,g\}$ *jsou absolutně spojité na* $[a,b]$*. Pokud je navíc funkce* g *odražená od nuly na* $[a,b]$*, je také funkce* $\frac{f}{g}$ *je absolutně spojitá na* $[a,b]$*.*

Věta 19.4.12 (O derivaci monotonní funkce)**.** *Nechť* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *a* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je neklesající na* $[a,b]$*. Pak*
(i) f *je lebesgueovsky měřitelná na* (a,b)
(ii) *skoro všude na* (a,b) *existuje vlastní* f'
(iii) f' *je lebesgueovsky měřitelná na* (a,b)
(iv) $\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x \le f(b) - f(a)$*.*

Poznámka 19.4.13. (i) Typický příklad ostré nerovnosti ve čtvrté části předchozí věty nabízí funkce signum na intervalu $[-1,1]$. Derivace je všude nulová až na jediný bod, kde je nekonečná. Protože bod má nulovou Lebesgueovu míru, integrál z derivace je nulový.
(ii) Ani u spojité funkce nemusí ve čtvrté části platit rovnost. Vzpomeňte si na Cantorovu funkci, která má skoro všude nulovou derivaci. Pro Cantorovu funkci platí $f(1) - f(0) = 1$, ale $\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Protože se funkce s konečnou variací dá napsat jako rozdíl dvou neklesajících funkcí, okamžitě z předešlé věty dostáváme následující výsledek.

Důsledek 19.4.14. *Nechť* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *a* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *má konečnou variaci na* $[a,b]$*. Pak skoro všude na* (a,b) *existuje vlastní* f' *a* $f' \in L^1((a,b))$*.*

Věta 19.4.15 (O integrálu z L^1-funkce)**.** *Nechť* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *a* $f \in L^1((a,b))$*. Položme*
$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{pro všechna } x \in [a,b].$$
Pak
(i) *funkce* F *je absolutně spojitá na* $[a,b]$
(ii) *ve všech bodech* $x \in [a,b)$*, kde* f *je spojitá zprava, existuje* $F'_+(x)$ *a platí* $F'_+(x) = f(x)$*; podobně pro derivaci zleva*
(iii) *ve skoro všech bodech* $x \in (a,b)$ *existuje* $F'(x)$ *a platí v nich* $F'(x) = f(x)$*.*

Věta 19.4.16 (O charakterizaci absolutně spojitých funkcí)**.** *Nechť* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *a* $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je definovaná na* $[a,b]$*. Pak následující výroky jsou ekvivalentní*
(i) *funkce* F *je absolutně spojitá na* $[a,b]$
(ii) *skoro všude na* (a,b) *existuje vlastní* F', $F' \in L^1((a,b))$ *a*
$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{pro všechna } x \in [a,b]$$
(iii) *existuje* $f \in L^1((a,b))$ *taková, že*
$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{pro všechna } x \in [a,b].$$

Věta 19.4.17 (Per partes pro absolutně spojité funkce)**.** *Nechť* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *a* $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jsou absolutně spojité na* $[a,b]$*. Pak*

$$\int_a^b fg' \,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'g \,\mathrm{d}x.$$

19.4.2 Hlubší výsledky o bodovém chování Fourierových řad

Nyní si uvedeme výsledky z teorie Fourierových řad, jejichž důkazy využívají výše uvedenou teorii o absolutně spojitých funkcích a funkcích s konečnou variací.

Věta 19.4.18 (O vztahu hladkosti funkce a chování Fourierových koeficientů (verze s absolutní spojitostí))**.** *Nechť* $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je* l*-periodická,* $f \in C^n(\mathbb{R})$, $f^{(n)}$ *je absolutně spojitá na* $[a, a+l]$ *a* $f^{(n+1)} \in L^2((a, a+l))$*. Pak*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^n(|a_k| + |b_k|) < \infty.$$

Dále $F_{f,n} \rightrightarrows f$ *na* $[a, a+l]$*, řadu* F_f *lze až* n*-krát derivovat člen po členu, výsledné řady konvergují stejnoměrně na* $[a, a+l]$ *k odpovídajícím derivacím funkce* f *a jsou jejich Fourierovými řadami.*

Poznámka 19.4.19. (i) Znění této věty, jako jediné z vět zde uvedených, se nenachází v citované literatuře. Důkaz je však téměř totožný s důkazem naší původní verze Věty o vztahu hladkosti funkce a chování Fourierových koeficientů (Věta 19.3.10), který byl založen na výpočtu používajícím integraci per partes. Integrace per partes je totiž přípustná i pro absolutně spojité funkce.
(ii) Naše nová verze Věty o vztahu hladkosti funkce a chování Fourierových koeficientů je oproti původní verzi silnější v tom, že již striktně nepožaduje omezenost $f^{(n+1)}$.

Věta 19.4.20 (O integraci Fourierových řad (absolutně spojitá verze))**.** *Nechť* $l > 0$, f *je* l*-periodická a* $f \in L^1((0,l))$*. Fourierovy koeficienty funkce* f *značme* a_k *a* b_k*. Označme*

$$g(x) := \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{a_0}{2}x.$$

Pak funkce g *je* l*-periodická, absolutně spojitá na* $[0,l]$*, skoro všude v* $(0,l)$ *existuje vlastní* g' *a v odpovídajících bodech platí* $g'(x) = f(x)$*. Dále*

$$F_g(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(A_k \cos\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big) + B_k \sin\Big(\frac{2k\pi}{l}x\Big)\Big),$$

kde

$$\frac{A_0}{2} = \frac{l}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k}, \qquad A_k = -\frac{l}{2\pi}\frac{b_k}{k} \qquad a \qquad B_k = \frac{l}{2\pi}\frac{a_k}{k}$$

pro všechna $k \in \mathbb{N}$*. Navíc* $F_{g,n} \rightrightarrows g$ *na* $\mathbb{R}$*.*

Věta 19.4.21 (Dirichlet–Jordanovo kritérium)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$, f je l-periodická, $f \in L^1((a, a+l))$ a f má konečnou variaci na $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$.*
(i) *Pak v každém bodě $x \in (\alpha, \beta)$ platí $F_f(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.*
(ii) *Je-li navíc f spojitá na $[\alpha, \beta]$, pak pro všechna $\delta \in (0, \frac{\beta-\alpha}{2})$ platí $F_{f,n} \rightrightarrows f$ na $[\alpha+\delta, \beta-\delta]$.*

Věta 19.4.22 (O funkci s triviální Fourierovou řadou)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$, f je l-periodická, $f \in L^1((a, a+l))$ a f má všechny Fourierovy koeficienty nulové. Pak $f = 0$ skoro všude na $\mathbb{R}$.*

Konečně formulujme Carlesonovu větu, kterou jsme zmiňovali již dříve.

Věta 19.4.23 (Carlesonova věta)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$, f je l-periodická funkce a $f \in L^2((a, a+l))$. Potom*

$$\lim_{n\to\infty} F_{f,n}(x) = f(x)$$

pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Důkaz této věty je poměrně obtížný. Původní důkaz pochází od Lennarta Carlesona [Ca] z roku 1966, později byl zjednodušen v [La]. Hlavním výdobytkem této věty je, že konvergence skoro všude platí pro celou řadu a není nutné vybírat podposloupnost částečných součtů.

Dalším zajímavým tématem je otázka, zda částečné součty Fourierovy řady, která byla konstruována tak, abychom měli co nejlepší aproximační vlastnosti v prostoru $L^2((a, a+l))$, mají rovněž nejlepší vlastnosti z hlediska bodové a stejnoměrné konvergence. Zde je odpověď negativní. Můžeme se totiž inspirovat našimi zkušenosti s cesarovskými součty (připomeňme si, že nahradíme-li konvergentní posloupnost jejími postupnými průměry, nová posloupnost má stejnou limitu, ale někdy se stane, že nová posloupnost konverguje, i když původní posloupnost nekonvergovala) a zefektivnit náš přístup tím, že částečné součty $F_{f,n}$ nahradíme jejich průměry

$$\sigma_{f,n} := \frac{F_{f,1} + F_{f,2} + \cdots + F_{f,n}}{n}.$$

Výsledek o konvergenci pak dostáváme za podstatně slabších předpokladů na funkci f, než měly výsledky pracující se standardními částečnými součty.

Věta 19.4.24 (Fejérova věta)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$, f je l-periodická funkce a $f \in L^1((a, a+l))$.*
(i) *Pak v každém bodě $x \in \mathbb{R}$, ve kterém je limita $\lim_{t\to 0} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}$ konečná, platí*

$$\sigma_{f,n}(x) \overset{n\to\infty}{\to} \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}.$$

(ii) *Pokud je navíc f spojitá na $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ a v krajních bodech je spojitá z obou stran, pak*

$$\sigma_{f,n} \rightrightarrows f \qquad \text{na } [\alpha, \beta].$$

Příklad 19.4.25. V některých fyzikálních úvahách se nahrazuje příslušná funkce pouze několika prvními členy Fourierovy řady. Ukažme si, že v takovém případě musíme být velice obezřetní, protože Fourierovy řady se vzhledem k bodové (či dokonce stejnoměrné) konvergenci nechovají dobře na okolí nespojitosti funkce, kterou do řady rozvíjíme. Má-li funkce f v nějakém bodě skok, pak hodnoty $F_{f,n}-f$ na okolí tohoto bodu značně oscilují. Maximální výchylky s rostoucím n nemusí jít do nuly, pouze se zmenšují okolí, kde k těmto „velkým“ výchylkám dochází. Tomuto jevu se říká *Gibbsův jev.*

Ukažme, že chyba (tedy maximální překmit) je u zmíněného typu funkcí relativně hodně velká. Jako modelový příklad zvolme funkce signum. Připomeňme si, že v Příkladu 19.3.4 jsme si ukázali, že

$$\operatorname{sign} x = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)}$$

na $L^2((-\pi,\pi))$ a současně, využitím Věty o konvergenci Fourierovy řady (Věta 19.3.16), víme, že řada konverguje lokálně stejnoměrně k dané funkci na $(-\pi,0)$ a na $(0,\pi)$, přičemž v nule konverguje k nule (což je zřejmé z tvaru Fourierovy řady).

Budeme-li studovat částečné součty této řady, máme

$$\begin{aligned} {F_{\operatorname{sign} x,2n+1}}'(x) &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\cos((2k+1)x) = \frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\Big(\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k+1)x}\Big) \\ &= \frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x2n}-1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-1}\Big) = \frac{4}{\pi}\frac{\cos(2nx)-1+\mathrm{i}\sin(2nx)}{2\mathrm{i}\sin x} = \frac{2}{\pi}\frac{\sin(2nx)}{\sin x}. \end{aligned}$$

Proto

$$F_{\operatorname{sign} x,2n+1}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin(2nt)}{\sin t}\,\mathrm{d}t.$$

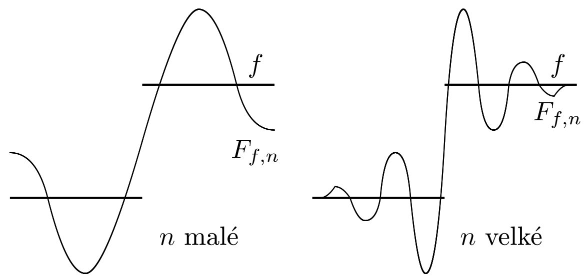
Odtud $F'_{\operatorname{sign} x,2n+1}(x)=0$ pro $2nx=k\pi$ a $k=0,1,\dots,2n-1$ a globální maximum se nabývá pro $k=1$, tedy v bodě $x_n=\frac{\pi}{2n}$ (neboť funkce roste na intervalu $(0,\frac{\pi}{2n})$, dále pak klesá, znovu roste atd., přičemž díky výrazu $\sin t$ ve jmenovateli nejvíce naintegrujeme na prvním intervalu). Dále máme

$$F_{\operatorname{sign} x,2n+1}(x_n) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right)}{(2k+1)} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right)}{(2k+1)\frac{\pi}{2n}}\,\frac{\pi}{2n}.$$

Všimněme si, že poslední člen je vlastně (až na poslední člen v součtu, který v limitě půjde k nule) riemannovský součet pro funkci $\frac{\sin t}{t}$ na intervalu $(0,\pi)$ a tato funkce je na daném intervalu riemannovsky integrovatelná, neboť se dá spojitě dodefinovat v nule. Dostáváme

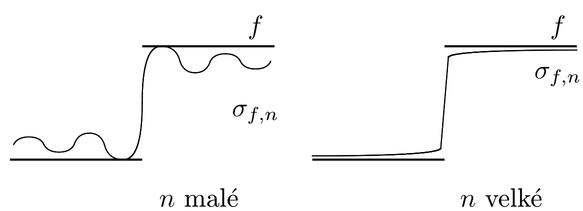
$$\lim_{n\to\infty} F_{\operatorname{sign} x,2n+1}(x_n) = \frac{2}{\pi}(\mathcal{R})\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \in (1.179, 1.18)$$

(poslední integrál se musí spočítat numericky). Vzhledem k tomu, že funkce nabývá hodnot mezi -1 a 1, může být taková chyba v některých případech podstatná. Grafické znázornění tohoto jevu je na Obrázku 19.2.



Obrázek 19.2: Ilustrace ke Gibbsovu jevu. Se zvyšujícím se $n \in \mathbb{N}$ jde $\|F_{f,n} - f\|_2$ do nuly, ale maximální výchylky se nezmenšují.

Poznamenejme ještě, že numerické aproximace naznačují, že pokud u předchozího problému nahradíme klasické částečné součty cesarovskými součty, získáme podstatně lepší aproximace a zbavíme se překmitů, jak je znázorněno na Obrázku 19.3.



Obrázek 19.3: Pokud nahradíme posloupnost $\{F_{f,n}\}_{n=1}^{\infty}$ posloupností $\{\sigma_{f,n}\}_{n=1}^{\infty}$, podle numerických aproximací už k překmitům nedochází.

Kapitola 20

Funkce komplexní proměnné

Reálnou osu jsme již dříve někdy nahrazovali komplexní rovinou. Většinu pojmů matematické analýzy umíme snadno převést do komplexní roviny (kupříkladu Lebesgueův integrál z komplexní funkce definované na nějaké otevřené podmnožině $\mathbb{R}^N$ se definuje po složkách), někdy ale práce s komplexní rovinou vyžaduje podstatně opatrnější přístup než u proměnné reálné (třeba skalární součin na prostoru $L^2(\Omega)$ s komplexními funkcemi se musí zavést jako $(f, g) := \int_\Omega f\overline{g}\,\mathrm{d}x$). Někdy je práce s komplexní rovinou nutná, například při hledání kořenů polynomů. Uspokojivou teorii získáme pouze pokud uvažujeme i případné komplexní kořeny a to i tehdy, jsou-li všechny koeficienty polynomu reálné. Někdy jsme dokonce pracovali i s funkcemi, které byly definovány pro komplexní proměnnou; připomeňme tady komplexní exponenciálu. Kupříkladu při hledání primitivní funkce k funkci $\mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$ je pohodlnější pracovat s identitou $\mathrm{e}^{ax}\sin(bx) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{x(a+\mathrm{i}b)})$ než dvakrát použít integraci per partes. Vzpomeňte si také na hledání fundamentálního systému řešení v teorii lineárních obyčejných diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty.

V této kapitole se budeme soustředit na zobecnění toho, co jsme se naučili pro funkce reálné proměnné, na případ proměnné komplexní. Samozřejmě tyto funkce budou nabývat hodnot v komplexní rovině, protože množina reálných funkcí komplexní proměnné s rozumnými vlastnosti, jako je například diferencovatelnost, je poměrně málo zajímavá.

Hlavním výsledkem této kapitoly budou metody výpočtu integrálů pomocí komplexní analogie k Větě o divergenci (Věta 17.3.6). Zejména speciální struktura komplexních čísel, kterou do nich vnáší operace součin komplexních čísel, bude mít za následek, že výsledky v této kapitole daleko předčí výsledky, které by nám mohla nabídnout zmíněná Věta o divergenci v $\mathbb{R}^2$.

Struktura komplexní roviny má i své stinné stránky. Kupříkladu pojem derivace komplexní funkce jedné komplexní proměnné není přesně totéž, co gradient funkce z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$. Tyto odlišnosti způsobují, že zde budeme muset značnou část teorie budovat vlastně od začátku.

20.1 Komplexní rovina, základní vlastnosti komplexních čísel, Riemannova sféra

Připomeňme, že množinu komplexních čísel jsme zavedli jako

$$\mathbb{C} := \{z = (z_1, z_2) \colon z_1, z_2 \in \mathbb{R}\}$$

s operacemi sčítání a násobení

$$\begin{aligned} z + w &= (z_1, z_2) + (w_1, w_2) := (z_1 + w_1, z_2 + w_2) \\ z \cdot w &= (z_1, z_2) \cdot (w_1, w_2) := (z_1 w_1 - z_2 w_2, z_1 w_2 + z_2 w_1). \end{aligned}$$

Jiná forma zápisu využívá značení $\mathrm{i} := (0, 1)$ a komplexní čísla pak stručně píšeme ve tvaru

$$(z_1, z_2) = z_1(1, 0) + z_2(0, 1) = z_1 + \mathrm{i} z_2.$$

Někdy je také přirozené reprezentovat komplexní čísla pomocí polárních souřadnic. Pak máme

$$z_1 = r\cos\varphi \qquad \text{a} \qquad z_2 = r\sin\varphi.$$

Zde $r = |z| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$ a úhel $\varphi \in \mathbb{R}$ není určen jednoznačně (nejednoznačnost má na svědomí případná aditivní konstanta $2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$). Často se však preferuje, aby φ bylo určené jednoznačně, což zajistíme například tak, že se omezíme na $\varphi \in (-\pi, \pi]$. Úhel φ se většinou značí jako $\arg z$ a nazývá se *argument* komplexního čísla z. K této problematice se ještě vrátíme později.

Připomeňme, že platí

$$z \cdot w = |z| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z} |w| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg w} = |z||w| \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\arg z + \arg w)},$$

kde $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$ pro x, $y \in \mathbb{R}$. Odtud

$$\arg(z \cdot w) = \arg z + \arg w + 2k\pi \qquad \text{pro vhodné } k \in \mathbb{Z}.$$

Pokud $z = z_1 + \mathrm{i} z_2 \in \mathbb{C}$, komplexně sdružené číslo jsme zavedli jako $\overline{z} := z_1 - \mathrm{i} z_2$. Platí $|\overline{z}| = |z|$, $\overline{z} \cdot z = |z|^2$, $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$, $z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\operatorname{Im} z$, kde jsme pro $z = z_1 + \mathrm{i} z_2$ označili $z_1 = \operatorname{Re} z$ a $z_2 = \operatorname{Im} z$. Dále

$$\arg(\overline{z}) = -\arg z + 2k\pi \qquad \text{pro vhodné } k \in \mathbb{Z}.$$

Konečně pro $w \neq 0$ platí

$$\frac{z}{w} = \frac{|z| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z}}{|w| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg w}} = \frac{|z|}{|w|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\arg z - \arg w)}.$$

Na $\mathbb{C}$ se skalární součin zavádí jako

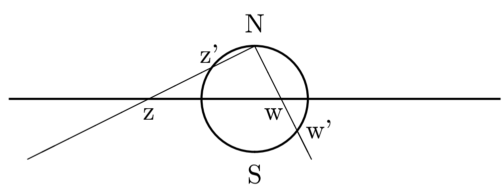
$$(z, w) := z \cdot \overline{w}$$

a s tímto skalárním součinem je $\mathbb{C}$ Hilbertův prostor.

Připomeňme ještě vztahy

$$\begin{aligned} |z+w| &\leq |z| + |w| \\ ||z| - |w|| &\leq |z - w| \\ |z \cdot w| &= |z||w|. \end{aligned}$$

Množina komplexních čísel bývá ztotožňována s jednotkovou sférou v $\mathbb{R}^3$ (takzvaná Riemannova sféra) s vynechaným severním pólem, která je umístěna tak, že komplexní rovina sféru protíná na rovníku a střed sféry odpovídá bodu $0 := 0 + \mathrm{i}0 \in \mathbb{C}$. Tomuto ztotožnění se říká stereografická projekce a je definováno tak, že každému bodu $z \in \mathbb{C}$ přiřadíme průsečík naší sféry a polopřímky vycházející ze severního pólu a procházející bodem z. Body, pro něž platí $|z| = 1$ (tedy leží na rovníku), se zobrazí sami na sebe. Body, pro něž platí $|z| < 1$, se zobrazí na jižní polokouli, přičemž čím blíže jsou k počátku, tím blíže je jejich obraz k jižnímu pólu a samotný počátek se zobrazuje na jižní pól. Body, pro něž platí $|z| > 1$, se zobrazí na severní polokouli, přičemž čím je jejich velikost větší, tím blíže je jejich obraz k severnímu pólu.



Obrázek 20.1: Stereografická projekce.

Množinu $\mathbb{C}$ často rozšiřujeme na $\mathbb{C}^*$ přidáním bodu ∞. Bod ∞ se při stereografické projekci zobrazuje na severní pól Riemannovy sféry. Toto přiřazení umožňuje snáze pochopit, proč pro každou posloupnost $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ splňující $|z_n| \to \infty$ platí $z_n \to \infty$.

Pro $z \in \mathbb{C}$ jsou zavedeny operace

$$z \pm \infty = \infty \qquad \text{a} \qquad \frac{z}{\infty} = 0.$$

Pro $z \in \mathbb{C}^* \setminus \{0\}$ jsou navíc zavedeny operace

$$z \cdot \infty = \infty \qquad \text{a} \qquad \frac{z}{0} = \infty.$$

Nezavádí se $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$ a $\infty \pm \infty$.

Připomeňme, že na $\mathbb{C}$ ani na $\mathbb{C}^*$ nelze zavést úplné uspořádání.

Okolí jsou na $\mathbb{C}^*$ zavedena pomocí předpisu

$$\mathcal{U}_\varepsilon(z) := \begin{cases} \{w \in \mathbb{C} \colon |w - z| < \varepsilon\} & \text{pro } z \in \mathbb{C} \\ \{w \in \mathbb{C}^* \colon |w| > \varepsilon\} & \text{pro } z = \infty. \end{cases}$$

Prstencové okolí bodu z definujeme jako $\mathcal{P}_\varepsilon(x) := \mathcal{U}_\varepsilon(x) \setminus \{x\}$ (tvar okolí jsme si potřebovali ujasnit zejména kvůli tomu, že při konvergenci do nekonečna se nejedná o konvergenci v normě). Konvergence posloupnosti $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}^*$ k prvku $z \in \mathbb{C}^*$ je zavedena podmínkou, že pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $z_n \in \mathcal{U}_\varepsilon(z)$ pro všechna $n > n_0$.

Připomeňme ještě, že odhad

$$\max\{\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z\} \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$$

má za následek, že pro $z \in \mathbb{C}$ platí

$$z_n \overset{n\to\infty}{\to} z \qquad \iff \qquad \operatorname{Re} z_n \overset{n\to\infty}{\to} \operatorname{Re} z \quad \text{a} \quad \operatorname{Im} z_n \overset{n\to\infty}{\to} \operatorname{Im} z.$$

Odtud je například přímo vidět, že $\mathbb{C}$ tvoří spolu s metrikou $\varrho(z,w) = |z - w|$ úplný metrický prostor.

Cvičení 20.1.1. Ukažte, že platí

$$\begin{aligned} z_n \overset{n\to\infty}{\to} 0 \qquad &\iff \qquad \frac{1}{z_n} \overset{n\to\infty}{\to} \infty \\ z_n \overset{n\to\infty}{\to} \infty \qquad &\iff \qquad |z_n| \overset{n\to\infty}{\to} +\infty. \end{aligned}$$

Nyní si uvedeme několik základních definic z teorie (komplexních) funkcí komplexní proměnné.

Definice 20.1.2 (Funkce komplexní proměnné)**.** Nechť $A \subset \mathbb{C}^*$ a funkce $f \colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ je definovaná na A. Pak se f nazývá *funkce komplexní proměnné* a A je jejím definičním oborem.

Příklad 20.1.3. Na $\mathbb{C}$ máme definované třeba funkce e^z, z, $\overline{z}$ a $z^2 = z \cdot z$. Na $\mathbb{C}^*$ můžeme uvažovat třeba konstantní funkci $z \mapsto 1 + \mathrm{i}$.

Definice 20.1.4 (Limita funkce komplexní proměnné)**.** Nechť $a \in \mathbb{C}^*$ je hromadným bodem množiny $A \subset \mathbb{C}^*$, funkce $f \colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ je definovaná na A a $b \in \mathbb{C}^*$. Řekneme, že f má v bodě a *limitu* b, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ s vlastností

$$z \in \mathcal{P}_\delta(a) \cap A \qquad \Longrightarrow \qquad f(z) \in \mathcal{U}_\varepsilon(b).$$

V takovém případě píšeme $\lim_{\substack{z\to a \\ z\in A}} f(z) = b$ nebo stručněji (je-li množina A jasně daná) $\lim_{z\to a} f(z) = b$.

Definice 20.1.5 (Spojitost funkce komplexní proměnné)**.** Nechť $a \in A \subset \mathbb{C}^*$ a funkce $f \colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ je definovaná na A. Řekneme, že f je v bodě a *spojitá vzhledem k A*, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ s vlastností

$$z \in \mathcal{U}_\delta(a) \cap A \qquad \Longrightarrow \qquad f(z) \in \mathcal{U}_\varepsilon(f(a)).$$

Příklad 20.1.6. (i) Funkce $f(z) = z$ je spojitá ve všech bodech, neboť pro libovolné $a \in \mathbb{C}$ máme
$$f(a+h) - f(a) = a + h - a = h.$$
Díky tomu stačí při ověřování spojitosti z definice volit $\delta := \varepsilon$.
(ii) Uvažujme funkci $f(z) = \frac{1}{z}$ a bod $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pak pro každé $h \in \mathbb{C}$ splňující $|h| < |a|$ platí
$$\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a} = \frac{a - (a+h)}{(a+h) \cdot a} = \frac{1}{a} \cdot \frac{-h}{a+h}.$$
Pokud při zadaném $\varepsilon > 0$ položíme $\delta := \min\{\frac{|a|}{2}, \frac{|a|^2\varepsilon}{2}\}$, pro všechna $h \in \mathbb{C}$ splňující $|h| < \delta$ dostáváme
$$\Big|\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}\Big| = \frac{1}{|a|}\frac{|h|}{|a+h|} \le \frac{1}{|a|}\frac{|h|}{|a| - |h|} < \frac{1}{|a|}\frac{\frac{|a|^2\varepsilon}{2}}{|a| - \frac{|a|}{2}} = \varepsilon.$$
Díky tomu je naše funkce spojitá v bodě a.

Poznámka 20.1.7. Protože $\mathbb{C}$ je metrický prostor, ve vlastních bodech máme k dispozici aritmetiku spojitosti a aritmetiku limit pro vlastní limity.

Cvičení 20.1.8. Vybudujte teorii (vyslovte a dokažte odpovídající tvrzení) pro aritmetiku nevlastních limit a limit v nekonečnu.

Hovoříme-li o maximu modulu funkce komplexní proměnné, máme na mysli maximum reálné funkce komplexní proměnné $|f|$.

Definice 20.1.9 (Maximum modulu funkce komplexní proměnné)**.** Nechť $a \in A \subset \mathbb{C}^*$ a funkce $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ je definovaná na A. Řekneme, že f má v bodě a *maximum modulu*, jestliže
$$|f(z)| \le |f(a)| \qquad \text{pro všechna } z \in A.$$
Analogicky pro minimum modulu. O funkci f říkáme, že je *omezená* na A, je-li modulus f, tedy $|f|$, omezený.

Protože spojitost zobrazení $z \mapsto f(z)$ implikuje spojitost zobrazení $z \mapsto |f(z)|$, spojité funkce jsou na kompaktních množinách omezené a nabývají na nich maxima a minima svého modulu.

20.2 Holomorfní funkce

Nyní obrátíme svou pozornost k derivaci funkce komplexní proměnné.

Definice 20.2.1 (Derivace funkce komplexní proměnné)**.** Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je definovaná na Ω a $a \in \Omega$. Řekneme, že f má v a *derivaci*, jestliže existuje vlastní limita
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$
V takovém případě hodnotu uvedené limity nazýváme *derivací* funkce f v bodě a a značíme ji $f'(a)$.

V dalším textu již nebudeme psát tečku pro součin dvou komplexních čísel, tedy ab znamená $a \cdot b$ pro a, $b \in \mathbb{C}$ (ale také může být jedno či obě čísla reálná).

Příklad 20.2.2. (i) Uvažujme funkci $f(z) \equiv b$, kde $b \in \mathbb{C}$, a $a \in \mathbb{C}$ libovolné. Pak

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{b-b}{h} = 0.$$

(ii) Uvažujme funkci $f(z) = z$ a $a \in \mathbb{C}$ libovolné. Pak

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a+h-a}{h} = 1.$$

(iii) Uvažujme funkci $f(z) = z^k$, kde $k \in \{2, 3, \dots\}$, a $a \in \mathbb{C}$ libovolné. Pak

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^k - a^k}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{a^k + ka^{k-1}h + \frac{k(k-1)}{2}a^{k-2}h^2 + \cdots + h^k - a^k}{h} = ka^{k-1}. \end{aligned}$$

(iv) Uvažujme funkci $f(z) = \frac{1}{z}$ a $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ libovolné. Pak

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{a(a+h)} = \frac{-1}{a^2}.$$

(v) Uvažujme funkci $f(z) = \overline{z}$ a $a \in \mathbb{C}$ libovolné. Pak

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\overline{a+h} - \overline{a}}{h} = \frac{\overline{h}}{h}.$$

Limita tohoto výrazu pro $h \to 0$ neexistuje. To je vidět z volby $h = it$ respektive $h = t$, kde $t \in \mathbb{R}$.

Definice 20.2.3 (Holomorfní funkce)**.** Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je definovaná na Ω a $a \in \Omega$. Řekneme, že f je *holomorfní* v bodě a, jestliže existuje okolí bodu a, na němž má f derivaci. Řekneme, že f je *holomorfní* na Ω, jestliže f má derivaci všude na Ω.

Příklad 20.2.4. Konstantní funkce a funkce tvaru z^k (pro $k \in \mathbb{N}$) jsou holomorfní na $\mathbb{C}$. Funkce $\frac{1}{z}$ je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Funkce $\overline{z}$ není holomorfní na žádné neprázdné otevřené podmnožině $\mathbb{C}$.

Standardním způsobem se dá dokázat následující užitečný výsledek.

Věta 20.2.5 (O aritmetice holomorfních funkcí)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a f, g jsou holomorfní na Ω. Pak*
(i) *funkce $f + g$ je holomorfní na Ω a platí $(f+g)' = f' + g'$*
(ii) *funkce $f - g$ je holomorfní na Ω a platí $(f-g)' = f' - g'$*
(iii) *funkce fg je holomorfní na Ω a platí $(fg)' = f'g + fg'$*
(iv) *pokud navíc $g \neq 0$ všude na Ω, pak $\frac{f}{g}$ je holomorfní na Ω a platí $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$*
(v) *pokud navíc $U \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina splňující $f(\Omega) \subset U$ a g je holomorfní na U, pak $g \circ f$ je holomorfní na Ω a platí $(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$ na Ω.*

Příklad 20.2.6. Nechť $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ a $ad-bc \neq 0$ (f je komplexní racionální lomená funkce s nesoudělným čitatelem a jmenovatelem). Pak pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \colon cz + d = 0\}$ platí

$$f'(z) = \frac{(az+b)'(cz+d) - (az+b)(cz+d)'}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0.$$

Analogicky jako v reálném případě se dá dokázat i následující výsledek.

Věta 20.2.7 (O derivaci inverzní funkce)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je definovaná na Ω a $a \in \mathbb{C}$.*
(i) *Jestliže existuje $f'(a)$, pak je f omezená na jistém okolí bodu a.*
(ii) *Jestliže je f bijekcí mezi Ω a $f(\Omega)$, $f(\Omega)$ je otevřená množina, f je holomorfní v a, $f'(a) \neq 0$ a f^{-1} je spojitá na $f(\Omega)$, pak*

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Připomeňme si, že na funkce komplexní proměnné lze pohlížet také jako na funkce z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$. Nyní se budeme zabývat porovnáním výše zavedené derivace funkce komplexní proměnné a diferenciálu odpovídajícího zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$. Za tím účelem budeme v dalším značit

$$z = z_1 + \mathrm{i} z_2, \qquad f(z) = \operatorname{Re} f(z_1 + \mathrm{i} z_2) + \mathrm{i} \operatorname{Im} f(z_1 + \mathrm{i} z_2) =: u(z_1, z_2) + \mathrm{i} v(z_1, z_2)$$

a

$$\mathbf{F}(z_1, z_2) := (u(z_1, z_2), v(z_1, z_2)).$$

Předpokládejme, že existuje $f'(a)$. Nejprve si povšimněme, že definici derivace funkce komplexní proměnné lze přepsat do tvaru

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} = 0.$$

Odtud

$$0 = \lim_{h \to 0} \left| \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} \right| = \lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - f'(a)h|}{|h|},$$

a proto

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{Re}\big(f(a+h) - f(a) - f'(a)h\big)}{|h|} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{u(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - u(a_1, a_2) - \operatorname{Re}(f'(a))h_1 + \operatorname{Im}(f'(a))h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{Im}\big(f(a+h) - f(a) - f'(a)h\big)}{|h|} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{v(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - v(a_1, a_2) - \operatorname{Im}(f'(a))h_1 - \operatorname{Re}(f'(a))h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}. \end{aligned}$$

Tím jsme ověřili, že obě složky zobrazení $\mathbf{F}$ mají v bodě (a_1, a_2) totální diferenciál. Navíc díky tomu, že totální diferenciál je určen jednoznačně a je reprezentován gradientem, dostáváme

$$\nabla\mathbf{F}(a_1, a_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial z_1}(a_1, a_2) & \frac{\partial u}{\partial z_2}(a_1, a_2) \\ \frac{\partial v}{\partial z_1}(a_1, a_2) & \frac{\partial v}{\partial z_2}(a_1, a_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(f'(a)) & -\operatorname{Im}(f'(a)) \\ \operatorname{Im}(f'(a)) & \operatorname{Re}(f'(a)) \end{pmatrix}.$$

Pokud na $\mathbb{R}^2$ upřednostníme značení proměnných jako (x, y), pak ve všech bodech $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, pro něž existuje $f'(x + \mathrm{i}y)$, jsme dostali

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Těmto identitám se říká *Cauchy–Riemannovy podmínky*. Právě jsme o nich dokázali, že jsou nutné pro existenci derivace funkce komplexní proměnné.

Poznámka 20.2.8. Další možný pohled na studovanou problematiku přináší funkce $\widetilde{f}\colon \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{C}$ definovaná jako $\widetilde{f}(x, y) = f(x + \mathrm{i}y)$. Pak máme

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \text{a} \qquad \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Z Cauchy–Riemannových podmínek proto dostáváme

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x} = \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y}. \tag{20.2.1}$$

Dosavadní výsledky si můžeme shrnout do následujícího tvaru.

Věta 20.2.9 (První věta o Cauchy–Riemannových podmínkách)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má v bodě $a = a_1 + \mathrm{i}a_2 \in \mathbb{C}$ derivaci. Nechť funkce $\mathbf{F}$, u, v jsou jako výše. Pak*
(i) *funkce u, v v bodě $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ splňují Cauchy–Riemannovy podmínky*
(ii) *funkce $\mathbf{F}$ má v bodě (a_1, a_2) totální diferenciál a platí $\mathrm{J}_{\mathbf{F}}(a_1, a_2) = |f'(a)|^2$.*

Poznámka 20.2.10. Všimněte si, že každá „reálná“ funkce komplexní proměnné, která je holomorfní na nějaké otevřené množině, je nutně konstantní. Díky Cauchy–Riemannovým podmínkám je totiž nutně na této množině $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ a tedy reálná část funkce je konstantní. Totéž platí, je-li imaginární složka funkce konstantní. Analogický výsledek platí, je-li konstantní reálná část.

Je přirozené se také ptát, zda splnění Cauchy–Riemannových podmínek postačuje k existenci derivace funkce komplexní proměnné.

Věta 20.2.11 (Druhá věta o Cauchy–Riemannových podmínkách)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, funkce u, v jsou funkci f přiřazeny jako výše a jsou definované na nějakém okolí bodu $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Jestliže funkce u a v mají v bodě (a_1, a_2) totální diferenciál a splňují v něm Cauchy–Riemannovy podmínky, pak funkce f má v bodě $a = a_1 + \mathrm{i}a_2$ derivaci a platí pro ni*

$$f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a_1, a_2) - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}(a_1, a_2).$$

Důkaz. Díky existenci totálního diferenciálu v bodě (a_1, a_2) můžeme psát pro $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ dostatečně blízko k počátku

$$
\begin{aligned}
u(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - u(a_1, a_2) &= \frac{\partial u}{\partial x}(a_1, a_2)h_1 + \frac{\partial u}{\partial y}(a_1, a_2)h_2 + \psi(h_1, h_2) \\
v(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - v(a_1, a_2) &= \frac{\partial v}{\partial x}(a_1, a_2)h_1 + \frac{\partial v}{\partial y}(a_1, a_2)h_2 + \eta(h_1, h_2),
\end{aligned}
$$

kde $\psi(h_1, h_2) = \mathrm{o}(\sqrt{h_1^2 + h_2^2})$ a $\eta(h_1, h_2) = \mathrm{o}(\sqrt{h_1^2 + h_2^2})$ pro $\sqrt{h_1^2 + h_2^2} \to 0$. Proto pro $h = h_1 + \mathrm{i}h_2$ díky Cauchy–Riemannovým podmínkám máme

$$
\begin{aligned}
&f(a + h) - f(a) \\
&\qquad = \Big(u(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - u(a_1, a_2)\Big) + \mathrm{i}\Big(v(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - v(a_1, a_2)\Big) \\
&\qquad = \Big(\frac{\partial u}{\partial x}(a_1, a_2)h_1 + \frac{\partial u}{\partial y}(a_1, a_2)h_2 + \psi(h_1, h_2)\Big) \\
&\qquad\qquad + \mathrm{i}\Big(\frac{\partial v}{\partial x}(a_1, a_2)h_1 + \frac{\partial v}{\partial y}(a_1, a_2)h_2 + \eta(h_1, h_2)\Big) \\
&\qquad = \Big(\frac{\partial u}{\partial x}(a_1, a_2)h_1 + \frac{\partial u}{\partial y}(a_1, a_2)h_2 + \psi(h_1, h_2)\Big) \\
&\qquad\qquad + \mathrm{i}\Big(-\frac{\partial u}{\partial y}(a_1, a_2)h_1 + \frac{\partial u}{\partial x}(a_1, a_2)h_2 + \eta(h_1, h_2)\Big) \\
&\qquad = \Big(\frac{\partial u}{\partial x}(a_1, a_2) - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}(a_1, a_2)\Big)(h_1 + \mathrm{i}h_2) + \psi(h_1, h_2) + \mathrm{i}\eta(h_1, h_2).
\end{aligned}
$$

Odtud plyne

$$
f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x}(a_1, a_2) - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}(a_1, a_2).
$$

□

Doposud jsme zjistili, že derivace funkce komplexní proměnné úzce souvisí s gradientem funkcí dvou proměnných, které reprezentují reálnou a imaginární složku. Navíc odpovídající Jacobiho matice nemůže být tvořena čtyřmi libovolnými čísly, ale na hlavní diagonále je dvojice shodných čísel a mimo diagonálu je dvojice čísel lišících se ve znaménku. Tím však speciální vlastnosti nekončí. Později si ukážeme, že má-li funkce komplexní proměnné na nějaké otevřené množině derivaci, pak je na ní automaticky třídy C^∞. Již nyní si můžeme ukázat další speciální vlastnost týkající se druhých derivací.

Definice 20.2.12 (Harmonická funkce)**.** Nechť $g\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definovaná a je třídy C^2 na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Řekneme, že g je *harmonická* na Ω, jestliže

$$
\Delta g = 0 \qquad \text{na } \Omega
$$

(připomeňme, že *Laplaceův operátor* je definován předpisem $\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 g}{\partial x_N^2}$).

Poznámka 20.2.13. V příštím díle skript, v kapitole věnované parciálním diferenciálním rovnicím, přidáme pro případ neomezených oblastí ještě požadavek na chování harmonických funkcí kolem nekonečna. To teď ale nepotřebujeme.

Věta 20.2.14 (O harmoničnosti složek holomorfní funkce)**.** (i) *Nechť* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní v bodě* $a = a_1 + \mathrm{i}a_2$*, funkce* u, v *jsou jí přiřazeny jako výše a jsou třídy* C^2 *na nějakém okolí bodu* $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$*. Pak* u *a* v *jsou harmonické na jistém okolí bodu* (a_1, a_2)*.*
(ii) *Nechť* $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *je na jistém okolí bodu* $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ *harmonická a třídy* C^2*. Pak existuje funkce* $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definovaná na témže okolí bodu* (a_1, a_2) *(dokonce třídy* C^2*, harmonická a spolu s* u *splňující Cauchy–Riemannovy podmínky) taková, že funkce*

$$f(z) := u(z_1, z_2) + \mathrm{i}v(z_1, z_2)$$

je holomorfní v bodě $a_1 + \mathrm{i}a_2$*. Analogicky pro imaginární složku* v*.*

Důkaz. Dokažme první tvrzení. Zderivováním Cauchy–Riemannových podmínek (první podmínku derivujeme podle x a druhou podle y) máme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \qquad \text{a} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Odtud díky záměnnosti parciálních derivací dostáváme

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0.$$

Vztah $\Delta v = 0$ získáme analogicky, jen první podmínku zderivujeme podle y a druhou podle x.

Dokažme druhé tvrzení. Protože u je harmonická, pro vektorové pole

$$\mathbf{T}(x, y) = (T_1(x, y), T_2(x, y)) := \Big(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}\Big)$$

platí

$$\frac{\partial T_1}{\partial y} - \frac{\partial T_2}{\partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\Delta u = 0.$$

Protože okolí bodu (a_1, a_2), kde pracujeme, je konvexní otevřená množina, je pole $\mathbf{T}$ potenciální (podle Věty o existenci potenciálu v $\mathbb{R}^2$, tedy Věty 17.3.23), neboli existuje funkce $U\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, která je na tomto okolí definovaná a platí pro ni na tomto okolí

$$\frac{\partial U}{\partial x} = T_1 = -\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \text{a} \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = T_2 = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Pokud nyní položíme $v(x, y) := U(x, y)$, dvojice funkcí u a v splňuje Cauchy–Riemannovy podmínky, obě funkce mají totální diferenciál, a proto nám Druhá věta o Cauchy–Riemannových podmínkách (Věta 20.2.11) dává požadovaný výsledek. Máme-li zadanou imaginární složku, postupujeme podobně s polem $(\frac{\partial v}{\partial y}, -\frac{\partial v}{\partial x})$. □

Poznámka 20.2.15. Pokud v situaci ze druhé části předchozí věty máme $u \equiv 0$ (nebo obecněji u konstantní), samozřejmě vyjde, že v musí být konstantní, srovnejte s Poznámkou 20.2.10.

Věta 20.2.16 (O ortogonalitě izočar)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{C}$ a funkce u, v jsou jí přiřazeny jako výše a jsou třídy C^1. Jestliže $f' \neq 0$ všude na Ω, pak pro všechna $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ je možné množiny*

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x + \mathrm{i}y \in \Omega,\ u(x,y) = c_1\} \quad a \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x + \mathrm{i}y \in \Omega,\ v(x,y) = c_2\}$$

lokálně popsat jako obrazy C^1-křivek a jsou ortogonální (v bodech průniku obrazů jsou tečné vektory ortogonální).

Důkaz. Nejprve si ukažme, že v bodech průniku jsou ortogonální gradienty funkcí u a v. Z Cauchy–Riemannových podmínek pro skalární součin gradientů máme

$$(\nabla u, \nabla v) = \Big(\Big(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\Big), \Big(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\Big)\Big) = \Big(\Big(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\Big), \Big(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}\Big)\Big) = 0.$$

Teď už stačí jen zkonstruovat zmíněné křivky a uvědomit si, že tečný vektor je kolmý ke gradientu (díky tomuto pozorování a kolmosti gradientů budou kolmé i tečné vektory, neboť pracujeme v $\mathbb{R}^2$). K tomu stačí využít Větu o implicitní funkci (Věta 12.4.13). Pokud například v bodě průniku máme $\frac{\partial u}{\partial y} \neq 0$, můžeme pracovat s funkcí $G(x,u) = u(x,y) - c_1$ a vyjadřovat y pomocí x. Dostaneme

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}.$$

Tomu odpovídá tečný vektor $(1, -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}})$, který je kolmý na $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$. □

Nyní přejdeme ke studiu holomorfnosti součtů mocninných řad v komplexní proměnné. Připomeňme si třeba mocninnou řadu $\mathrm{e}^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, která má součet všude v $\mathbb{C}$ a navíc v $\mathbb{C}$ konverguje lokálně stejnoměrně. Dalším příkladem může být mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Ta má poloměr konvergence rovný jedné a platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad \text{pro } |z| < 1$$

(roznásobením se ověří, že i v $\mathbb{C}$ platí $1 + z + \cdots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$, limitní přechod je pak už snadný).

Věta 20.2.17 (O holomorfnosti součtu mocninné řady)**.** *Každá mocninná řada $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ s komplexními koeficienty definuje na svém konvergenčním kruhu holomorfní funkci. Na konvergenčním kruhu navíc platí*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Důkaz. Konvergenci mocninné řady na vnitřku jejího konvergenčního kruhu jsme získali již v kapitole o mocninných řadách. Zbývá nám dokázat, že uvnitř konvergenčního kruhu platí vzorec z věty.

Stačí se zabývat případem, kdy poloměr konvergence $R \in (0, \infty]$. Pro snazší čitelnost si označme pro všechna $m \in \mathbb{N}$

$$g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}, \qquad S_m(z) := \sum_{n=0}^{m} a_n z^n \qquad \text{a} \qquad E_m(z) := \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n z^n.$$

Zafixujme $z \in \mathbb{C}$ splňující $|z| < R$ a $\varrho \in (0, \infty)$ tak malé, aby $|z| + \varrho < R$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Přepišme si

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) = \Big(\frac{S_m(z+h) - S_m(z)}{h} - S'_m(z) \Big) + \Big(S'_m(z) - g(z) \Big) \\ + \Big(\frac{E_m(z+h) - E_m(z)}{h} \Big) =: A_1 + A_2 + A_3. \end{aligned}$$

Fixujme $\varepsilon > 0$. Ukážeme, že při vhodné volbě ϱ a m platí

$$|A_1| + |A_2| + |A_3| < 3\varepsilon \qquad \text{kdykoliv } |h| < \varrho.$$

Nejprve si povšimněme, že vzorec $\alpha^n - \beta^n = (\alpha - \beta)(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \cdots + \beta^{n-1})$ dává odhad

$$\begin{aligned} |A_3| &= \Big| \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h} \Big| \\ &\le \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| \Big| (z+h)^{n-1} + (z+h)^{n-2} z + \cdots + z^{n-1} \Big| \\ &\le \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| n (|z| + \varrho)^{n-1}. \end{aligned}$$

Protože navíc $|z| + \varrho < R$, existuje $m_3 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $m \ge m_3$ máme $|A_3| < \varepsilon$ (uvědomte si, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \big(\frac{|z| + \varrho + R}{2} \big)^n$ konverguje).

Dále díky tomu, že $(z^n)' = n z^{n-1}$, existuje $m_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $m \ge m_2$ máme $|A_2| < \varepsilon$.

Zafixujme nyní jedno $m \in \mathbb{N}$ tak velké, že platí oba odhady $|A_2| < \varepsilon$ a $|A_3| < \varepsilon$. Případným zmenšením ϱ nyní dosáhneme toho, že (opět využíváme $(z^n)' = n z^{n-1}$)

$$|A_1| = \Big| \frac{S_m(z+h) - S_m(z)}{h} - S'_m(z) \Big| < \varepsilon.$$

Tím je důkaz dokončen. □

Iterací předchozí věty okamžitě dostáváme ještě silnější výsledek.

Důsledek 20.2.18. *Každá mocninná řada s komplexními koeficienty definuje na svém konvergenčním kruhu holomorfní funkci, která je nekonečněkrát spojitě diferencovatelná a jejíž derivace jsou rovny odpovídajícím derivacím původní řady člen po členu.*

Příklad 20.2.19. Pokud aplikujeme předchozí větu na funkci $f(z) = \mathrm{e}^z$, máme

$$(\mathrm{e}^z)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \mathrm{e}^z.$$

Dalo by se také postupovat přes teorii související s Cauchy–Riemannovými podmínkami. Máme totiž

$$u(x,y) = \mathrm{e}^x \cos y \qquad \text{a} \qquad v(x,y) = \mathrm{e}^x \sin y.$$

Pro tyto funkce platí

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{e}^x \cos y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\mathrm{e}^x \sin y, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \mathrm{e}^x \sin y \qquad \text{a} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \mathrm{e}^x \cos y.$$

Vidíme, že všechny čtyři parciální derivace jsou spojité a jsou splněny Cauchy–Riemannovy podmínky. Proto nám Druhá věta o Cauchy–Riemannových podmínkách (Věta 20.2.11) dává

$$\begin{aligned} f'(z) = f'(z_1 + \mathrm{i}z_2) &= \frac{\partial u}{\partial x}(z_1, z_2) - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}(z_1, z_2) \\ &= \mathrm{e}^{z_1} \cos z_2 + \mathrm{i}\mathrm{e}^{z_1} \sin z_2 = \mathrm{e}^{z_1 + \mathrm{i}z_2} = \mathrm{e}^z. \end{aligned}$$

Poznámka 20.2.20. Spolu s dosavadními výsledky samozřejmě platí i obecnější verze získané posunutím. Tedy pokud $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ má poloměr konvergence $R \in (0, \infty]$, jedná se o holomorfní funkci a platí pro ni

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Příklad 20.2.21. Následující čtyři elementární funkce je možné zavést na $\mathbb{C}$ (vzorce jsou inspirovány Taylorovými řadami na $\mathbb{R}$)

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$
$$\sinh z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cosh z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Všechny čtyři řady mají poloměr konvergence rovný nekonečnu a platí

$$
\begin{aligned}
\sin' z &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Big(\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big)' = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} = \cos z\\
\cos' z &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Big(\frac{z^{2n}}{(2n)!}\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} = -\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\\
&= -\sin z\\
\sinh' z &= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big)' = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!} = \cosh z\\
\cosh' z &= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{z^{2n}}{(2n)!}\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sinh z.
\end{aligned}
$$

Dále máme

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}z)^n}{n!}-\frac{(-\mathrm{i}z)^n}{n!}}{2\mathrm{i}} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2(\mathrm{i}z)^{2k+1}}{(2k+1)!}}{2\mathrm{i}} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin z\\
\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2} &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}z)^n}{n!}+\frac{(-\mathrm{i}z)^n}{n!}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{i}^{2k}\frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cos z\\
\frac{\mathrm{e}^{z}-\mathrm{e}^{-z}}{2} &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}-\frac{(-z)^n}{n!}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sinh z\\
\frac{\mathrm{e}^{z}+\mathrm{e}^{-z}}{2} &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}+\frac{(-z)^n}{n!}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh z.
\end{aligned}
$$

Poznámka 20.2.22. Je přirozené se ptát, zda naše rozšíření uvedených čtyř reálných funkcí na holomorfní funkce komplexní proměnné je jediné možné. Později uvidíme, že tomu tak skutečně je.

Poznámka 20.2.23. Podobně jako v reálném případě i zde můžeme nazývat funkci f komplexní proměnné *analytickou funkcí* v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$, jestliže lze psát

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

na jistém okolí bodu z_0. Pokud je funkce analytická ve všech bodech otevřené množiny $\Omega \subset \mathbb{C}$, říkáme, že je *analytická* na Ω.

Později si ukážeme, že každá holomorfní funkce je analytická. To je další odlišnost od reálného případu, kde například zhlazovací jádro (třeba funkce $x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2-1}}$ rozšířená z intervalu $(-1, 1)$ nulou na celé $\mathbb{R}$) je třídy $C^\infty(\mathbb{R})$, ale není reálně analytické.

20.3 Integrace podél křivek

V důkazu Věty o harmoničnosti složek holomorfní funkce (Věta 20.2.14) jsme mohli vidět, že je-li známa jedna složka holomorfní funkce, hledání předpisu pro druhou složku odpovídá hledání potenciálu k zadanému dvojrozměrnému vektorovému poli na $\mathbb{R}^2$. Navíc důkazy vět o existenci potenciálu, na které jsme naráželi v předchozích semestrech, pracovaly s konstrukcemi založenými na křivkovém integrálu druhého druhu. Není proto žádným překvapením, že křivkový integrál sehraje důležitou roli i při hledání primitivní funkce k funkci komplexní proměnné.

Nejprve však musíme teorii křivkového integrálu vybudovat. Teorii zde vybudujeme o něco jednodušší než v kapitole o křivkovém a plošném integrálu. Kupříkladu budeme uvažovat jen křivky definované na omezených uzavřených intervalech.

Definice 20.3.1 (Křivka)**.** Nechť $[a,b] \subset \mathbb{R}$. *Křivkou třídy* C^1 v $\mathbb{C}$ nazýváme zobrazení $\varphi \in C^1([a,b];\mathbb{C})$ (v krajních bodech uvažujeme jednostrannou derivaci z vnitřní strany intervalu). *Křivkou po částech třídy* C^1 v $\mathbb{C}$ nazýváme zobrazení $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, pro které existuje $n \in \mathbb{N}$ a uzavřené intervaly $[a_0,a_1]$, $[a_1,a_2]$, $\dots$, $[a_{n-1},a_n]$ takové, že $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$ a $\varphi|_{[a_{j-1},a_j]}$ pro $j \in \{1,\dots,n\}$ jsou křivky třídy C^1. Je-li φ křivkou po částech třídy C^1 v $\mathbb{C}$, říkáme, že je *regulární*, jestliže platí

$$\varphi'(t) \neq 0 \qquad \text{na } [a,b]$$

(v případě krajních bodů a výše citovaných dělících bodů bereme jen jednostranné derivace).

Množina $\langle\varphi\rangle := \varphi([a,b])$ se nazývá *geometrický obraz křivky* φ. Pokud existuje $\varphi'(t)$ (tentokrát už jako oboustranná derivace), pak se nazývá *tečný vektor* ke křivce φ v bodě $\varphi(t)$. Řekneme, že φ je *jednoduchá*, jestliže φ je prostá na $[a,b)$ a na $(a,b]$, a φ^{-1} je spojitá na obrazu intervalu (a,b). Řekneme, že φ je *uzavřená*, jestliže $\varphi(a) = \varphi(b)$. Řekneme, že φ je *Jordanova křivka*, jestliže je jednoduchá a uzavřená.

Definice 20.3.2 (Součet křivek, opačná křivka)**.** Nechť $(\varphi,[a,b])$ a $(\psi,[c,d])$ jsou křivky v $\mathbb{C}$ a $\varphi(b) = \psi(c)$. Pak definujeme *součet křivek* $\varphi \oplus \psi$ předpisem

$$(\varphi \oplus \psi)(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{pro } t \in [a,b] \\ \psi(t-b+c) & \text{pro } t \in [b, b-c+d]. \end{cases}$$

Opačnou křivkou ke křivce $(\varphi,[a,b])$ nazýváme křivku $(\ominus\varphi,[-b,-a])$ danou předpisem

$$\ominus\varphi(t) = \varphi(-t) \qquad \text{pro } t \in [-b,-a].$$

Definice 20.3.3 (Křivkový integrál)**.** Nechť $(\varphi,[a,b])$ je po částech C^1-křivka v $\mathbb{C}$ a $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je definovaná na $\langle\varphi\rangle$. Jestliže existuje Lebesgueův integrál

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z := \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

pak se nazývá *křivkový integrál* funkce f přes křivku φ. Dále zavádíme *délku křivky* φ v $\mathbb{C}$ jako

$$\ell_\varphi := \int_a^b |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Poznámka 20.3.4. (i) Délka křivky je definovaná vždy (pro po částech C^1-křivku). Křivkový integrál existovat nemusí. Postačující podmínkou existence je třeba spojitost funkce f na $\langle\varphi\rangle$, což je situace, se kterou zde budeme vždy pracovat.
(ii) Předpokládejme, že funkce f je spojitá na $\langle\varphi\rangle$. Integrand pak nemusí být definovaný v bodech $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ z definice po částech C^1-křivky. Pokud v uvedených bodech integrand dodefinujeme třeba nulou, Lebesgueův integrál skrývající se za křivkovým integrálem se tím nezmění. Zároveň však už existuje dokonce jako integrál Riemannův. Připomeňme, že pak můžeme mimo jiné používat i Větu o záměně stejnoměrné limity a Riemannova integrálu (Věta 14.3.9).

Poznámka 20.3.5. Integrál v definici délky křivky je totožný s integrálem prvního druhu, kterým se počítají délky křivek z $[a, b]$ do $\mathbb{R}^2$ (nijak se zde neprojevuje, že jsme množinu $\mathbb{C}$ oproti $\mathbb{R}^2$ opatřili ještě komplexním násobením). Naproti tomu křivkový integrál je ve své podstatě integrálem druhého druhu. Díky tomu bude mít (komplexní) křivkový integrál mnoho vlastností (reálného) křivkového integrálu druhého druhu.

Navíc máme

$$\begin{aligned}
\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_a^b f(\varphi_1(t)+\mathrm{i}\varphi_2(t))(\varphi_1'(t)+\mathrm{i}\varphi_2'(t))\,\mathrm{d}t\\
&= \int_a^b (u(\varphi_1(t),\varphi_2(t))+\mathrm{i}v(\varphi_1(t),\varphi_2(t)))(\varphi_1'(t)+\mathrm{i}\varphi_2'(t))\,\mathrm{d}t\\
&= \int_a^b \Big(u(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\varphi_1'(t)-v(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\varphi_2'(t))\\
&\qquad\quad + \mathrm{i}u(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\varphi_2'(t)+\mathrm{i}v(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\varphi_1'(t)\Big)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_a^b \Big((u(\varphi_1(t),\varphi_2(t)),-v(\varphi_1(t),\varphi_2(t)))\cdot(\varphi_1'(t),\varphi_2'(t))\\
&\qquad\quad + \mathrm{i}(v(\varphi_1(t),\varphi_2(t)),u(\varphi_1(t),\varphi_2(t)))\cdot(\varphi_1'(t),\varphi_2'(t))\Big)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Pokud tedy označíme křivku $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}(t) := (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$, reálné vektorové pole $\widetilde{\mathbf{T}}(t) = \big(\widetilde{f}(\varphi_1(t),\varphi_2(t)), \mathrm{i}\widetilde{f}(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\big)$, kde $\widetilde{f}(x,y) = f(x+\mathrm{i}y)$, potom můžeme psát

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b \Big(\widetilde{f}(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}})\widetilde{\varphi}_1'(t)+\mathrm{i}\widetilde{f}(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}})\widetilde{\varphi}_2'(t)\Big)\,\mathrm{d}t = \int_{\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}} \widetilde{\mathbf{T}}\cdot\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}.$$

Velikost křivkového integrálu se dá odhadovat obdobně jako u křivkového integrálu druhého druhu v $\mathbb{R}^N$.

Tvrzení 20.3.6 (O odhadu velikosti křivkového integrálu)**.** *Nechť* $(\varphi, [a, b])$ *je po částech* C^1*-křivka v* $\mathbb{C}$*,* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je definovaná na* $\langle\varphi\rangle$ *a existuje* $\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z$*. Pak*

$$\Big|\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z\Big| \le \int_a^b |f(\varphi(t))||\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Důkaz. Pro Riemannův integrál platí odhad

$$\Big|\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\Big| \le \int_a^b |g(t)|\,\mathrm{d}t, \tag{20.3.1}$$

což lze nalézt ve Větě o monotonie integrálu, integrálu z absolutní hodnoty (Věta 7.5.3). Protože je tento výsledek pro nás důležitý, ukažme ho pro jistotu ještě jednou, jiným způsobem. Budeme používat stejné značení jako v předchozí poznámce, jen pro lepší čitelnost nebudeme podrobně rozepisovat argumenty jednotlivých funkcí. Díky identitě získané na konci předchozí poznámky a Cauchy–Schwarzově nerovnosti máme (přechod z předposledního řádku na poslední vysvětlíme pod výpočtem)

$$\begin{aligned}
\Big|\int_\varphi f\,\mathrm{d}z\Big|^2 &= \Big(\mathrm{Re}\int_\varphi f\,\mathrm{d}z\Big)^2 + \Big(\mathrm{Im}\int_\varphi f\,\mathrm{d}z\Big)^2 \\
&= \int_a^b \Big(\mathrm{Re}\int_\varphi f\,\mathrm{d}z\Big)(u\varphi_1' - v\varphi_2')\,\mathrm{d}t + \int_a^b \Big(\mathrm{Im}\int_\varphi f\,\mathrm{d}z\Big)(v\varphi_1' + u\varphi_2')\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \Big(\mathrm{Re}\int_\varphi f\,\mathrm{d}z, \mathrm{Im}\int_\varphi f\,\mathrm{d}z\Big)\cdot(u\varphi_1' - v\varphi_2', v\varphi_1' + u\varphi_2')\,\mathrm{d}t \\
&\le \int_a^b \Big|\int_\varphi f\,\mathrm{d}z\Big| |u\varphi_1' - v\varphi_2', v\varphi_1' + u\varphi_2'|\,\mathrm{d}t \\
&= \Big|\int_\varphi f\,\mathrm{d}z\Big| \int_a^b \sqrt{u^2+v^2}\sqrt{{\varphi_1}'^2 + {\varphi_2'}^2}\,\mathrm{d}t = \Big|\int_\varphi f\,\mathrm{d}z\Big| \int_a^b |f||\varphi'|\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

kde jsme využili (pro ta t z definičního oboru křivky, kde existuje $\varphi'(t)$)

$$\begin{aligned}
|(u\varphi_1' - v\varphi_2', v\varphi_1' + u\varphi_2')|^2 &= (u\varphi_1' - v\varphi_2')^2 + (v\varphi_1' + u\varphi_2')^2 \\
&= u^2{\varphi_1'}^2 - 2u\varphi_1'v\varphi_2' + v^2{\varphi_2'}^2 + v^2{\varphi_1'}^2 + 2v\varphi_1'u\varphi_2' + u^2{\varphi_2'}^2 \\
&= u^2{\varphi_1'}^2 + v^2{\varphi_2'}^2 + v^2{\varphi_1'}^2 + u^2{\varphi_2'}^2 \\
&= (u^2+v^2)({\varphi_1'}^2 + {\varphi_2'}^2).
\end{aligned}$$

Z odhadu $\Big|\int_\varphi f\,\mathrm{d}z\Big|^2 \le \Big|\int_\varphi f\,\mathrm{d}z\Big| \int_a^b |f||\varphi'|\,\mathrm{d}t$ plyne dokazovaný výsledek. □

Věta 20.3.7 (O vlastnostech křivkového integrálu)**.** *Nechť* φ*,* ψ *jsou po částech* C^1*-křivky v* $\mathbb{C}$ *a funkce* $f, g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *jsou definované na* $\langle\varphi\rangle \cup \langle\psi\rangle$*. Pak platí*
(i) $\int_\varphi (f(z) + g(z))\,\mathrm{d}z = \int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z + \int_\varphi g(z)\,\mathrm{d}z$ *a* $\int_\varphi cf(z)\,\mathrm{d}z = c\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z$*, kdykoliv integrály na pravých stranách existují a* $c \in \mathbb{C}$

(ii) $\int_{\ominus\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z$ *a* $\int_{\varphi\oplus\psi} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi} f(z)\,\mathrm{d}z$*, kdykoliv integrály na pravých stranách existují*

(iii) $\left|\int_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \sup_{\langle\varphi\rangle} |f|\ell_{\varphi}$*, kdykoliv integrál nalevo existuje*

(iv) *je-li* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *posloupnost funkcí komplexní proměnné, které jsou spojité na množině* $\langle\varphi\rangle$*, a* $f_n \rightrightarrows f$ *na* $\langle\varphi\rangle$*, pak existuje* $\int_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z$ *a platí*

$$\int_{\varphi} f_n(z)\,\mathrm{d}z \overset{n\to\infty}{\to} \int_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

(v) *nechť* $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *má spojitou derivaci na nějaké otevřené množině obsahující* $\langle\varphi\rangle$*. Označme* $\eta := h \circ \varphi$ *(se stejným definičním oborem jako má* φ*). Pak* η *je po částech* C^1*-křivka v* $\mathbb{C}$*, platí* $\eta'(t) = (h(\varphi(t)))' = h'(\varphi(t))\varphi'(t)$ *až na konečný počet bodů a*

$$\int_{\eta} f(w)\,\mathrm{d}w = \int_{\varphi} (f \circ h)(z)h'(z)\,\mathrm{d}z.$$

Důkaz. Připomeňme, že na křivkový jednorozměrný integrál v definici křivkového integrálu můžeme pohlížet jako na Riemannův integrál, jestliže je integrovaná funkce spojitá.

První část věty plyne z linearity Lebesgueova (popřípadě Riemannova) integrálu. Důkaz druhé části je snadným cvičením na Větu o substituci (Věta 15.12.1).

Třetí část plyne z výpočtu využívajícího Tvrzení o odhadu velikosti křivkového integrálu (tedy Tvrzení 20.3.6; definiční obor křivky φ značíme $[a, b]$)

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z\Big| &= \Big|\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\Big| \le \int_a^b |f(\varphi(t))||\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\le \sup_{\langle\varphi\rangle} |f| \int_a^b |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = \sup_{\langle\varphi\rangle} |f|\ell_{\varphi}.\end{aligned}$$

Dokažme čtvrtou část. Díky stejnoměrné konvergenci je funkce f také spojitá a jí odpovídající integrál existuje. Dále stejnoměrná konvergence $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle\varphi\rangle$ zaručuje, že na $[a, b]$ máme ($\operatorname{Re}\varphi'$ a $\operatorname{Im}\varphi'$ jsou omezené na $[a, b]$; připomeňme konvenci, podle níž φ' dodefinováváme nulou v konečně mnoha bodech, kde derivace neexistuje)

$$\operatorname{Re}(f_n(\varphi(t))\varphi'(t)) \rightrightarrows \operatorname{Re}(f(\varphi(t))\varphi'(t)) \text{ a } \operatorname{Im}(f_n(\varphi(t))\varphi'(t)) \rightrightarrows \operatorname{Im}(f(\varphi(t))\varphi'(t)).$$

Požadovaný výsledek nyní dostaneme z Věty o záměně stejnoměrné limity a Riemannova integrálu (Věta 14.3.9).

Dokažme pátou část. Křivka η je zřejmě po částech C^1-křivka z $[a, b]$ do $\mathbb{C}$. Díky Cauchy–Riemannovým podmínkám a Druhé větě o Cauchy–Riemannových podmínkách (Věta 20.2.11) navíc v bodech, kde existuje $\varphi'(t)$, máme (reálnou složku funkce h reprezentujeme jako funkci u a imaginární jako funkci v; dále značíme $\widetilde{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \in \mathbb{R}^2$)

$$\begin{aligned}
\eta'(t) &= \eta_1'(t) + \mathrm{i}\eta_2'(t) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(\widetilde{\varphi}(t))\varphi_1'(t) + \frac{\partial u}{\partial y}(\widetilde{\varphi}(t))\varphi_2'(t) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(\widetilde{\varphi}(t))\varphi_1'(t) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}(\widetilde{\varphi}(t))\varphi_2'(t) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(\widetilde{\varphi}(t))\varphi_1'(t) + \frac{\partial u}{\partial y}(\widetilde{\varphi}(t))\varphi_2'(t) - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}(\widetilde{\varphi}(t))\varphi_1'(t) + \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial x}(\widetilde{\varphi}(t))\varphi_2'(t) \\
&= \Big(\frac{\partial u}{\partial x}(\widetilde{\varphi}(t)) - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}(\widetilde{\varphi}(t))\Big)(\varphi_1(t) + \mathrm{i}\varphi_2(t))' = h'(\varphi(t))\varphi'(t).
\end{aligned}$$

Nyní už jen stačí použít definici křivkového integrálu a dostáváme

$$\begin{aligned}
\int_\eta f(w)\,\mathrm{d}w &= \int_a^b f(\eta(t))\eta'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(h(\varphi(t)))h'(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_\varphi (f \circ h)(z)h'(z)\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

□

Poznámka 20.3.8. Jestliže v bodu (v) předchozí věty je navíc derivace funkce h nenulová na $\langle\varphi\rangle$, potom, pokud je φ regulární křivka, je také η regulární křivka.

Příklad 20.3.9. Uvažujme křivku $\varphi(t) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, kde $R > 0$ a t probíhá interval $[0, 2\pi]$ (φ probíhá proti směru hodinových ručiček kružnici o poloměru R centrovanou v počátku), a funkci $f(z) = z^n$, kde $n \in \mathbb{Z}$. Pokud $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, máme

$$\begin{aligned}
\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} (R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^n (R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})'\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}R^{n+1}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}\,\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{i}R^{n+1}\Big[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}}{\mathrm{i}(n+1)}\Big]_0^{2\pi} = 0.
\end{aligned}$$

Pokud $n = -1$, máme

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})'\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \mathrm{i}\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}.$$

Definice 20.3.10 (Primitivní funkce)**.** Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a f, $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jsou definované na Ω. Řekneme, že funkce F je *primitivní funkcí* k f na Ω, jestliže

$$F'(z) = f(z) \qquad \text{pro všechna } z \in \Omega.$$

Z vlastností derivace okamžitě plyne následující výsledek.

Věta 20.3.11 (O vlastnostech primitivní funkce)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a $f, F, g, G\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jsou definované na Ω, F je primitivní funkcí k f na Ω a G je primitivní funkcí k g na Ω.*
(i) *Jestliže $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, pak $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k $\alpha f + \beta g$ na Ω.*
(ii) *Jestliže $c \in \mathbb{C}$, pak $F + c$ je primitivní funkcí k f na Ω.*
(iii) *Je-li H primitivní funkcí k fG na Ω, pak $FG - H$ je primitivní funkcí k Fg na Ω.*

Na rozdíl od případu funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ u funkcí komplexní proměnné neplatí, že každá spojitá funkce má funkci primitivní. Kupříkladu funkce $z \mapsto \operatorname{Re} z$ nemá primitivní funkci, neboť reálná složka případné primitivní funkce by podle Druhé věty o Cauchy–Riemannových podmínkách (Věta 20.2.11) musela splňovat $u(x,y) = \frac{x^2}{2} + C$, což není harmonická funkce. Srovnejte tento příklad také s Poznámkou 20.2.10. Právě podmínkami zaručujícími existenci primitivní funkce se nyní budeme zabývat.

Věta 20.3.12 (O charakterizaci existence primitivní funkce)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je spojitá na Ω. Pak následující výroky jsou ekvivalentní.*
(i) *Funkce f má na Ω primitivní funkci.*
(ii) *Pro každou uzavřenou po částech C^1-křivku φ, jejíž obraz leží v Ω, platí*

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

(iii) *Křivkový integrál z funkce f nezávisí na cestě v Ω.*

Poznámka 20.3.13. Nezávislostí na cestě v Ω rozumíme, že pro každou dvojici po částech C^1-křivek $(\varphi,[a,b])$ a $(\psi,[c,d])$ splňující $\langle\varphi\rangle, \langle\psi\rangle \subset \Omega$, $\varphi(a) = \psi(c)$ a $\varphi(b) = \psi(d)$ platí

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\psi f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Věta o charakterizaci existence primitivní funkce plyne z následující dvojice lemmat.

Lemma 20.3.14 (O výpočtu křivkového integrálu pomocí primitivní funkce)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je spojitá na Ω a F je primitivní funkce k f na Ω. Pak pro každou po částech C^1-křivku $(\varphi,[a,b])$, jejíž obraz leží v Ω, platí*

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

Důkaz. Stačí se omezit na C^1-křivky. Pak máme (vzorec pro $(F(\varphi(t)))'$ nám dává pátá část Věty o vlastnostech křivkového integrálu, tedy Věta 20.3.7)

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (F(\varphi(t)))'\,\mathrm{d}t = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

□

Lemma 20.3.15 (O vztahu nezávislosti na cestě a existence primitivní funkce)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast a $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je spojitá na Ω. Jestliže křivkový integrál z funkce f nezávisí na cestě v Ω, pak f má v Ω primitivní funkci.*

Speciálně při zafixovaném $a \in \Omega$ položme

$$F(z) := \int_a^z f(w)\,\mathrm{d}w,$$

kde $\int_a^z f(w)\,\mathrm{d}w$ *je křivkový integrál z funkce* f *přes libovolnou po částech* C^1*-křivku s počátečním bodem* a*, koncovým bodem* z *a obrazem ležícím v* Ω*. Pak* F *je primitivní funkce k* f *v* Ω*.*

Důkaz. Zafixujme bod $a \in \Omega$. Pro každý bod $z \in \Omega$ pak díky souvislosti Ω existuje lomená čára s konečným počtem segmentů konečné délky, která leží v Ω a spojuje body a a b. Tu můžeme parametrizovat třeba tak, každý její bod bude odpovídat vzdálenosti, kterou urazíme po naší lomené čáře mezi uvedeným bodem a bodem a. Zparametrizovanou lomenou čáru označme $(\varphi_z, [0, l_z])$. Definujme ještě funkci

$$F(z) := \int_{\varphi_z} f(z)\,\mathrm{d}z \qquad \text{pro všechna } z \in \Omega.$$

Ověřme, že F je skutečně primitivní funkcí k f v Ω. Zvolme $z \in \Omega$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že $\mathcal{U}_\delta(z) \subset \Omega$. Zafixujme $h \in \mathbb{C}$ splňující $|h| < \delta$ a definujme křivku $\psi(t) := z + th$ pro $t \in [0, 1]$. Potom platí (nezávislosti na cestě vděčíme za třetí z následujících rovností, spojitosti f za závěrečný limitní přechod)

$$\begin{aligned}
\frac{F(z+h) - F(z)}{h} &= \frac{1}{h}\Big(\int_{\varphi_{z+h}} f(w)\,\mathrm{d}w - \int_{\varphi_z} f(w)\,\mathrm{d}w\Big) \\
&= \frac{1}{h}\int_{(\ominus\varphi_z)\oplus\varphi_{z+h}} f(w)\,\mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{h}\int_{\psi} f(w)\,\mathrm{d}w = \frac{1}{h}\int_0^1 f(z+th)h\,\mathrm{d}t \\
&= f(z) + \int_0^1 (f(z+th) - f(z))\,\mathrm{d}t \overset{h\to 0}{\to} f(z).
\end{aligned}$$

Protože křivkový integrál z funkce f nezávisí na cestě v Ω, i funkce F zkonstruovaná ve znění věty dává totéž. □

Poznámka 20.3.16. (i) Pokud má Ω více komponent, můžeme proces popsaný v důkazu provést na jednotlivých komponentách.
(ii) Z důkazu předchozí věty je vidět, že pro existenci primitivní funkce v dané otevřené množině stačí ověřit, že křivkový integrál z f nezávisí na cestě v dané množině pouze pro křivky tvořené lomenými čarami.
(iii) Dokonce se dá předchozí kritérium modifikovat tak, že se uvažují jen jednoduché uzavřené lomené čáry. To plyne z Lemmatu o rozkladu uzavřené lomené čáry (Lemma 20.3.19) uvedeného níže.
(iv) Pokud je Ω navíc konvexní, nezávislost na cestě je ekvivalentní tomu, ze je nulový křivkový integrál přes obvod každého trojúhelníka ležícího v Ω. Skutečně, v případě konvexní množiny můžeme bod a spojovat s ostatními body pomocí úseček. V takovém případě se v hlavní části důkazu předchozího lemmatu objeví trojice křivek tvořící obvod trojúhelníka. Získáme tak primitivní funkci a její existence pak implikuje nezávislost na cestě i pro obecné po částech C^1-křivky díky Lemmatu o výpočtu křivkového integrálu pomocí primitivní funkce (Lemma 20.3.14).

Důkaz Věty o charakterizaci existence primitivní funkce. Lemma o výpočtu křivkového integrálu pomocí primitivní funkce (Lemma 20.3.14) nám dává „(i)⇒(ii)“ a „(i)⇒(iii)“. Podle Lemmatu o vztahu nezávislosti na cestě a existence primitivní funkce (Lemma 20.3.15) dále máme „(iii)⇒(i)“. Zbývá ukázat „(ii)⇒(iii)“, ale to je snadné. Máme-li totiž křivky φ a ψ předepsaných vlastností, stačí na uzavřenou křivku $\varphi \oplus (\ominus\psi)$ použít výrok (ii). $\square$

Příklad 20.3.17. Jestliže $n \in \mathbb{N}$, pak funkce $f(z) = z^n$ má v $\mathbb{C}$ primitivní funkci $F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$. Následně křivkový integrál přes libovolnou uzavřenou po částech C^1-křivku v $\mathbb{C}$ z funkce f je nulový.

Jestliže $n \in -2, -3, \dots$, pak funkce $f(z) = z^n$ má v $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ primitivní funkci $F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$. Proto křivkový integrál z funkce f přes každou uzavřenou po částech C^1-křivku v $\mathbb{C}$, jejíž obraz neobsahuje počátek, je nulový.

Již dříve jsme si ukázali, že pro C^1-křivku $\varphi(t) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, kde $R > 0$ a t probíhá interval $[0, 2\pi]$, platí

$$\int_\varphi \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} (R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})'\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \mathrm{i}\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}.$$

Proto funkce $\frac{1}{z}$ nemá primitivní funkci v otevřené souvislé množině $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Tomuto zvláštnímu jevu (v porovnání s reálným případem, kde $\frac{1}{x}$ primitivní funkci má na otevřených souvislých množinách $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$; nicméně už při studiu existence potenciálu v $\mathbb{R}^N$ jsme si uvědomili, že $\mathbb{R}$ je dosti speciální metrický prostor, neboť v něm je každá souvislá množina automaticky intervalem) se budeme věnovat později.

Je také přirozené zabývat se otázkou jednoznačnosti primitivní funkce.

Věta 20.3.18 (O jednoznačnosti primitivní funkce)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast a $f, F_1, F_2 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Jestliže F_1 a F_2 jsou primitivní funkce k f na Ω, pak existuje $c \in \mathbb{C}$ takové, že*

$$F_1(z) = F_2(z) + c \qquad \text{na } \Omega.$$

Důkaz. Položme $F(z) := F_1(z) - F_2(z)$ na Ω. Pak $F'(z) = 0$ na Ω. Zafixujme $a \in \Omega$. Pro každé $b \in \Omega$ zkonstruujme lomenou čáru φ ležící v Ω a spojující a a b. Lemma o výpočtu křivkového integrálu pomocí primitivní funkce (Lemma 20.3.14) nyní dává

$$F(b) = F(a) + \int_\varphi F'(z)\,\mathrm{d}z = F(a) + \int_\varphi 0\,\mathrm{d}z = F(a).$$

Odtud $c = F(a) = F_1(a) - F_2(a)$. $\square$

Závěrem ještě uveďme jeden užitečný výsledek s technicky náročnějším důkazem. Domluvme se, že lomené čáry, o kterých se bude hovořit, automaticky parametrizujeme tak, že hodnota parametru odpovídá dráze, kterou urazíme po lomené čáře do uvažovaného bodu z počátečního bodu. Úsečkou budeme nazývat lomenou čáru s jediným segmentem. Přeskládáním budeme rozumět, že lomenou čáru přepíšeme jako spojení vhodných lomených čar (často částí jednotlivých segmentů), tyto dílčí lomené čáry přeparametrizujeme, aby byl počáteční bod obrazem nuly, a pak vzniklé lomené čáry vhodně pospojujeme do několika nových lomených čar.

Lemma 20.3.19 (O rozkladu uzavřené lomené čáry)**.** *Každou uzavřenou lomenou čáru je možné přeskládat do konečného počtu jednoduchých uzavřených lomených čar a konečného počtu dvojic obráceně orientovaných úseček.*

Důkaz. Domluvme se, že segmentem budeme nazývat část lomené čáry mezi dvěma zlomy. Naši lomenou čáru označme φ, její délku označme l a počet jejích segmentů označme $n \in \mathbb{N}$. Dva různé segmenty se mohou protínat v žádném, v jednom nebo v nekonečně mnoha bodech. Dále každou část segmentu ohraničenou průsečíky s ostatními segmenty, které se s uvažovaným segmentem protínají v jediném bodě (sem spadají i zlomy), nazývejme fragmenty. Každý segment má minimálně jeden a maximálně n fragmentů. Fragmentů má φ proto nejvýše n^2. Nyní z lomené čáry odstraníme dvojice překrývajících se fragmentů probíhaných v opačném směru.

Krok 1: odstranění dvojic překrývajících se fragmentů probíhaných v opačném směru.
Pokud neexistuje dvojice fragmentů předepsaného typu, v tomto kroku neprovádíme nic. Ukažme si postup pro opačný případ. Konstrukci můžeme provést třeba tak, že najdeme minimální $t_1 \in [0, l)$ tak, že $\varphi(t_1)$ je počátečním bodem fragmentu, který se překrývá alespoň s jedním fragmentem obíhaným v opačném směru. Z těchto fragmentů vyberme takový, jehož koncový bod $\varphi(t_4)$ má nejvyšší možnou hodnotu čísla $t_4 \in (0, l]$.

Nechť dále $t_2, t_3 \in (0, l)$ jsou taková čísla, že $\varphi(t_2)$ je koncový bod prvního z naší dvojice fragmentů a $\varphi(t_3)$ je počáteční bod druhého z naší dvojice fragmentů. Nyní označme $\varphi_1 := \varphi|_{[t_2,t_3]}$ a $\varphi_2 := \varphi|_{[0,t_1]} \oplus \varphi|_{[t_4,l]}$. Dostali jsme dvě uzavřené lomené čáry (případně jednu lomenou čáru a bod, nebo dva body; s body už dále nepracujeme).

Na každou ze získaných lomených čar nyní aplikujeme předepsanou proceduru a takto budeme pokračovat i s lomenými čarami získanými v další generaci. Proces se musí zastavit po konečném počtu kroků, neboť pokaždé zmizí dva fragmenty a jejich celkový počet je omezený číslem n^2.

Celkově jsme dostali uzavřené lomené čáry $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$. Protože každá z uvedených lomených čar obsahuje nejméně tři fragmenty, i číslo m je konečné.

Krok 2: odstranění přebytečných smyček.
Nyní se budeme zabývat zpracováním lomených čar, které jsme získali z prvního kroku. Ty z lomených čar, které jsou jednoduché, již upravovat nebudeme. Zbývající lomené čáry podrobíme další proceduře, která se dá popsat jako odstranění přebytečných smyček. Při této proceduře každou z upravovaných lomených čar rozložíme na dvě nebo více uzavřených lomených čar podle metody, kterou podrobně popíšeme níže.

Pro jednoduchost značení předpokládejme, že stále pracujeme s lomenou čarou φ délky l a že dosud není jednoduchá. Pokud existuje alepoň jedno $t_0 \in (0, l)$ tak, že $\varphi(t_0) = \varphi(0)$, vezměme toto číslo maximální možné a křivku φ rozložme na $\varphi|_{[0,t_0]}$ a $\widetilde{\varphi} := \varphi|_{[t_0,l]}$ (připomeňme, že okamžitě posouváme parametrizaci, aby počáteční bod byl obrazem nuly). První z uvedených křivek se zatím věnovat nebudeme, pokračujme s $\widetilde{\varphi}$. Jedná-li se o jednoduchou křivku, jsme s ní hotovi.

Jinak nalezneme minimální číslo $t_1 \in (0, l - t_0)$ takové, že existuje alespoň jedno $s \in (0, l - t_0]$ splňující $\widetilde{\varphi}(t_1) = \widetilde{\varphi}(s)$ (díky prvnímu kroku a volbě t_0 jako maximálního možného máme zaručeno, že nebudeme muset odstraňovat první fragment křivky $\widetilde{\varphi}$). Číslo s zafixujme jako největší možné. Nyní provedeme rozklad na $\widetilde{\varphi}_{[t_1,s]}$ (odstraňujeme přebytečnou smyčku a necháváme ji čekat na další zpracování) a $\widetilde{\widetilde{\varphi}} := \widetilde{\varphi}|_{[0,t_1]} \oplus \widetilde{\varphi}|_{[s,l-t_0]}$. Nyní uzavřenou lomenou čáru $\widetilde{\widetilde{\varphi}}$ podrobíme právě popsanému procesu (buď je $\widetilde{\widetilde{\varphi}}$ jednoduchá, nebo najdeme $t_2 \in (0, l - t_0 - t_1)$ jako minimální možný počáteční bod přebytečné smyčky a smyčku odřízneme).

Protože každá odříznutá smyčka nás připraví přinejmenším o tři fragmenty, proces se jednou musí zastavit a budeme mít jednoduchou uzavřenou lomenou čáru. Pak se postupně věnujeme uzavřeným lomeným čarám, které jsme dostali v prvním kroku nebo jako odříznuté smyčky. Každá úspěšně zpracovaná lomená čára má minimálně tři fragmenty. Proto budeme po konečném počtu kroků hotovi. $\square$

20.4 Cauchyova věta, komplexní logaritmus

V této sekci si konečně ukážeme, že každá holomorfní funkce je nekonečněkrát spojitě diferencovatelná. Tento výsledek je zároveň užitečným kritériem existence primitivní funkce. Stačí si totiž uvědomit, že pokud má spojitá funkce f primitivní funkci F na otevřené množině Ω, pak je zde F holomorfní, tudíž třídy C^∞, a proto je i funkce f holomorfní. Proto funkce, která není na Ω holomorfní (i kdyby byla spojitá), nemůže mít na Ω primitivní funkci.

Tento typ výsledků nám zpřístupní *Cauchyova věta*. Jedná se o jeden ze základních výsledků teorie funkcí komplexní proměnné. Její znění do značné míry připomíná Lemma o výpočtu křivkového integrálu pomocí primitivní funkce (Lemma 20.3.14), které zobecňuje v tom směru, že obraz křivky φ již nemusí ležet v otevřené množině, kde je zkoumaná funkce f holomorfní. Postačí, když φ bude Jordanova křivka a funkce f bude holomorfní na $\operatorname{Int}\varphi$. Navíc nebude nutné předpokládat, že funkce f má primitivní funkci F, to poplyne z toho, že f je holomorfní.

Situaci vystihuje Jordanova věta, kterou si připomeňme (vyslovíme ji v komplexní verzi, která snadno plyne z verze pro $\mathbb{R}^2$, srovnejte s Větou 17.3.17).

Věta 20.4.1 (Jordanova věta). *Nechť φ je Jordanova křivka v $\mathbb{C}$. Pak existují souvislé množiny* $\operatorname{Int}\varphi$ *(vnitřek φ) a* $\operatorname{Ext}\varphi$ *(vnějšek φ) takové, že platí*
(i) $\operatorname{Int}\varphi$ *je omezená a* $\operatorname{Ext}\varphi$ *je neomezená*
(ii) $\operatorname{Int}\varphi \cup \langle\varphi\rangle \cup \operatorname{Ext}\varphi = \mathbb{C}$, *přičemž množiny na levé straně jsou po dvou disjunktní*
(iii) $\partial(\operatorname{Int}\varphi) = \partial(\operatorname{Ext}\varphi) = \langle\varphi\rangle$.

Připomeňme si ještě jednu definici (opět rovnou uvádíme komplexní verzi, srovnejte s Definicí 17.3.20).

Definice 20.4.2 (Jednoduše souvislá oblast). Oblast $\Omega \subset \mathbb{C}$ se nazývá *jednoduše souvislá*, jestliže pro každou Jordanovu křivku $\varphi\colon [0,1] \to \Omega$ existuje spojitá funkce

$H\colon [0,1]^2 \to \Omega$ a bod $z \in \Omega$ takový, že

$$H(t,0) = \varphi(t) \quad \text{pro všechna } t \in [0,1], \quad H(0,s) = H(1,s) \quad \text{pro všechna } s \in [0,1]$$
$$\text{a} \quad H(t,1) = z \quad \text{pro všechna } t \in [0,1].$$

Podmínku z předchozí definice lze interpretovat tak, že křivku φ je možné v Ω spojitě stáhnout do bodu.

Cauchyovu větu si uvedeme v několika verzích.

Věta 20.4.3 (Cauchyova věta (první verze))**.** *Nechť φ je regulární Jordanova po částech C^1-křivka v $\mathbb{C}$, funkce $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je spojitá na $\overline{\operatorname{Int}\varphi}$ a holomorfní na* $\operatorname{Int}\varphi$*. Pak*

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Důkaz zde budeme prezentovat jen pro speciální případ, kdy f' je spojitá na $\overline{\operatorname{Int}\varphi}$, což je případ pro který větu původně dokázal Cauchy. Obsáhlý důkaz pro obecnou situaci je možné nalézt například v [Ce].

Důkaz první verze Cauchyovy věty ve speciálním případě. Předpokládejme navíc, že funkce f' je spojitá na $\overline{\operatorname{Int}\varphi}$. Důkaz bude založen na Greenově větě (Věta 17.3.18). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že φ je kladně obíhaná (jinak přejdeme k opačné křivce, přičemž změna znaménka se neprojeví díky nulovosti výsledného integrálu). Použijeme-li zápis křivkového integrálu z Poznámky 20.3.5, máme

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b \Big(\widetilde{f}(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}})\widetilde{\varphi}_1'(t) + \mathrm{i}\widetilde{f}(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}})\widetilde{\varphi}_2'(t)\Big)\,\mathrm{d}t.$$

Nyní aplikujeme již avizovanou Greenovu větu (Věta 17.3.18) a

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\operatorname{Int}\varphi} \Big(\mathrm{i}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x} - \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y}\Big)\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y) = 0$$

díky Cauchy–Riemannovým podmínkám (20.2.1). □

Ke Cauchyově větě je možné přistupovat ještě tak, že budeme mít holomorfní funkci na nějaké oblasti a uvnitř této oblasti budeme integrovat po uzavřených křivkách. Začneme jedním pomocným tvrzením.

Tvrzení 20.4.4 (Cauchyova věta pro trojúhelník)**.** *Nechť $M \subset \mathbb{C}$ je uzavřený nedegenerovaný trojúhelník a $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na nějaké otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{C}$ splňující $M \subset \Omega$. Nechť φ je regulární Jordanova po částech C^1-křivka parametrizující ∂M. Pak*

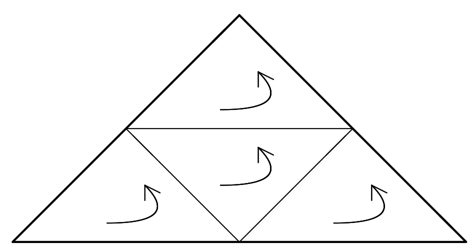
$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že φ je kladně orientovaná. Označme

$$A := \Big| \int_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z \Big|.$$

Rozdělme původní trojúhelník na čtyři podtrojúhelníky tak, že nalezneme středy úseček tvořících hranici původního trojúhelníka a tyto středy spojíme. Hranice vzniklých trojúhelníků zparametrizujme pomocí po částech C^1-zobrazení $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ tak, aby se jednalo o kladně obíhané regulární Jordanovy křivky. Protože se integrály přes přidané úsečky vyruší, máme

$$\int_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\psi_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_3} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_4} f(z)\,\mathrm{d}z.$$



Obrázek 20.2: Rozdělení trojúhelníku v důkazu Cauchyovy věty pro trojúhelník se znázorněním směrů obíhání. Nové trojúhelníky mají hrany poloviční délky oproti trojúhelníku původnímu. Přidané segmenty při integraci probíháme dvakrát, ale s opačnou orientací. Proto se integrály přes ně vyruší.

Proto musí existovat $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ takové, že $|\int_{\psi_j} f(z)\,\mathrm{d}z| \geq \frac{A}{4}$. Označme $\varphi_1 := \psi_j$. Dále rozdělíme trojúhelník, který je obíhán křivkou φ_1, na čtyři podtrojúhelníky postupem uvedeným výše a pokračujeme indukcí. Dostaneme posloupnost křivek $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ takových, že pro všechna $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\Big| \int_{\varphi_k} f(z)\,\mathrm{d}z \Big| \geq \frac{A}{4^k}, \qquad \operatorname{diam}(\operatorname{Int}\varphi_k \cup \langle\varphi_k\rangle) = \frac{1}{2^k} \operatorname{diam}(\operatorname{Int}\varphi \cup \langle\varphi\rangle)$$

a

$$\operatorname{Int}\varphi_{k+1} \cup \langle\varphi_{k+1}\rangle \subset \operatorname{Int}\varphi_k \cup \langle\varphi_k\rangle.$$

Díky Cantorově větě o průniku kompaktů (Věta 11.7.11) pak existuje $a \in \operatorname{Int}\varphi \cup \langle\varphi\rangle$ takové, že

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} (\operatorname{Int}\varphi_{k+1} \cup \langle\varphi_{k+1}\rangle) = a.$$

Protože existuje $f'(a)$ a každý polynom má primitivní funkci, dostáváme z Věty o vlastnostech křivkového integrálu (Věta 20.3.7) pro všechna $k \in \mathbb{N}$ (funkce $\eta\colon \mathbb{C} \to$

$\mathbb{C}$ uvedená níže splňuje $|\eta(h)| = \mathrm{o}(1)$ pro $|h| \to 0$)

$$\begin{aligned}\frac{A}{4^k} &\leq \Big|\int_{\varphi_k} f(z)\,\mathrm{d}z\Big| = \Big|\int_{\varphi_k} \big(f(a) + f'(a)(z-a) + \eta(z-a)(z-a)\big)\,\mathrm{d}z\Big| \\ &= \Big|\int_{\varphi_k} \big(f(a) + f'(a)(z-a)\big)\,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_k} \eta(z-a)(z-a)\,\mathrm{d}z\Big| \\ &= \Big|\int_{\varphi_k} \eta(z-a)(z-a)\,\mathrm{d}z\Big| \\ &\leq \ell_{\varphi_k} \sup_{\langle\varphi_k\rangle} |\eta(z-a)| \sup_{\langle\varphi_k\rangle} |z-a| \leq \frac{C}{2^k} \sup_{\langle\varphi_k\rangle} |\eta(z-a)| \frac{C}{2^k} = \frac{C}{4^k} \sup_{\langle\varphi_k\rangle} |\eta(z-a)|.\end{aligned}$$

Díky vlastnosti $|\eta(h)| = \mathrm{o}(1)$ pro $|h| \to 0$ platnost předešlého odhadu pro všechna $k \in \mathbb{N}$ implikuje $A = 0$. □

Věta 20.4.5 (Cauchyova věta (druhá verze))**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast a $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní v Ω. Pak pro každou uzavřenou po částech C^1-křivku φ splňující $\langle\varphi\rangle \subset \Omega$ platí*

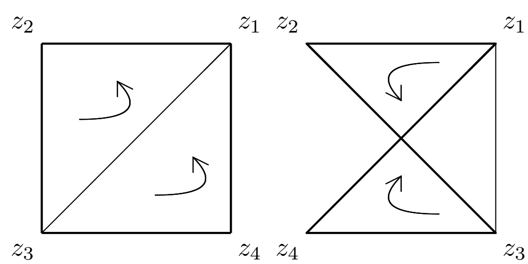
$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Důkaz. Nejprve si uvědomíme, že místo uzavřené křivky stačí uvažovat jednoduché lomené čáry. Tuto situaci poté převedeme použitím definice jednoduše souvislé oblasti (Definice 20.4.2) na integrály přes uzavřené trojúhelníky a čtyřúhelníky, čímž důkaz dokončíme. Přistupme nyní k detailnějšímu důkazu.

Krok 1: přechod k jednoduché lomené čáře.
Využijeme poznámky doprovázející Lemma o vztahu nezávislosti na cestě a existence primitivní funkce (Lemma 20.3.15). Pokud totiž dokážeme požadovaný výsledek pro všechny jednoduché lomené čáry, dokážeme tím existenci primitivní funkce. Díky tomu pak obdržíme požadovaný výsledek i v obecném případě z Lemmatu o výpočtu křivkového integrálu pomocí primitivní funkce (Lemma 20.3.14).

Krok 2: integrál přes (ne)degenerovaný trojúhelník, integrál přes (ne)degenerovaný čtyřúhelník.
Cauchyova věta pro trojúhelník nám pro libovolný nedegenerovaný trojúhelník s vrcholy z_1, z_2, z_3 takový, že celý včetně hran leží v Ω, dává, že křivkový integrál z funkce f přes jeho obvod (uvažujeme spojnici běžící z bodu z_1 do bodu z_2, dále z bodu z_2 do bodu z_3 a konečně z bodu z_3 do bodu z_1; jednotlivé segmenty kupříkladu parametrizujeme vždy afinním zobrazením a zachováváme naznačenou orientaci) je nulový. Je však zřejmé, že nulovost integrálu dostaneme i v situaci, kdy obíháme degenerovaný trojúhelník (ať už zdegeneroval do úsečky nebo do bodu).

Ukažme si dále, že nulu získáme i při integraci přes čtyřúhelník. Přesněji, při integraci přes po částech afinně parametrizovanou lomenou čáru spojující libovolné čtyři body z_1, z_2, z_3, z_4 (lomená čára proběhne body v tomto pořadí a pak z bodu z_4 zamíří do z_1). Zde můžeme dosud získaný výsledek pro trojúhelník aplikovat na trojúhelníky (při obíhání zvolíme směr odpovídající uvedenému pořadí) zadané body z_1, z_2, z_3 a z_3, z_4, z_1. Přes úsečku spojující body z_3, z_1 proběhneme dvakrát ale s opačnou orientací, proto se integrály opět vyruší.



Obrázek 20.3: Verze Cauchyovy věty pro čtyřúhelník. Přidáním jednoho segmentu vytvoříme dva trojúhelníky. Přidaný segment při integraci probíháme dvakrát, ale s opačnou orientací. Proto se integrály přes něj vyruší. Čtveřice bodů může být rozmístěna zcela libovolně a postup stále funguje.

Krok 3: rozklad integrálu přes jednoduchou uzavřenou lomenou čáru na trojúhelníky.
Uvažujme lomenou čáru získanou v prvním kroku. Nechť je parametrizována z intervalu $[0,1]$ a tato parametrizace je lineární vzhledem k délce čáry. Nechť zobrazení $H \in C([0,1]^2)$ a bod $z \in \Omega$ odpovídají naší lomené čáře jako v definici jednoduše souvislé oblasti. Předně díky tomu, že H je spojité zobrazení, je $H([0,1]^2)$ kompaktní podmnožinou množiny Ω. Díky tomu ($\mathbb{C} \setminus \Omega$ je uzavřená množina) existuje $\Delta > 0$ takové, že

$$\mathcal{U}_\Delta(a) \subset \Omega \qquad \text{pro všechna } a \in H([0,1]^2).$$

Dále funkce H je stejnoměrně spojitá. Proto existuje $\delta > 0$ takové, že

$$|H(t_1, s_1) - H(t_2, s_2)| \leq \frac{\Delta}{3}$$

kdykoliv $t_1, t_2, s_1, s_2 \in [0,1]$, $|t_1 - t_2| \leq \delta$ a $|s_1 - s_2| \leq \delta$.

Označme koncové body jednotlivých segmentů naší lomené čáry jako $z_{0,0} := H(t_0, 0), z_{0,1} := H(t_1, 0), z_{0,2} := H(t_2, 0), \ldots, z_{0,m} := H(t_m, 0)$, kde $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = 1$. Můžeme předpokládat, že $0 < t_j - t_{j-1} < \delta$ pro všechna $j \in \{1, \ldots, m\}$, v opačném případě příliš dlouhé segmenty rozdělíme na menší. Definujme nyní novou lomenou čáru tak, aby postupně spojovala body

$$z_{1,0} := H(t_0, \delta), z_{1,1} := H(t_1, \delta), z_{1,2} := H(t_2, \delta), \ldots, z_{1,m} := H(t_m, \delta).$$

Pro všechna $j \in \{1, \ldots, m\}$ pak $z_{0,j-1}, z_{0,j}, z_{1,j-1}, z_{1,j} \in B_\Delta(z_{0,j})$. Protože množina $B_\Delta(z_j)$ je konvexní, v $B_\Delta(z_j)$ leží i každá úsečka spojující libovolnou dvojici uvedených bodů. Protože $B_\Delta(z_j) \subset \Omega$, podle druhého kroku dostáváme nulový integrál přes obvod (zobecněného) čtyřúhelníka, který je zadán pomocí bodů

$z_{0,j-1}, z_{0,j}, z_{1,j}, z_{1,j-1}$ (body jsou obíhány v uvedeném pořadí). Pokud tento výsledek vysčítáme přes všechna $j \in \{1, \ldots, m\}$ (pozor na $z_{0,0} = z_{0,m}$ a $z_{1,0} = z_{1,m}$), integrály přes úsečky spojující dvojice bodů $z_{0,j}$ a $z_{1,j}$ se vyruší a dostáváme, že křivkový integrál přes původní křivku je roven integrálu přes křivku novou (po vysčítání vychází, že integrály se liší ve znaménku, přičemž nová křivka je obíhána v opačném směru).

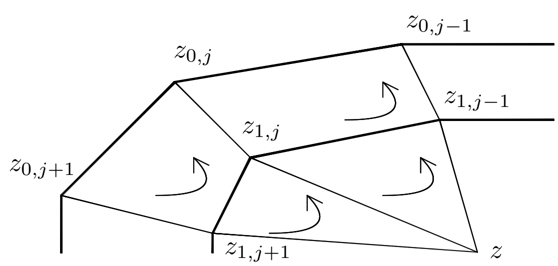
Povšimněme si ještě, že díky stejnoměrné spojitosti funkce H pro všechna $j \in \{1, \ldots, m\}$ platí $|z_{1,j} - z_{1,j-1}| \leq \frac{\Delta}{3}$. To nám umožní proces zopakovat. Tentokrát zkonstruujeme body

$$z_{2,0} := H(t_0, 2\delta), z_{2,1} := H(t_1, 2\delta), z_{2,2} := H(t_2, 2\delta), \ldots, z_{2,m} := H(t_m, 2\delta).$$

Pro všechna $j \in \{1, \ldots, m\}$ pak platí $z_{1,j-1}, z_{1,j}, z_{2,j-1}, z_{2,j} \in B_\Delta z_{1,j}$ a dostáváme, že integrál přes třetí křivku je roven integrálu přes druhou křivku. Je tedy roven integrálu původnímu.

Podobně pokračujeme i v dalších krocích. Proces zakončíme po k krocích, kde $k \in \mathbb{N}$ splňuje $k\delta < 1 \leq (k+1)\delta$.

Nyní budeme pracovat s trojúhelníky spojujícími $z, z_{k,j-1}, z_{k,j}$ (z je bod z definice jednoduše souvislé oblasti). Podle Cauchyovy věty pro trojúhelník jsou integrály přes všechny tyto trojúhelníky nulové. Díky vyrušení integrálů přes přidané úsečky dostáváme, že integrál přes lomenou čáru zkonstruovanou v k-tém kroku je nulový. Nulový je proto i původní integrál.



Obrázek 20.4: Myšlenka konstrukce z důkazu druhé verze Cauchyovy věty.

□

Z předchozí věty a Věty o charakterizaci existence primitivní funkce (Věta 20.3.12) dostáváme následující výsledek.

Důsledek 20.4.6 (Existence primitivní funkce pro holomorfní funkce)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast a $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na Ω. Pak f má na Ω primitivní funkci.*

Věta 20.4.7 (Cauchyova věta (třetí verze))**.** *Nechť $k \in \mathbb{N}$ a $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$ jsou regulární Jordanovy po částech C^1-křivky v $\mathbb{C}$, pro které platí*

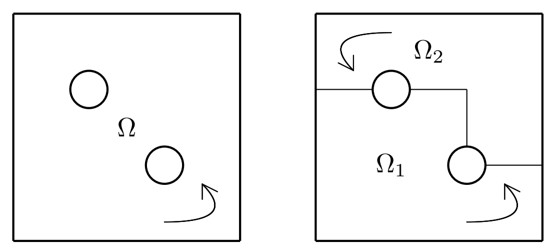
$$\operatorname{Int} \varphi_j \cup \langle \varphi_j \rangle \subset \operatorname{Int} \varphi \qquad \textit{pro všechna } j \in \{1, \ldots, k\},$$

$$(\operatorname{Int}\varphi_i \cup \langle\varphi_i\rangle) \cap (\operatorname{Int}\varphi_j \cup \langle\varphi_j\rangle) = \emptyset \qquad \textit{kdykoliv } i \neq j$$

a všechny uvedené křivky jsou obíhány ve stejném smyslu. Položme $\Omega := \operatorname{Int}\varphi \setminus \bigcup_{j=1}^{k}(\operatorname{Int}\varphi_j \cup \langle\varphi_j\rangle)$*. Nechť funkce* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní na* Ω *a spojitá na* $\overline{\Omega}$*. Pak*

$$\int_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{k} \int_{\varphi_j} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Třetí verzi Cauchyovy věty budeme typicky používat jen ve velice jednoduchých situacích. Kupříkladu φ bude obíhat velký půlkruh nebo obdélník, k bude velmi malé, a $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ budou obíhat malé kruhy a dokonce f bude holomorfní na množině Ω mimo středy těchto malých kruhů. Pak je zcela korektní důkaz založený na následující konstrukci, kdy množinu Ω rozdělíme na dvě disjunktní jednoduše souvislé oblasti Ω_1 a Ω_2 jako na Obrázku 20.5.



Obrázek 20.5: Důkaz třetí verze Cauchyovy věty v jednoduchém případě: přidáním několika lomených čar probíhaných dvakrát v opačných směrech vytvoříme jednoduše souvislé oblasti Ω_1 a Ω_2, na které se dá použít první verze Cauchyovy věty.

Dále se budeme věnovat zavedení komplexního logaritmu jako inverzní funkce k exponenciále. Situace je v komplexním případě složitější než v reálném případě díky tomu, že komplexní exponenciála je $2\pi\mathrm{i}$-periodická ($\mathrm{e}^{z_1+\mathrm{i}z_2} = \mathrm{e}^{z_1}(\cos z_2 + \mathrm{i}\sin z_2)$). Podobně jako jsme při zavedení funkce arcsin byli nuceni zúžit definiční obor funkce sin, i zde budeme zužovat definiční obor komplexní exponenciály. Poměrně přirozené je pracovat třeba s množinou

$$\{z = z_1 + \mathrm{i}z_2 \in \mathbb{C}\colon z_1 \in \mathbb{R}, z_2 \in (-\pi, \pi)\} \setminus \{0\}$$

(vodorovný pás bez počátku) a zavést (na pravé straně následující rovnosti bereme již zavedený reálný logaritmus)

$$\log z := \log|z| + \mathrm{i}\arg z.$$

Pak totiž máme

$$\mathrm{e}^{\log z} = \mathrm{e}^{\log|z| + \mathrm{i}\arg z} = \mathrm{e}^{\log|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z} = |z|(\cos(\arg z) + \mathrm{i}\sin(\arg z)) = z.$$

Při praktickém použití se však někdy ukazuje jako výhodnější vybírat argument komplexního čísla i z jiných intervalů. To nás vede k zavádění i jiných verzí logaritmu. Standardně používaná terminologie dokonce zašla tak daleko, že se ke komplexnímu logaritmu přistupuje jako k víceznačné funkci (podobně jako se zavedly dvě hodnoty druhé odmocniny z komplexního čísla) a uvádíme všechny přípustné hodnoty logaritmu (posunuté o $\mathrm{i}2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$). Například (mnohoznačné funkce jako argument či komplexní logaritmus budeme značit velkým písmenem)

$$\operatorname{Log} \mathrm{i} = \{\mathrm{i}(\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi) \colon k \in \mathbb{Z}\}.$$

Pokud naopak jako logaritmus bereme hodnotu z předem zvolené množiny, kde je exponenciála prostá, říkáme, že jsme zvolili *jednoznačnou větev komplexního logaritmu.*

Doposud jsme se na problémy spojené se zavedením komplexního logaritmu dívali spíše z pohledu zúženého definičního oboru komplexní exponenciály, tedy z pohledu oboru hodnot budoucí jednoznačné větve komplexního logaritmu. Věnujme se také podobě definičního oboru připouštějícího existenci jednoznačné větve komplexního logaritmu.

Věta 20.4.8 (O komplexním logaritmu)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast, $1 \in \Omega$ a $0 \notin \Omega$. Potom je v oblasti Ω definovaná funkce $\log_\Omega$ splňující*
(i) $\mathrm{e}^{\log_\Omega z} = z$ *na* Ω
(ii) $\log_\Omega$ *je holomorfní na* Ω
(iii) *existuje $\delta \in (0,1)$ takové, že $\log_\Omega r = \log r$ (napravo je reálný logaritmus) pro všechna $r \in (1-\delta, 1+\delta)$.*

Důkaz. Funkce $\frac{1}{z}$ je holomorfní v Ω ($0 \notin \Omega$), a proto podle druhé verze Cauchyovy věty (Věta 20.4.5) integrál z této funkce nezávisí na cestě v Ω. Pro každé $z \in \Omega$ položme

$$\log_\Omega z := \int_\varphi \frac{1}{z}\, \mathrm{d}z,$$

kde φ je lomená čára ležící v Ω s počátečním bodem 1 a koncovým bodem z. Díky souvislosti množiny Ω taková lomená čára existuje alespoň jedna a navíc z faktů uvedených výše plyne, že hodnota $\log_\Omega z$ nezávisí na volbě lomené čáry, a proto je definice korektní. Standardní postup (jako v důkazu Lemmatu o vztahu nezávislosti na cestě a existence primitivní funkce, tedy Lemmatu 20.3.15) ukazuje, že $\log_\Omega$ je holomorfní na Ω a platí zde $\log'_\Omega z = \frac{1}{z}$.

Dokažme vlastnost (i). Zde si stačí povšimnout, že

$$\left(z\mathrm{e}^{-\log_\Omega z}\right)' = \mathrm{e}^{-\log_\Omega z} - z\mathrm{e}^{-\log_\Omega z} \log'_\Omega z = 0.$$

Podle Věty o jednoznačnosti primitivní funkce (Věta 20.3.18) je $z\mathrm{e}^{-\log_\Omega z}$ konstantní na Ω. Při volbě $z = 1$ navíc máme

$$z\mathrm{e}^{-\log_\Omega z}|_{z=1} = 1\mathrm{e}^0 = 1.$$

Proto je zmíněná konstanta rovna jedné a odtud plyne (i).

Zbývá třetí vlastnost. V tomto případě si stačí uvědomit, že pro čísla $z = r + \mathrm{i}0$, kde $r \in \mathbb{R}$ je dostatečně blízko k číslu 1, můžeme v definičním vztahu pro $\log_\Omega z$ vzít úsečku spojující body 1 a z (křivkový integrál proto probíhá jen část reálné osy). Pak máme

$$\log_\Omega r = \int_\varphi \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_1^r \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\log t]_1^r = \log r.$$

□

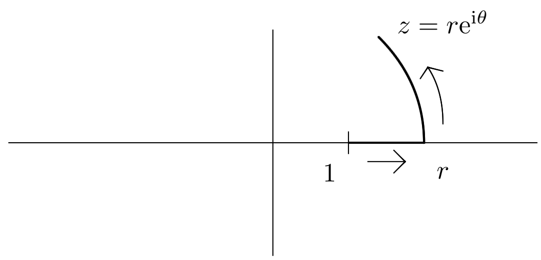
Poznámka 20.4.9. (i) Při zavedení funkce $\log_\Omega$ v důkazu předchozí věty jsme jsme nemuseli používat jen lomené čáry. Šlo použít i po částech C^1-křivky. Pokud

$$\Omega := \mathbb{C} \setminus \{t + \mathrm{i}0\colon t \le 0\},$$

lze volit křivky následujícím způsobem. Pro $z \in \Omega$ budeme používat značení $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, kde $r = |z|$ a $\theta \in (-\pi, \pi)$. Křivku v definici $\log_\Omega z$ zvolme tak, že nejprve běžíme po reálné ose z bodu 1 do bodu r a pak po kružnici centrované v počátku běžíme z bodu r do bodu z. Přímý výpočet pak dává

$$\log_\Omega z = \int_\varphi \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_1^r \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_0^\theta \frac{1}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})'\,\mathrm{d}t = [\log t]_1^r + \int_0^\theta \mathrm{i}\,\mathrm{d}t = \log r + \mathrm{i}\theta.$$

V této situaci hovoříme o *hlavní hodnotě logaritmu* (nejčastěji používaná větev komplexního logaritmu).



Obrázek 20.6: Znázornění křivky z výpočtu hlavní hodnoty logaritmu.

Pokud bychom kupříkladu vzali $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{0 + \mathrm{i}t\colon t \ge 0\}$, dostali bychom větev logaritmu pracující tak, že

$$\log_\Omega z = \log|z| + \mathrm{i}\arg z, \qquad \text{kde } \arg z \in (-\tfrac{3\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}).$$

Pokud bychom vzali $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{0 + \mathrm{i}t\colon t \le 0\}$, dostali bychom $\arg z \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

(ii) Předchozí věta hovoří jen o větvích komplexního logaritmu, které mají v bodě 1 nulovou hodnotu. Existují i větve, které zde mají hodnotu $\mathrm{i}2k\pi$ pro

$k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Pro ně platí první dvě vlastnosti z věty. Při jejich důkazu stačí položit

$$\log_\Omega z := \mathrm{i}2k\pi + \int_\varphi \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$$

a pak postupovat jako výše.

Poznamenejme ještě, že některé identity, na které jsme zvyklí z teorie funkcí reálných proměnných, pro komplexní logaritmus neplatí. Kupříkladu máme

$$\log(zw) = \log z + \log w + \mathrm{i}2k\pi \qquad \text{pro jediné vhodné } k \in \mathbb{Z},$$

kde k závisí na volbě z,w a větve komplexního logaritmu; to se týká práce s jedinou větví, pokud naopak pracujeme s logaritmem jako s víceznačnou funkcí, rovnost platí i bez korekčního členu $\mathrm{i}2k\pi$, tedy

$$\mathrm{Log}(zw) = \mathrm{Log}\, z + \mathrm{Log}\, w.$$

Pro hlavní větev logaritmu navíc platí

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} \qquad \text{pro } |z| < 1.$$

To plyne z toho, že oba výrazy se rovnají v bodě 0 a navíc oba mají na $B_1(0)$ derivaci rovnou $\frac{1}{1+z}$.

Podobně jako v reálném případě, zavedení logaritmu nám umožňuje zavést ještě *obecnou mocninu*. Ta je závislá na volbě větve logaritmu. Pokládáme

$$z^\alpha := \mathrm{e}^{\alpha \log z},$$

kde $\alpha \in \mathbb{C}$ a z bereme pouze z definičního oboru uvažované větve logaritmu. Navíc bývá obvyklé volit jen takové větve logaritmu, že platí $\log 1 = 0$. Pak totiž máme

$$1^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \log 1} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

20.4.1 Aplikace Cauchyovy věty na výpočet integrálů

Zde si ukážeme dva příklady aplikace Cauchyovy věty. Jednak se budeme zabývat obtížným integrálem takového typu, jaké nám v další kapitole přichystá Fourierova transformace. Dále se budeme věnovat dvěma obtížným reálným integrálům.

Příklad 20.4.10 (Příklad související s Fourierovou transformací)**.** Zabývejme se integrálem

$$I(\lambda,\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi x\xi}\,\mathrm{d}x,$$

kde $\lambda, \xi \in \mathbb{R}$. Vidíme, že integrand patří do $L^1(\mathbb{R})$ pro každé $\lambda > 0$ a $\xi \in \mathbb{R}$. Předně si povšimněme, že volba $\xi := 0$ dává

$$I(\lambda,0) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}.$$

Dále platí $I(\lambda,\xi) = I(\lambda,-\xi)$ (stačí provést substituci $y = -x$). Proto budeme pracovat jen s $\xi > 0$.

Integrál si ještě přepišme do vhodnější podoby

$$I(\lambda,\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda(x+\mathrm{i}\pi\frac{\xi}{\lambda})^2 - \frac{\pi^2\xi^2}{\lambda}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\frac{\pi^2\xi^2}{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda(x+\mathrm{i}\pi\frac{\xi}{\lambda})^2}\,\mathrm{d}x.$$

Počítáme proto integrál typu

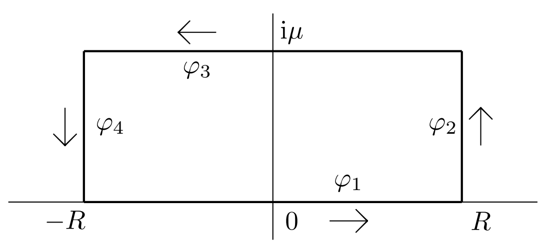
$$J := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda(x+\mathrm{i}\mu)^2}\,\mathrm{d}x,$$

kde $\mu > 0$ (v našem případě je $\mu := \pi\frac{\xi}{\lambda}$).

Pozor, formálně by se mohlo zdát, že integrál substitucí $x+\mathrm{i}\mu = y$ „převedeme“ na nám dobře známý případ integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda y^2}\,\mathrm{d}y$. To ale není možné. I když formálně v tomto případě by výsledek vyšel správně, později si ukážeme příklad, kdy by tato „substituce“ vedla ke špatnému výsledku. Uvědomme si, že takovou substituci nemůžeme provést, protože proměnná y by byla komplexní.

Na chvíli zafixujme $R > 0$. Cauchyovu větu použijeme na holomorfní funkci $f(z) = \mathrm{e}^{-\lambda z^2}$ a na křivku $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus \varphi_3 \oplus \varphi_4$, kde

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= t + \mathrm{i}0 && \text{pro } t \in [-R,R]\\
\varphi_2(t) &= R + \mathrm{i}t && \text{pro } t \in [0,\mu]\\
\varphi_3(t) &= -t + \mathrm{i}\mu && \text{pro } t \in [-R,R]\\
\varphi_4(t) &= -R + \mathrm{i}(\mu - t) && \text{pro } t \in [0,\mu].
\end{aligned}$$



Obrázek 20.7: Znázornění křivky z příkladu souvisejícího s Fourierovou transformací.

Nejprve si povšimněme, že díky druhé verzi Cauchyovy věty (Věta 20.4.5) máme

$$\int_{\varphi} \mathrm{e}^{-\lambda z^2}\,\mathrm{d}z = 0.$$

Nyní se budeme věnovat integrálům přes jednotlivé části křivky φ. Označme

$$J_2 := \int_{\varphi_2} \mathrm{e}^{-\lambda z^2}\,\mathrm{d}z.$$

Pak máme

$$|J_2| \le \sup_{\langle\varphi_2\rangle} |\mathrm{e}^{-\lambda z^2}|\ell_{\varphi_2} = \mu \max_{t\in[0,\mu]} |\mathrm{e}^{-\lambda(R+it)^2}| = \mu \max_{t\in[0,\mu]} |\mathrm{e}^{-\lambda(R^2-t^2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\lambda Rt}|$$
$$= \mu\mathrm{e}^{-\lambda(R^2-\mu^2)} \overset{R\to+\infty}{\to} 0.$$

Podobně dostaneme
$$J_4 := \int_{\varphi_4} \mathrm{e}^{-\lambda z^2}\,\mathrm{d}z \overset{R\to+\infty}{\to} 0.$$

Dále
$$J_1 := \int_{\varphi_1} \mathrm{e}^{-\lambda z^2}\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-\lambda t^2}\,\mathrm{d}t \overset{R\to+\infty}{\to} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}},$$

kde jsme při limitním přechodu použili třeba Lebesgueovu větu o monotonní konvergenci (Věta 15.8.15).

Pro zbývající integrál J_3 máme

$$J_3 = \int_{\varphi_3} \mathrm{e}^{-\lambda z^2}\,\mathrm{d}z = -\int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-\lambda(t+\mathrm{i}\mu)^2}\,\mathrm{d}t \overset{R\to+\infty}{\to} -\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda(t+\mathrm{i}\mu)^2}\,\mathrm{d}t = J.$$

Zde nám limitní přechod umožňuje Lebesgueova věta o majorizované konvergenci (Věta 15.8.17) a $L^1(\mathbb{R})$-majorantu nám dává odhad

$$|\mathrm{e}^{-\lambda(t+\mathrm{i}\mu)^2}| = |\mathrm{e}^{-\lambda(t^2-\mu^2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\lambda t\mu}| = \mathrm{e}^{-\lambda(t^2-\mu^2)}.$$

Celkově jsme dostali

$$0 = \int_{\varphi} \mathrm{e}^{-\lambda z^2}\,\mathrm{d}z = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 \overset{R\to+\infty}{\to} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + 0 - J + 0.$$

Proto
$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda(x+\mathrm{i}\mu)^2}\,\mathrm{d}x = J = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}.$$

Odtud konečně dostáváme

$$I(\lambda,\xi) = \mathrm{e}^{-\frac{\pi^2\xi^2}{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda(x+\mathrm{i}\pi\frac{\xi}{\lambda})^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2\xi^2}{\lambda}} \quad \text{pro všechna } \lambda > 0 \text{ a } \xi \in \mathbb{R}.$$

Poznámka 20.4.11. Speciální volba $\lambda = \pi$ v předchozím příkladu dává

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi x^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi x\xi}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\pi\xi^2}.$$

Tento výsledek budeme v teorii Fourierovy transformace interpretovat tak, že funkce $\mathrm{e}^{-\pi x^2}$ se transformuje sama na sebe.

Příklad 20.4.12 (Fresnelovy integrály)**.** Spočítáme Fresnelovy integrály

$$(\mathcal{N})\int_0^\infty \cos(x^2)\,\mathrm{d}x \qquad \text{a} \qquad (\mathcal{N})\int_0^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x.$$

Předně poznamenejme, že substituce $t = x^2$ dává

$$(\mathcal{N})\int_0^\infty \cos(x^2)\,\mathrm{d}x = (\mathcal{N})\int_0^\infty \frac{\cos t}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

Z tohoto zápisu je snadné ukázat, že uvedený integrál neexistuje jako Lebesgueův a existuje jako Newtonův (či zobecněný Lebesgueův). Podobně pro druhý integrál. Můžeme však psát (úplně napravo je Lebesgueův integrál)

$$(\mathcal{N})\int_0^\infty \cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}(\mathcal{N})\int_0^R \cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \cos(x^2)\,\mathrm{d}x.$$

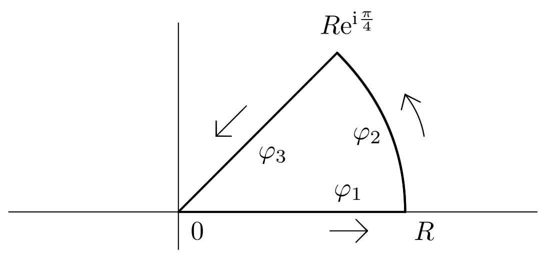
Označme $I_R := \int_0^R \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$. Podobně dostáváme

$$(\mathcal{N})\int_0^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} J_R,$$

kde $J_R := \int_0^R \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$.

Cauchyovu větu budeme nyní aplikovat na holomorfní funkci $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}$ a křivku $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus \varphi_3$, kde

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= t + \mathrm{i}0 && \text{pro } t \in [0, R] \\ \varphi_2(t) &= R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} && \text{pro } t \in [0, \tfrac{\pi}{4}] \\ \varphi_3(t) &= -t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} && \text{pro } t \in [-R, 0]. \end{aligned}$$



Obrázek 20.8: Znázornění křivky z výpočtu Fresnelových integrálů.

Nejprve si povšimněme, že díky druhé verzi Cauchyovy věty (Věta 20.4.5) máme

$$\int_\varphi \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\,\mathrm{d}z = 0.$$

Nyní se budeme věnovat integrálům přes jednotlivé části křivky φ. Máme

$$J_1 := \int_{\varphi_1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\,\mathrm{d}z = \int_0^R \big(\cos(t^2) + \mathrm{i}\sin(t^2)\big)\,\mathrm{d}t = I_R + \mathrm{i}J_R$$

a

$$\begin{aligned} J_3 := &\int_{\varphi_3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\,\mathrm{d}z = -\int_{-R}^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\,\mathrm{d}t = -\int_0^R \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\,\mathrm{d}t \\ &= -\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)\int_0^R \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \overset{R\to+\infty}{\to} -\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)\frac{\sqrt{\pi}}{2} = -\frac{\sqrt{2\pi}}{4} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2\pi}}{4}. \end{aligned}$$

Poslední integrál nám dá trochu práce. Přímým výpočtem získáme

$$\begin{aligned} J_2 := &\int_{\varphi_2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\,\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}R^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2t}}\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}R^2(\cos(2t)+\mathrm{i}\sin(2t))}\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-R^2\sin(2t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}R^2\cos(2t)}\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Odtud a z odhadu $\sin s \geq \frac{2}{\pi}s$ platného pro všechna $s \in [0, \frac{\pi}{2}]$ dostáváme

$$\begin{aligned} |J_2| \leq &\int_0^{\frac{\pi}{4}} |\mathrm{e}^{-R^2\sin(2t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}R^2\cos(2t)}\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}|\,\mathrm{d}t = R\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-R^2\sin(2t)}\,\mathrm{d}t \leq R\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-R^2\frac{4t}{\pi}}\,\mathrm{d}t \\ &= R\Big[-\frac{\pi}{4R^2}\mathrm{e}^{-R^2\frac{4t}{\pi}}\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4R}\Big[-\mathrm{e}^{-R^2\frac{4t}{\pi}}\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4R}(1 - \mathrm{e}^{-R^2}) \overset{R\to+\infty}{\to} 0. \end{aligned}$$

Celkově jsme dostali

$$0 = \int_{\varphi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\,\mathrm{d}z = J_1 + J_2 + J_3 \overset{R\to+\infty}{\to} \lim_{R\to+\infty} I_R + \mathrm{i}\lim_{R\to+\infty} J_R + 0 - \frac{\sqrt{2\pi}}{4} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Proto

$$(\mathcal{N})\int_0^\infty \cos(x^2)\,\mathrm{d}x = (\mathcal{N})\int_0^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Při odhadu integrálu J_2 jsme narazili na situaci, která se v aplikacích Cauchyovy věty vyskytuje poměrně často. Dá se popsat obecněji.

Lemma 20.4.13 (Jordanovo lemma)**.** *Nechť $R_0 > 0$, $\Omega := \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im} z > 0, |z| > R_0\}$, $\alpha \geq 0$ a $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je spojitá na $\overline{\Omega}$. Pro každé $R \geq R_0$ definujme křivku Γ_R předpisem*

$$\Gamma_R(t) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \qquad \text{pro } t \in [0, \pi].$$

Definujme ještě $M_R = \max_{\langle\Gamma_R\rangle} |f|$. Jestliže nastal jeden z případů
(i) $\alpha = 0$ a $RM_R \to 0$ pro $R \to +\infty$
(ii) $\alpha > 0$ a $M_R \to 0$ pro $R \to +\infty$,
pak

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}\,\mathrm{d}z \overset{R\to\infty}{\to} 0.$$

Analogické tvrzení platí pro $\Omega := \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im} z < 0, |z| > R_0\}$, $\alpha \geq 0$, *křivky*

$$\Gamma_R(t) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \qquad \textit{pro } t \in [\pi, 2\pi]$$

a integrály $\int_{\Gamma_R} f(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha z}\,\mathrm{d}z$.

Důkaz. Podrobně se budeme zabývat jen případem s horní polorovinou, druhý případ se dokáže podobně. Počítejme

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{\Gamma_R} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}\,\mathrm{d}z\Big| = {}&\Big|\int_0^\pi f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t\Big| \\
={}&\Big|\int_0^\pi f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha R(\cos t + \mathrm{i}\sin t)}\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t\Big| \\
\leq{}&\int_0^\pi |f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})||\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha R\cos t}\mathrm{e}^{-\alpha R\sin t}\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}|\,\mathrm{d}t \leq RM_R\int_0^\pi \mathrm{e}^{-\alpha R\sin t}\,\mathrm{d}t \\
={}&2RM_R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-\alpha R\sin t}\,\mathrm{d}t \leq 2RM_R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-\alpha R\frac{2}{\pi}t}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

V případě $\alpha = 0$ požadovaný výsledek plyne hned z posledního odhadu. Pro $\alpha > 0$ stačí již jen dokončit výpočet

$$2RM_R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-\alpha R\frac{2}{\pi}t}\,\mathrm{d}t = 2RM_R\Big[\frac{\pi}{2\alpha R}\mathrm{e}^{-\alpha R\frac{2}{\pi}t}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = M_R\frac{\pi}{\alpha}(1 - \mathrm{e}^{-\alpha R})$$

a jsme hotovi.

□

20.5 Cauchyův vzorec a jeho důsledky

Nyní přistoupíme k postupnému důkazu tvrzení, že každá holomorfní funkce má derivace všech řádů. Od této chvíle budeme velice často integrovat přes kladně orientované kružnice centrované v zadaném bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ a o poloměru $r > 0$. Takovou křivku budeme značit $C_r(z_0)$, přesněji

$$C_r(z_0)(t) = z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \qquad \text{pro } t \in [0, 2\pi].$$

Věta 20.5.1 (Cauchyův vzorec)**.** *Nechť* Γ *je kladně orientovaná Jordanova po částech* C^1*-křivka v* $\mathbb{C}$. *Nechť* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní na* $\operatorname{Int}\Gamma$ *a spojitá na* $\overline{\operatorname{Int}\Gamma}$. *Pak pro každé* $z_0 \in \operatorname{Int}\Gamma$ *platí*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z.$$

Navíc f *má v* $\operatorname{Int}\Gamma$ *derivace všech řádů a pro každé* $z_0 \in \operatorname{Int}\Gamma$ *a každé* $k \in \mathbb{N}$ *platí*

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}z.$$

Důkaz. Zafixujme $z_0 \in \operatorname{Int}\Gamma$. Protože $\operatorname{Int}\Gamma$ je otevřená množina, existuje $r > 0$ takové, že $\overline{B_r(z_0)} \subset \operatorname{Int}\Gamma$. Pak máme

$$\int_{C_r(z_0)} \frac{1}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}.$$

Aplikujme nyní třetí verzi Cauchyovy věty (Věta 20.4.7) na křivky Γ a $C_r(z_0)$ a na funkci $\frac{f(z)}{z-z_0}$, která je holomorfní na $\operatorname{Int}\Gamma \setminus \{z_0\}$ a spojitá na $\overline{\operatorname{Int}\Gamma} \setminus \{z_0\}$. Celkově dostáváme

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z - f(z_0)\Big| &= \Big|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z - f(z_0)\Big| \\
&= \Big|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z\Big| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\sup_{\langle C_r(z_0)\rangle}\Big|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\Big|\ell_{C_r(z_0)} \\
&= r\sup_{\langle C_r(z_0)\rangle}\Big|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\Big|.
\end{aligned}$$

Protože existuje $f'(z_0)$, je výraz $|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}|$ omezený na jistém okolí bodu z_0. Protože navíc $r > 0$ mohlo být libovolně malé, máme

$$\Big|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z - f(z_0)\Big| = 0,$$

což je ekvivalentní prvnímu z dokazovaných vzorců.

Nyní dokažme druhý vzorec pro $k = 1$. Zafixujme $z_0 \in \operatorname{Int}\Gamma$ a zvolme $d > 0$ dost malé, aby $B_{2d}(z_0) \subset \operatorname{Int}\Gamma$. Pak pro každé $h \in \mathbb{C}$ splňující $|h| < d$ platí

$$\begin{aligned}
\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} &= \frac{1}{h}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-(z_0+h)}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{h}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-(z_0+h))(z-z_0)}\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Dále pro všechna $z \in \langle\Gamma\rangle$ máme

$$\Big|\frac{1}{(z-(z_0+h))(z-z_0)} - \frac{1}{(z-z_0)^2}\Big| = \Big|\frac{h}{(z-(z_0+h))(z-z_0)^2}\Big| \le \frac{|h|}{d(2d)^2} = \frac{|h|}{4d^3}.$$

Tedy

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z\Big| \\
&= \Big|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma f(z)\Big(\frac{1}{(z-(z_0+h))(z-z_0)} - \frac{1}{(z-z_0)^2}\Big)\Big| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\sup_{\langle\Gamma\rangle}\Big|f(z)\Big(\frac{1}{(z-(z_0+h))(z-z_0)} - \frac{1}{(z-z_0)^2}\Big)\Big|\ell_\Gamma \\
&\le \frac{1}{2\pi}C\frac{|h|}{4d^3}C \overset{|h|\to 0}{\to} 0.
\end{aligned}$$

Proto platí $f'(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z$.

Důkaz existence $f''(z_0)$ a odpovídajícího vzorce začneme využitím vzorce pro $f'(z_0)$ ve formuli

$$\begin{aligned}\frac{f'(z_0+h)-f'(z_0)}{h} &= \frac{1}{h}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-(z_0+h))^2}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{h}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z\\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma f(z)\frac{1}{h}\Big(\frac{1}{(z-(z_0+h))^2}-\frac{1}{(z-z_0)^2}\Big)\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Pak postupujeme podobně jako výše.

Pokračujeme indukcí. V každém kroku je klíčovým momentem odhad výrazu

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h(z-(z_0+h))^k} - \frac{1}{h(z-z_0)^k} - \frac{k}{(z-z_0)^{k+1}}\\ &\qquad = \frac{(z-z_0)^{k+1}-(z-z_0)(z-(z_0+h))^k - kh(z-(z_0+h))^k}{h(z-(z_0+h))^k(z-z_0)^{k+1}}\\ &\qquad = \frac{(z-z_0)^{k+1}-(z-z_0)((z-z_0)-h)^k - kh((z-z_0)-h)^k}{h((z-z_0)-h)^k(z-z_0)^{k+1}}\\ &\qquad = \frac{1-(1-\frac{h}{z-z_0})^k - k\frac{h}{z-z_0}(1-\frac{h}{z-z_0}))^k}{h((z-z_0)-h)^k}.\end{aligned}$$

Zde si vypomůžeme pomocí binomické věty. □

Důsledek 20.5.2 (O holomorfnosti derivací)**.** *Je-li f holomorfní v otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{C}$, pak zde má parciální derivace všech řádů a všechny jsou zde holomorfní. Navíc funkce $u, v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ reprezentující reálnou a imaginární složku funkce f jsou nekonečněkrát diferencovatelné v odpovídající množině a všechny jejich derivace jsou harmonické.*

Důkaz. Okolo každého bodu $z \in \Omega$ umíme zkonstruovat malý kruh $\overline{B_r(z)}$, který leží v Ω. Za Jordanovu křivku pak zvolíme $C_r(z)$. Z předešlé věty dostaneme, že funkce f má v bodě z derivace všech řádů. Dále podle První věty o Cauchy–Riemannových podmínkách (Věta 20.2.9) a Druhé věty o Cauchy–Riemannových podmínkách (Věta 20.2.11) máme

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_1,z_2) - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}(z_1,z_2) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_1,z_2) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(z_1,z_2).$$

Povšimněme si, že výrazy $\frac{\partial u}{\partial x}$ a $\frac{\partial v}{\partial y}$ reprezentují reálnou složku (níže jí budeme říkat U) holomorfní funkce f' a výrazy $-\frac{\partial u}{\partial y}$ a $\frac{\partial v}{\partial x}$ imaginární složku (níže jí budeme říkat V). Proto jsou všechny parciální derivace prvního řádu harmonické.

Náš proces můžeme iterovat. Cauchy–Riemannovy podmínky pro f'' jsou

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

a

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Zde vidíme, že všechny parciální derivace druhého řádu jsou harmonické.

Postupujeme indukcí. Protože v každém kroku derivujeme všechny funkce podle všech proměnných, každá parciální derivace $\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m \partial y^n}$ (nebo $\frac{\partial^{m+n}v}{\partial x^m \partial y^n}$) se dočká okamžiku, kdy bude ukázáno, že je harmonická. □

Cauchyův vzorec nám umožňuje dokázat řadu dalších výsledků.

Věta 20.5.3 (O střední hodnotě)**.** *Nechť $r > 0$, $z_0 = z_1 + \mathrm{i}z_2 \in \mathbb{C}$ a $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na $B_r(z_0)$ a spojitá na $\overline{B_r(z_0)}$. Pak*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_\psi \widetilde{f}\,\mathrm{d}s,$$

kde pod křivkovým integrálem prvního druhu máme funkci $\widetilde{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ definovanou předpisem $\widetilde{f}(x,y) = f(x+\mathrm{i}y)$ a $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ je křivka definovaná předpisem

$$\psi(t) = (z_1 + r\cos t, z_2 + r\sin t) \qquad \textit{pro } t \in [0, 2\pi].$$

Důkaz. Použijme Cauchyův vzorec na křivku $\Gamma(t) = z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, kde $t \in [0, 2\pi]$. Pak máme

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_1 + r\cos t + \mathrm{i}(z_2 + r\sin t))\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \widetilde{f}(z_1 + r\cos t, z_2 + r\sin t) r\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi r} \int_\psi \widetilde{f}\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

□

Věta 20.5.4 (Princip maxima modulu)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast a $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na Ω. Jestliže f na Ω nabývá svého maxima modulu (vzhledem k Ω), pak je konstantní na Ω.*

Důkaz. Předpokládejme, že existuje $z_0 \in \Omega$ takové, že

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \qquad \text{pro všechna } z \in \Omega.$$

Protože Ω je otevřená, existuje $\varrho > 0$ takové, že $B_\varrho(z_0) \subset \Omega$. Důkaz rozdělíme do několika kroků.

Krok 1: důkaz konstantnosti $|f|$ na $B_\varrho(z_0)$.

Pro všechna $r \in (0, \varrho)$ můžeme aplikovat Cauchyův vzorec na křivku $C_r(z_0)$ a dostáváme

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= \Big| \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z \Big| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(z)|}{|z - z_0|} |\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}|\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|}{r} r\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|\,\mathrm{d}t \leq |f(z_0)|. \end{aligned}$$

Vidíme, že v předchozím výpočtu jsou všude rovnosti. Navíc funkce $z \mapsto |f(z)|$ je spojitá na Ω, a proto musí platit $|f(z)| = |f(z_0)|$ na $\langle C_r(z_0)\rangle$. Protože $r \in (0, \varrho)$ bylo libovolné, máme

$$|f(z)| = |f(z_0)| \qquad \text{na } B_\varrho(z_0).$$

Krok 2: důkaz konstantnosti f na $B_\varrho(z_0)$.
Pokud $|f(z_0)| = 0$, podle předchozího kroku platí $f \equiv 0$ na $B_\varrho(z_0)$ a v tomto kroku jsme hotovi. Nechť naopak platí

$$|f(z)|^2 = f(z)\overline{f}(z) = |f(z_0)|^2 > 0 \qquad \text{na } B_\varrho(z_0).$$

Pak $f \neq 0$ na $B_\varrho(z_0)$. Odtud funkce $\overline{f}$ splňuje $\overline{f} = \frac{|f(z_0)|^2}{f}$ na $B_\varrho(z_0)$, a proto je zde holomorfní. Připomeňme, že holomorfní funkci f máme přiřazenu dvojici funkcí u, v splňující Cauchy–Riemannovy podmínky

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{a} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

pro $(x - z_1)^2 + (y - z_2)^2 < \varrho$ (používáme značení $z_0 = z_1 + \mathrm{i}z_2$). Stejně jako funkce u, v reprezentují holomorfní funkci f, musí funkce $u, -v$ reprezentovat holomorfní funkci $\overline{f}$ a splňovat Cauchy–Riemannovy podmínky, což zde znamená

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(-v)}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{a} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial(-v)}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Porovnáním obou sad podmínek dostáváme

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv \frac{\partial u}{\partial y} \equiv \frac{\partial v}{\partial x} \equiv \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0.$$

Odtud je f konstantní na $B_\varrho(z_0)$.
Krok 3: důkaz konstantnosti f na Ω.
Protože Ω je oblast, můžeme každý bod $z \in \Omega$ spojit s bodem z_0 lomenou čarou (označme ji φ) splňující $\langle\varphi\rangle \subset \Omega$. Navíc tento obraz je kompaktní, a proto má kladnou vzdálenost od $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Označme tuto vzdálenost 2δ. Navíc díky kompaktnosti $\langle\varphi\rangle$ existuje konečné pokrytí této množiny koulemi se středy v $\langle\varphi\rangle$ a s poloměrem $r := \min\{\varrho, \delta\}$ (všechny tyto koule leží v Ω). Označme středy uvedených koulí $z_1, z_2, \dots z_m$, přičemž jsme je mohli seřadit tak, že platí

$$z_0 \in B_r(z_1), z_1 \in B_{2r}(z_2), z_2 \in B_{2r}(z_3), \dots, z_{m-1} \in B_{2r}(z_m), z \in B_r(z_m).$$

Již víme, že $f \equiv f(z_0)$ na $B_r(z_0)$. Speciálně $f(z_1) = f(z_0)$. To navíc znamená, že f nabývá svého maxima modulu (vzhledem k Ω) také v bodě z_1. I na tento bod můžeme použít první dva kroky důkazu a dostáváme

$$f \equiv f(z_0) \qquad \text{na } B_{2r}(z_1).$$

Odtud $f(z_2) = f(z_0)$. Teď aplikujeme první dva kroky důkazu na množinu $B_{2r}(z_2)$. Pokračujeme indukcí. Nakonec obdržíme $f(z) = f(z_0)$. □

Poznámka 20.5.5. Pokud je funkce f spojitá na $\overline{\Omega}$ a Ω je navíc omezená, je zde rovněž spojitá funkce $z \mapsto |f(z)|$, a proto zde nabývá svého maxima. Podle předchozí věty se pak v případě nekonstantní funkce f toto maximum modulu může nabývat pouze na hranici.

Poznámka 20.5.6. Analogická věta (princip maxima) platí i pro funkce harmonické. To si dokážeme v dalším díle skript, v kapitole věnované parciálním diferenciálním rovnicím. Alespoň pro případ $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ toto není nijak překvapivý výsledek, díky Větě o harmoničnosti složek holomorfní funkce (Věta 20.2.14).

Důsledek 20.5.7 (Princip minima modulu)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast a $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na Ω a $f \neq 0$ na Ω. Jestliže f na Ω nabývá svého minima modulu (vzhledem k Ω), pak je konstantní na Ω.*

Důkaz. Stačí předchozí větu aplikovat na holomorfní funkci $\frac{1}{f}$. □

Poznámka 20.5.8. Bez podmínky na nenulovost funkce f nemůže Princip minima modulu (Důsledek 20.5.7) platit. Kupříkladu nekonstantní holomorfní funkce $f(z) = z$ má minimum modulu v počátku.

Věta 20.5.9 (Morerova věta)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je spojitá na Ω a její křivkový integrál nezávisí na cestě v Ω. Pak f je holomorfní na Ω.*

Důkaz. Podle Věty o charakterizaci existence primitivní funkce (Věta 20.3.12) existuje funkce $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, která je primitivní funkcí k f na Ω. Podle Důsledku o holomorfnosti derivací (Důsledek 20.5.2) je pak $f = F'$ holomorfní na Ω. □

Věta 20.5.10 (Cauchyovy nerovnosti)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na Ω, $z_0 \in \Omega$ a $r > 0$ je dost malé, aby $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$. Pak pro všechna $k \in \mathbb{N}$ platí*

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{r^k} \sup_{\langle C_r(z_0)\rangle} |f|.$$

Důkaz. Podle Cauchyova vzorce pro k-tou derivaci (Věta 20.5.1) máme

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(z_0)| &= \Big|\frac{k!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}z\Big| \leq \frac{k!}{2\pi} \sup_{\langle C_r(z_0)\rangle} \frac{|f|}{(z-z_0)^{k+1}} \ell_{C_r(z_0)} \\ &= \frac{k!}{2\pi} \frac{\sup_{\langle C_r(z_0)\rangle} |f|}{r^{k+1}} 2\pi r = \frac{k!}{r^k} \sup_{\langle C_r(z_0)\rangle} |f|. \end{aligned}$$

□

Věta 20.5.11 (Liouvilleova věta)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní a omezená na $\mathbb{C}$. Pak je f na $\mathbb{C}$ konstantní.*

Důkaz. Použijeme-li Cauchyovu nerovnost pro $k = 1$, dostáváme pro každé $z_0 \in \mathbb{C}$ a $r > 0$

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{r} \sup_{\langle C_r(z_0)\rangle} |f| \leq \frac{C}{r} \overset{r\to\infty}{\to} 0.$$

Odtud $f' \equiv 0$ na $\mathbb{C}$ a podle Věty o jednoznačnosti primitivní funkce (Věta 20.3.18) musí být f konstantní. $\square$

Důsledek 20.5.12 (Základní věty algebry (první verze))**.** *Každý nekonstantní polynom s komplexními koeficienty má na $\mathbb{C}$ alespoň jeden kořen.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že existuje polynom $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ (předpokládáme, že $n \geq 1$ a $a_n \neq 0$), který nemá na $\mathbb{C}$ kořen. Pak $\frac{1}{P}$ je holomorfní na $\mathbb{C}$ a navíc platí $\frac{1}{P(z)} \to 0$ pro $z \to \infty$ (proto je $\frac{1}{P(z)}$ omezená na $\mathbb{C}$). Podle Liouvilleovy věty (Věta 20.5.11) je pak $\frac{1}{P(z)}$ konstantní na $\mathbb{C}$. Proto je i $P(z)$ konstantní na $\mathbb{C}$, což je ve sporu s předpoklady. $\square$

Důsledek 20.5.13 (Základní věty algebry (druhá verze))**.** *Každý nekonstantní polynom s komplexními koeficienty má na $\mathbb{C}$ počet kořenů (započítaných včetně násobnosti) rovný svému stupni.*

Důkaz. Nechť $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$, $n \geq 2$ a $a_n \neq 0$. Podle První verze základní věty algebry (Důsledek 20.5.12) má P kořen. Označme jej w_1. V zápise původního polynomu pišme $z = (z - w_1) + w_1$ a pak podle binomické věty dostáváme

$$
\begin{aligned}
P(z) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \\
&= a_0 + a_1((z - w_1) + w_1) + a_2((z - w_1) + w_1)^2 + \cdots + a_n((z - w_1) + w_1)^n \\
&=: b_0 + b_1(z - w_1) + b_2(z - w_1)^2 + \cdots + b_n(z - w_1)^n
\end{aligned}
$$

(nové koeficienty se vypočítají ze starých; platí $b_n = a_n$, ostatní vztahy jsou složitější). Protože $P(w_1) = 0$, musí být $b_0 = 0$. Proto lze psát

$$
\begin{aligned}
P(z) &= b_1(z - w_1) + b_2(z - w_1)^2 + \cdots + b_n(z - w_1)^n \\
&= (z - w_1)\Big(b_1 + b_2(z - w_1) + \cdots + b_n(z - w_1)^{n-1}\Big) =: (z - w_1)Q(z).
\end{aligned}
$$

Nyní aplikujeme uvedenou proceduru na polynom $Q(z)$. Proces se zastaví přesně po n krocích a budeme mít

$$P(z) = a_n(z - w_1)(z - w_2) \ldots (z - w_n).$$

$\square$

20.6 Posloupnosti a řady holomorfních funkcí

Nyní se budeme zabývat konvergencí posloupností a řad holomorfních funkcí. Všechny výsledky stačí vyslovit jen pro posloupnosti (v případě práce s řadou lze standardně pracovat s posloupností jejích částečných součtů).

Věta 20.6.1 (První Weierstrassova věta). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost holomorfních funkcí na Ω, která konverguje lokálně stejnoměrně na Ω k funkci $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Pak funkce f je holomorfní na Ω a pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí*

$$f_n^{(k)} \overset{loc}{\rightrightarrows} f^{(k)} \qquad \text{na } \Omega.$$

Důkaz. Zafixujme $z_0 \in \mathbb{C}$ a $r > 0$ dost malé, aby platilo $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$. Pro každé $z_1 \in B_r(z_0)$ pak s využitím stejnoměrné konvergence na $B_r(z_0)$ a Cauchyova vzorce (Věta 20.5.1) pro jednotlivé funkce f_n dostáváme

$$f(z_1) \overset{n\to\infty}{\leftarrow} f_n(z_1) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_r(z_0)} \frac{f_n(z)}{z - z_1}\,\mathrm{d}z \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_1}\,\mathrm{d}z.$$

Získanou rovnost můžeme zderivovat podle z_1 (podrobnosti jsou uvedeny v důkazu Cauchyova vzorce pro vyšší derivace) a dostáváme

$$f'(z_1) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_1)^2}\,\mathrm{d}z.$$

Speciálně $f'(z_1)$ existuje. Tento výsledek dokážeme získat v libovolném bodě množiny Ω. Proto je f holomorfní na Ω.

Lokálně stejnoměrnou konvergenci derivací dokážeme za pomoci Cauchyových nerovností (Věta 20.5.10). Zafixujme $k \in \mathbb{N}$, $z_0 \in \Omega$ a $r > 0$ dost malé, aby platilo $B_{3r}(z_0) \subset \Omega$. Pro všechna $z \in B_r(z_0)$ pak platí $\overline{B_r(z)} \subset B_{2r}(z_0)$, a proto z Cauchyových nerovností dostáváme

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \le \frac{k!}{r^k} \sup_{\langle C_r(z)\rangle} |f_n - f| \le \frac{k!}{r^k} \sup_{B_{2r}(z_0)} |f_n - f|.$$

Odtud $f_n^{(k)} \rightrightarrows f^{(k)}$ na $B_r(z_0)$. Díky tomu, že z_0 bylo libovolné, jsme získali požadovaný výsledek. □

Poznámka 20.6.2. (i) Toto tvrzení je opět velice úzce spjaté se speciálními vlastnostmi holomorfních funkcí. V reálném případě podobné tvrzení neplatí. Například k funkci $|x| \notin C^1(\mathbb{R})$ je možné stejnoměrně dokonvergovat funkcemi z $C^1(\mathbb{R})$. Na druhou stranu, ve velice speciálním případě mocninných řad jsme měli stejnoměrnou konvergenci částečných součtů a jejich derivací k součtu a jeho derivacím uvnitř konvergenčního kruhu. Později si ukážeme, že holomorfní funkce mají úzký vztah právě k mocninným řadám.
(ii) Již dříve dokázaná (sice elementárně, ale také poměrně pracně) Věta o holomorfnosti součtu mocninné řady (Věta 20.2.17) plyne z První Weierstrassovy věty (Věta 20.6.1).

Nyní si ukážeme, že stejnoměrnou konvergenci holomorfních funkcí není zdaleka nutné ověřovat napříč celou množinou, pro kterou chceme stejnoměrnou konvergenci dokázat.

Věta 20.6.3 (Druhá Weierstrassova věta)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je omezená oblast a $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost holomorfních funkcí na Ω, které jsou navíc spojité na $\overline{\Omega}$. Jestliže je posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně konvergentní na $\partial\Omega$, pak je $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ také stejnoměrně konvergentní na Ω.*

Důkaz. Nechť $n, p \in \mathbb{N}$. Podle Věty o principu maxima modulu (Věta 20.5.4) pro všechna $z \in \overline{\Omega}$ máme

$$|f_{n+p}(z) - f_n(z)| \leq \max_{\partial\Omega} |f_{n+p} - f_n|$$

(funkce $f_{n+p} - f_n$ je spojitá na $\overline{\Omega}$, proto zde nabývá svého maxima modulu. Pokud uvedené hodnoty není nabýváno v žádném bodě množiny Ω, je jí nabýváno v nějakém bodě množiny $\partial\Omega$. Pokud je uvedené hodnoty nabýváno v nějakém bodě množiny Ω, pak je $f_{n+p} - f_n$ konstantní a uvedené hodnoty je nabýváno v každém bodě množiny $\partial\Omega$).

Odtud je vidět, že splnění B–C podmínky pro stejnoměrnou konvergenci na $\partial\Omega$ implikuje splnění B–C podmínky pro stejnoměrnou konvergenci na Ω. □

První Weierstrassova věta (Věta 20.6.1) má následující užitečnou aplikaci.

Věta 20.6.4 (O holomorfnosti integrálu závislého na parametru)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ a $F\colon \mathbb{C} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je funkce definovaná na $\Omega \times [a, b]$. Nechť navíc*
(i) *funkce F je spojitá na $\Omega \times [a, b]$*
(ii) *pro každé $s \in [a, b]$ je funkce $z \mapsto F(z, s)$ holomorfní v Ω.*
Pak funkce

$$f(z) := \int_a^b F(z, s)\,\mathrm{d}s$$

je holomorfní v Ω.

Důkaz. Pro snazší značení předpokládejme, že $[a, b] = [0, 1]$ (stačí pod integrálem provést afinní substituci, která se projeví požadovanou změnou mezí a multiplikativní konstantou).

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme funkce (jedná se o analogii riemannovských součtů)

$$f_n(z) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} F(z, \tfrac{j}{n}).$$

Zřejmě se jedná o holomorfní funkce. Nyní ukážeme, že $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na Ω. Zvolme bod $z_0 \in \Omega$ a $r > 0$ takové, aby $B_{2r}(z_0) \subset \Omega$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Protože spojitá funkce na kompaktu je stejnoměrně spojitá, můžeme nalézt $\delta > 0$ takové, že

$$|F(z, s_1) - F(z, s_2)| < \varepsilon \qquad \text{kdykoliv } z \in \overline{B_r(z_0)}, s_1, s_2 \in [0, 1] \text{ a } |s_2 - s_1| < \delta.$$

Proto pro všechna $n \geq \frac{1}{\delta}$ a $z \in B_r(z_0)$ dostáváme

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f(z)| &= \Big|\sum_{j=1}^{n} \int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} \big(F(z, \tfrac{j}{n}) - F(z,s)\big)\,\mathrm{d}s\Big| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} |F(z, \tfrac{j}{n}) - F(z,s)|\,\mathrm{d}s = \sum_{j=1}^{n} \int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} \varepsilon\,\mathrm{d}s = \varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na Ω a První Weierstrassova věta (Věta 20.6.1) nám dává požadovaný výsledek. □

20.7 Taylorovy a Laurentovy řady

Již jsme si ukázali, že každá mocninná řada definuje na svém konvergenčním kruhu holomorfní funkci. Zde naopak ukážeme, že každá holomorfní funkce se dá lokálně reprezentovat mocninnou řadou (je analytická). To je velmi odlišný výsledek od teorie funkcí reálné proměnné. Tam totiž existence derivace ve všech bodech neimplikuje její spojitost (připomeňme funkci $x^2 \sin(\frac{1}{x})$ v počátku dodefinovanou nulou), už vůbec neimplikuje existenci derivací vyšších řádů a nekonečná diferencovatelnost nezaručuje analytičnost (připomeňme zhlazovací jádro).

Věta 20.7.1 (O Taylorově řadě příslušející holomorfní funkci)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $z_0 \in \Omega$, $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na Ω a $R > 0$ je tak malé, že $B_R(z_0) \subset \Omega$. Pak existuje jednoznačně určená posloupnost komplexních koeficientů $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ taková, že*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{na } B_R(z_0).$$

Navíc pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $r \in (0, R)$ platí

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$$

Důkaz. Zvolme $z \in B_R(z_0)$ a zafixujme $r \in (0, R)$ takové, že $z \in B_r(z_0)$. Podle Cauchyova vzorce (Věta 20.5.1) pak máme

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{w - z}\,\mathrm{d}w.$$

Dále si povšimněme, že platí

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{w - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}}.$$

Navíc, protože $|z - z_0| < r$ a všude na $\langle C_r(z_0)\rangle$ máme $|w - z_0| = r$, platí

$$\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{z - z_0}{w - z_0}\Big)^n \qquad \text{pro všechna } w \in \langle C_r(z_0)\rangle$$

a řada napravo konverguje stejnoměrně vzhledem k proměnné $w \in \langle C_r(z_0)\rangle$. To nám umožňuje upravit náš první vzorec do tvaru (stejnoměrnou konvergenci využíváme k prohození sumy a integrálu)

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{w - z}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_r(z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{z - z_0}{w - z_0}\Big)^n \frac{f(w)}{w - z_0}\,\mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\int_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\Big)(z - z_0)^n. \end{aligned}$$

Nyní ještě použijeme Cauchyův vzorec pro vyšší derivace (Věta 20.5.1) na poslední integrál a máme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

Jednoznačnost posloupnosti koeficientů plyne z teorie mocninných řad. □

Předchozí větu můžeme využít k důkazu následujícího zajímavého tvrzení.

Věta 20.7.2 (O jednoznačnosti)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast, $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na Ω a množina $\{z \in \Omega\colon f(z) = 0\}$ má alespoň jeden hromadný bod ležící v Ω. Pak $f \equiv 0$ na Ω.*

Důkaz. Nechť $z_0 \in \Omega$ je uvedený hromadný bod. Pak díky spojitosti holomorfních funkcí máme $f(z_0) = 0$. Zvolme $R > 0$ takové, aby $B_R(z_0) \subset \Omega$. Podle Věty o Taylorově řadě příslušející holomorfní funkci (Věta 20.7.1) existuje posloupnost koeficientů $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ taková, že

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{na } B_R(z_0).$$

Ukážeme, že všechny uvedené koeficienty jsou nulové. Pro spor předpokládejme, že alespoň jeden koeficient nulový není. Nechť $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je nejnižší index odpovídající nenulovému koeficientu. Pak nemůže být $q = 0$, neboť máme $f(z_0) = 0$. V uvedené situaci můžeme psát

$$f(z) = \sum_{n=q}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^q \sum_{n=q}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-q} \qquad \text{na } B_R(z_0).$$

Na pravé straně je součin funkcí, pro něž existuje prstencové okolí bodu z_0, kde musí být obě nenulové. To je však ve sporu s tím, že z_0 je hromadným bodem množiny $\{z \in \Omega\colon f(z) = 0\}$. Proto jsou všechny koeficienty nulové a $f \equiv 0$ na $B_R(z_0)$.

Nulovost funkce f na celé množině Ω se nyní dokáže stejnou konstrukcí jako ve třetím kroku důkazu Věty o principu maxima modulu (Věta 20.5.4; bod z_0 spojíme lomenou čarou s libovolným bodem $z \in \Omega$, lomenou čáru vhodně pokryjeme konečně mnoha kruhy a pak si uvědomíme, že nulovost f na nějakém kruhu implikuje nulovost na všech kruzích, které s ním mají neprázdný průnik). $\square$

Poznámka 20.7.3. (i) Z předešlé věty okamžitě dostáváme, že pokud se dvě holomorfní funkce rovnají na podmnožině množiny Ω, která má v Ω hromadný bod, pak se uvedené funkce rovnají všude v Ω.
(ii) Protože reálná osa má alespoň jeden na ní ležící hromadný bod, naše rozšíření funkcí cos, sin, cosh a sinh z reálné osy do komplexní roviny bylo jediné možné rozšíření uvedených reálně analytických funkcí na funkce holomorfní.
(iii) Předchozí věta automaticky platí pro reálně analytické funkce. Má-li totiž množina nulových bodů takové funkce hromadný bod, jedná se samozřejmě i o hromadný bod holomorfní funkce získané tak, že v původním Taylorově rozvoji reálnou proměnnou z konvergenčního kruhu proniknutého s reálnou osou nahradíme komplexní proměnnou z konvergenčního kruhu.

Teď jsme schopni také rozšířit znění Liouvilleovy věty (Věta 20.5.11).

Věta 20.7.4 (Liouvilleova věta (obecnější verze))**.** *Nechť* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní na* $\mathbb{C}$ *a* $q, L, R_0 \in [0, \infty)$*. Jestliže*

$$|f(z)| \leq L|z|^q \qquad \textit{kdykoliv } |z| > R_0,$$

pak f *je polynom stupně nejvýše* $[q]$ *(dolní celá část čísla* q*).*

Důkaz. Zafixujme $R > R_0$. Podle Věty o Taylorově řadě příslušející holomorfní funkci (Věta 20.7.1) můžeme psát

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{na } B_{2R}(0).$$

Navíc podle uvedené věty a Cauchyova vzorce pro vyšší derivace (Věta 20.5.1) máme pro každé $n > q$

$$|a_n| = \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{C_R(0)} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z\right| \leq \frac{1}{2\pi} LR^q R^{-n-1} 2\pi R = LR^{q-n}.$$

Protože $R > R_0$ bylo libovolné velké, musí platit $a_n = 0$. Odtud $f(z) = \sum_{n=0}^{[q]} a_n z^n$ na $B_R(0)$ a z Věty o jednoznačnosti (Věta 20.7.4) dostáváme, že toto vyjádření platí na celém $\mathbb{C}$. $\square$

Poznámka 20.7.5. Věta o Taylorově řadě příslušející holomorfní funkci (Věta 20.7.2) sice nikdy neslibuje poloměr konvergence rovný nekonečnu, nicméně u holomorfní funkce na celém $\mathbb{C}$ tomu tak skutečně je. Pro každé $R > 0$ můžeme použít Větu o Taylorově řadě příslušející holomorfní funkci zvlášť. Pokaždé dostaneme mocninou řadu konvergující na $B_R(0)$. Pro každou dvojici poloměrů však musí mít získané řady stejné koeficienty (snadno se získá spor v opačném případě). Následně máme jednu řadu, která má poloměr konvergence (nějaký mít musí), který je větší nebo roven každému kladnému číslu. Proto je poloměr konvergence roven nekonečnu.

Výše jsme si ukázali, že je-li funkce f holomorfní v otevřené množině Ω, pak je možné ji lokálně vyjádřit mocninnou řadou se středem v bodě $z_0 \in \Omega$. Nyní se budeme zabývat otázkou, zda je možné přístup zobecnit v tom směru, že vysuneme bod z_0 ven z Ω a naopak připustíme obecnější objekty, než jsou mocninné řady. Ukáže se, že rozumné výsledky je možné získat tehdy, když f je holomorfní na nějakém mezikruží a jako střed pro rozvoj funkce volíme střed uvedeného mezikruží. Poznamenejme, že začínáme budovat teorii, jejímž hlavním výsledkem bude obdoba Cauchyovy věty s podstatně širším uplatněním při počítání integrálů.

Pro otevřené mezikruží se středem z_0 a s poloměry $0 \leq a < b \leq \infty$ budeme používat značení

$$B_{a,b}(z_0) := \{z \in \mathbb{C}\colon a < |z - z_0| < b\}.$$

Věta 20.7.6 (O Laurentově rozvoji)**.** *Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leq a < b \leq \infty$ a funkce $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na $B_{a,b}(z_0)$. Pak existuje jednoznačně určený systém koeficientů $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ takový, že platí*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \qquad \textit{pro všechna } z \in B_{a,b}(z_0)$$

s konvencí

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n := \lim_{k\to\infty} \sum_{n=-k}^{-1} a_n(z - z_0)^n + \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n(z - z_0)^n.$$

Navíc pro všechna $n \in \mathbb{Z}$ a $r \in (a, b)$ platí

$$a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, \mathrm{d}z.$$

Důkaz. Nejprve dokažme jednoznačnost uvedeného rozvoje. Předpokládejme, že funkci f můžeme rozvinout předepsaným způsobem. Začneme tím, že si přepíšeme

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0) + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\Big(\frac{1}{z - z_0}\Big)^n.\end{aligned}$$

První z řad úplně napravo je klasická mocninná řada, pro níž lze nalézt $R_1 \in [0, \infty]$ takové, že uvedená řada konverguje na $B_{R_1}(z_0)$ a nekonverguje na $\mathbb{C} \setminus \overline{B_{R_1}(z_0)}$. Na druhou z řad se dá pohlížet jako na jinou mocninnou řadu, do níž byla dosazena hodnota $\frac{1}{z-z_0}$. Pro uvedenou řadu opět existuje jistý poloměr konvergence $R_2 \in [0, \infty]$. Povšimněme si zde, že pro $R_2 > 0$ a $z \neq z_0$ máme

$$\frac{1}{z - z_0} < R_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad z - z_0 > \frac{1}{R_2}.$$

Protože levá strana naší identity o rozkladu řady konverguje na $B_{a,b}(z_0)$, znamená to, že

$$\frac{1}{R_2} \leq a < b \leq R_1.$$

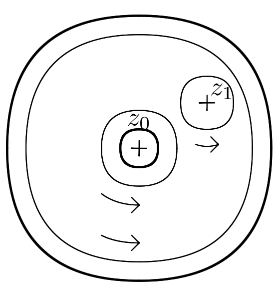
Pokud nyní zafixujeme $r \in (a, b)$, snadno se nahlédne, že obě řady na pravé straně uvedené rovnosti stejnoměrně konvergují na $\langle C_r(z_0) \rangle$ (každá mocninná řada konverguje lokálně stejnoměrně na svém konvergenčním kruhu, pozor na převrácené hodnoty ve druhé řadě). Díky stejnoměrné konvergenci můžeme prohodit sumu a integrál v následujícím výpočtu prováděném pro všechna $j \in \mathbb{Z}$ (připomeňme, že funkce $\frac{1}{(z-z_0)^n}$ má na $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ primitivní funkci pro všechna $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$)

$$\begin{aligned} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{j+1}} \, \mathrm{d}z &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{C_r(z_0)} (z - z_0)^{n-j-1} \, \mathrm{d}z \\ &= a_j \int_{C_r(z_0)} (z - z_0)^{-1} \, \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} a_j. \end{aligned}$$

Tím jsme získali dokazovaný vzorec pro koeficienty a zároveň jednoznačnost koeficientů.

Nyní dokážeme existenci. Zafixujme $z_1 \in B_{a,b}(z_0)$. Zvolme ještě $\delta > 0$ tak malé, aby $a + 2\delta < |z_1 - z_0| < b - 2\delta$. Označme $\alpha := a + \delta$ a $\beta = b - \delta$. Protože funkce $\frac{f(z)}{z-z_1}$ je holomorfní na množině $B_{a,b}(z_0) \setminus \{z_1\}$, díky předchozím volbám můžeme použít třetí verzi Cauchyovy věty (Věta 20.5.1) na trojici křivek

$$\varphi := C_\beta(z_0), \quad \varphi_1 := C_\alpha(z_0) \qquad \text{a} \qquad \varphi_2 := C_\delta(z_1).$$



Obrázek 20.9: Volba neprotínajících se kružnic v důkazu existence Laurentova rozvoje.

Pokud navíc využijeme Cauchyův vzorec (Věta 20.5.1) pro $f(z_1)$ prostřednictvím křivky $C_\delta(z_1)$, dostáváme

$$\begin{aligned}\int_{C_\beta(z_0)} \frac{f(z)}{z-z_1}\,\mathrm{d}z &= \int_{C_\alpha(z_0)} \frac{f(z)}{z-z_1}\,\mathrm{d}z + \int_{C_\delta(z_1)} \frac{f(z)}{z-z_1}\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{C_\alpha(z_0)} \frac{f(z)}{z-z_1}\,\mathrm{d}z + 2\pi\mathrm{i}f(z_1).\end{aligned}$$

Nyní si upravíme jednotlivé integrandy ve zbývající dvojici integrálů. Jednak pro $z \in \langle C_\beta(z_0)\rangle$ máme

$$\frac{1}{z-z_1} = \frac{1}{z-z_0+z_0-z_1} = \frac{1}{z-z_0}\frac{1}{1-\frac{z_1-z_0}{z-z_0}} = \frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{z_1-z_0}{z-z_0}\Big)^n,$$

přičemž řada napravo konverguje stejnoměrně na $\langle C_\beta(z_0)\rangle$ díky tomu, že

$$|z_1-z_0| < b-2\delta \qquad \text{a} \qquad |z-z_0| = \beta = b-\delta.$$

Dále pro $z \in \langle C_\alpha(z_0)\rangle$ máme

$$\frac{1}{z-z_1} = -\frac{1}{z_1-z_0+z_0-z} = -\frac{1}{z_1-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{z_1-z_0}} = -\frac{1}{z_1-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\Big)^n,$$

přičemž řada napravo konverguje stejnoměrně na $\langle C_\alpha(z_0)\rangle$ díky tomu, že

$$|z-z_0| = \alpha = a+\delta \qquad \text{a} \qquad |z_1-z_0| > a+2\delta.$$

Pokud nyní naše rozvoje dosadíme do výše získané integrální rovnosti a využijeme stejnoměrné konvergence, obdržíme

$$\begin{aligned}f(z_1) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_\beta(z_0)} \frac{f(z)}{z-z_1}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_\alpha(z_0)} \frac{f(z)}{z-z_1}\,\mathrm{d}z \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_\beta(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z\Big)(z_1-z_0)^n \\ &\qquad + \sum_{n=-\infty}^{0}\Big(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_\alpha(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n}}\,\mathrm{d}z\Big)(z_1-z_0)^{n-1}.\end{aligned}$$

Získali jsme integrály, jejichž integrandy jsou holomorfní na $B_{a,b}(z_0)$. Díky tomu můžeme zafixovat $r \in (a,b)$ a dvakrát aplikovat třetí verzi Cauchyovy věty (Věta

20.4.7), abychom postupně získali

$$\begin{aligned}
f(z_1) &= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{C_r(z_0)}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z\Big)(z_1-z_0)^n \\
&\qquad + \sum_{n=-\infty}^{0}\Big(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{C_r(z_0)}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n}}\,\mathrm{d}z\Big)(z_1-z_0)^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{C_r(z_0)}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z\Big)(z_1-z_0)^n \\
&\qquad + \sum_{m=-\infty}^{-1}\Big(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{C_r(z_0)}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}}\,\mathrm{d}z\Big)(z_1-z_0)^{m} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{C_r(z_0)}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z\Big)(z_1-z_0)^n.
\end{aligned}$$

Odtud vidíme, že funkci f je možno rozvinout požadovaným způsobem. □

Definice 20.7.7 (Laurentova řada, regulární část Laurentovy řady, hlavní část Laurentovy řady, reziduum)**.** Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \le a < b \le \infty$ a funkce $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na $B_{a,b}(z_0)$. Pak řada z předchozí věty se nazývá *Laurentova řada* funkce f na mezikruží $B_{a,b}(z_0)$, její část $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ se nazývá *regulární část* a část $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$ se nazývá *hlavní část*.

Pokud $0 = a < b$, zavádíme

$$\mathrm{Res}_{z_0} f := a_{-1}$$

a nazýváme jej *reziduum* funkce f v bodě z_0. Pokud $b = \infty$, definujeme

$$\mathrm{Res}_{\infty} f := -a_{-1}$$

a nazýváme jej *reziduum* funkce f *v nekonečnu*.

Příklad 20.7.8. Uvažujme funkci $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$. Jedná se o funkci, která je holomorfní na množině $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ (v takovéto situaci říkáme, že f má v uvedených bodech *singularitu*; pokud takový bod není hromadným bodem posloupnosti bodů, v nichž má f singularitu, hovoříme o *izolované singularitě*). Pokud chceme funkci f rozvíjet do Laurentovy řady se středem v počátku, máme dvě možnosti jak vybrat (maximální) mezikruží, $B_{0,1}(0)$ a $B_{1,\infty}(0)$. Mnohdy existují rychlejší postupy než je počítání integrálů uvedených v předchozí větě.

Například na $B_{0,1}(0)$ můžeme počítat

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{z} = -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n.$$

O Laurentovu řadu se zde jedná díky jednoznačnosti koeficientů, kterou zaručuje předchozí věta. V tomto případě je zavedeno reziduum a platí pro něj $\mathrm{Res}_0 f = -1$.

Na $B_{1,\infty}(0)$ máme

$$f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{z}\Big)^n - \frac{1}{z} = \sum_{n=-\infty}^{-2} z^n$$

a opět se jedná o Laurentovu řadu. V tomto případě je zavedeno pouze reziduum v nekonečnu a platí pro něj $\operatorname{Res}_\infty f = 0$.

Věta o Laurentově rozvoji má několik zajímavých důsledků. První z nich ukazuje, že pojem reziduum v nekonečnu je korektní v tom smyslu, že jeho hodnota nezávisí na volbě z_0.

Důsledek 20.7.9 (O korektnosti rezidua v nekonečnu)**.** *Nechť $r \in [0,\infty)$, $z_0 \in \mathbb{C}$ a $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \overline{B_r(z_0)}$. Pro každé $\widetilde{z}_0 \in \mathbb{C}$ pak existuje $\widetilde{r} \in [0,\infty)$ takové, že f je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \overline{B_{\widetilde{r}}(\widetilde{z}_0)}$. Navíc v obou případech dává Laurentův rozvoj shodnou hodnotu rezidua v nekonečnu.*

Důkaz. Zřejmě stačí volit $\widetilde{r} = r + |\widetilde{z}_0 - z_0|$. Pak totiž máme pro všechna $z \in \mathbb{C}$ splňující $|z - \widetilde{z}_0| > \widetilde{r}$

$$|z - z_0| \geq |z - \widetilde{z}_0| - |\widetilde{z}_0 - z_0| > r.$$

Zafixujme dále $\varrho > r$. Podle věty o Laurentově rozvoji má koeficient a_{-1} odpovídající středu z_0 tvar

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{C_\varrho(z_0)} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Definujme nyní $\widetilde{\varrho} := \varrho + 1 + |\widetilde{z}_0 - z_0|$. Pak $\langle C_\varrho(z_0)\rangle$ leží ve vnitřku křivky $C_{\widetilde{\varrho}}(\widetilde{z}_0)$, a proto podle třetí verze Cauchyovy věty máme

$$\int_{C_\varrho(z_0)} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_{\widetilde{\varrho}}(\widetilde{z}_0)} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Podle Věty o Laurentově rozvoji (Věta 20.7.6) je získaná pravá strana rovna číslu $2\pi\mathrm{i}\widetilde{a}_{-1}$ ($\widetilde{a}_{-1}$ je koeficient při funkci $(z-\widetilde{z}_0)^{-1}$ v Laurentově rozvoji odpovídajícím středu $\widetilde{z}_0$), což jsme chtěli ukázat. □

Důsledek 20.7.10 (Riemannova věta)**.** *Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $b > 0$ a $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní a omezená na $B_{0,b}(z_0)$. Pak*
(i) *hlavní část Laurentova rozvoje funkce f na mezikruží $B_{0,b}(z_0)$ je identicky nulová*
(ii) *existuje vlastní $\lim_{z\to z_0} f(z)$*
(iii) *po dodefinování touto limitou je funkce f holomorfní na $B_b(z_0)$.*

Důkaz. Nechť $L > 0$ je takové, že $|f| \leq L$ na $B_{0,b}(z_0)$. Zafixujme $r \in (0,b)$. Pak pro všechna $n \leq -1$ máme podle Věty o Laurentově rozvoji (Věta 20.7.6)

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi}\Big|\int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\Big| \leq \frac{1}{2\pi} L r^{-n-1} 2\pi r = L r^{-n}.$$

Protože r může být libovolně blízko k počátku, dostáváme $a_n = 0$ pro všechna $n \leq -1$. Proto je hlavní část Laurentova rozvoje identicky nulová a můžeme psát

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{pro všechna } z \in B_{0,b}(z_0).$$

Odtud okamžitě plynou zbylá tvrzení. □

Příklad 20.7.11. Funkce $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$ je homomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zvolíme-li libovolné $b > 0$, dostáváme (pišme $z = z_1 + iz_2$)

$$\begin{aligned} \Big|\frac{e^z - 1}{z}\Big| &= \Big|\frac{e^{z_1} e^{iz_2} - 1}{z}\Big| = \Big|\frac{e^{z_1} e^{iz_2} - e^{iz_2} + e^{iz_2} - 1}{z}\Big| \\ &\leq \frac{|e^{z_1} - 1|}{|z_1|} + \frac{|\cos z_2 - 1 + i \sin z_2|}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}} \leq C. \end{aligned}$$

Podle předchozího výsledku po dodefinování limitou bude funkce $\frac{e^z - 1}{z}$ holomorfní na $B_b(0)$. To platí pro libovolné $b > 0$. Ověřili jsme tedy, že funkce f je holomorfní na $\mathbb{C}$.

Důsledek 20.7.12. *Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $a \geq 0$ a $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní a omezená na $B_{a,\infty}(z_0)$. Pak pro každé $z_1 \in \mathbb{C}$ má Laurentův rozvoj funkce f na $B_{a+|z_1 - z_0|,\infty}(z_1)$ nulové koeficienty u kladných mocnin. Navíc existuje vlastní* $\lim_{z\to\infty} f(z)$ *a rovná se koeficientu u nulté mocniny (hodnota zmíněného koeficientu nezávisí na z_1).*

Důkaz. Nechť $L > 0$ je takové, že $|f| \leq L$ na $B_{a,\infty}(z_0)$. Zafixujme $z_1 \in \mathbb{C}$ a $r \in (a + |z_1 - z_0|, \infty)$. Pak pro všechna $n > 0$ máme podle Věty o Laurentově rozvoji (Věta 20.7.6)

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi}\Big|\int_{C_r(z_1)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\Big| \leq \frac{1}{2\pi} L r^{-n-1} 2\pi r = L r^{-n}.$$

Protože r může být libovolně velké, dostáváme $a_n = 0$ pro všechna $n \geq 1$. Odtud

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{pro všechna } z \in B_{a+|z_1 - z_0|,\infty}(z_1).$$

Řada konverguje stejnoměrně pro $|z - z_0|$ zdola odražené od $a + |z_1 - z_0|$. Odtud $\lim_{z\to\infty} f(z) = a_0$. Díky jednoznačnosti limity hodnota koeficientu a_0 nezávisí na volbě středu z_1. □

20.8 Izolované singularity, Reziduová věta

Definice 20.8.1 (Izolované singularity a jejich typy)**.** Nechť $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}^*$. Funkce f má v bodě z_0 *izolovanou singularitou*, jestliže je f holomorfní na nějakém prstencovém okolí bodu z_0 a není holomorfní v bodě z_0. O izolované singularitě říkáme, že je

(i) *odstranitelná*, jestliže existuje vlastní $\lim_{z\to z_0} f(z)$
(ii) *pól*, jestliže $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$
(iii) *podstatná*, jestliže $\lim_{z\to z_0} f(z)$ neexistuje.

Příklad 20.8.2. (i) Funkce $\frac{z^2-1}{z-1}$ má v bodě $z_0 = 1$ odstranitelnou singularitu, neboť $\lim_{z\to 1} \frac{z^2-1}{z-1} = 2$. Funkce $\frac{1+z}{z}$ má v bodě $z_0 = \infty$ odstranitelnou singularitu, neboť $\lim_{z\to\infty} \frac{1+z}{z} = 1$.
(ii) Funkce $\frac{1}{z}$ má v bodě $z_0 = 0$ pól. Funkce $f(z) = z^2$ má v bodě $z_0 = \infty$ pól.
(iii) Funkce $f(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ má v bodě $z_0 = 0$ podstatnou singularitu (už jen pouhá restrikce uvedené funkce na reálnou osu má v počátku dvě hromadné hodnoty). Funkce $f(z) = \mathrm{e}^z$ má v bodě $z_0 = \infty$ podstatnou singularitu (restrikce uvedené funkce na reálnou osu má v nekonečnu dvě hromadné hodnoty).

Jestliže $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ (budeme teď chvíli požadovat, aby $z_0 \neq \infty$) izolovanou singularitu, pak podle Věty o Laurentově rozvoji (Věta 20.7.6) existuje $b > 0$ a posloupnost $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ takové, že

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \qquad \text{pro všechna } z \in B_{0,b}(z_0).$$

Chování Laurentovy řady nám v takovém případě může napovědět, o jaký typ izolované singularity se jedná.

Věta 20.8.3 (O charakterizaci odstranitelné singularity). *Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ izolovanou singularitu. Pak následující výroky jsou ekvivalentní.*
(i) *Funkce f má v bodě z_0 odstranitelnou singularitu*
(ii) *funkce f je omezená na nějakém prstencovém okolí bodu z_0*
(iii) *hlavní část Laurentovy řady funkce f se středem z_0 je identicky nulová*
(iv) *funkce f lze v bodě z_0 dodefinovat (nebo předefinovat), aby byla holomorfní v bodě z_0.*

Důkaz. Zřejmě platí „(i)⇒(ii)“, „(iv)⇒(i)“ a „(iii)⇒(iv)“. Dále podle Riemannovy věty (Důsledek 20.7.10) máme „(ii)⇒(iii)“. □

Poznámka 20.8.4. Domluvme se, že pokud $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ odstranitelnou singularitu, funkci budeme v případě potřeby v uvedeném bodě holomorfně dodefinovávat a výslednou funkci budeme opět značit f.

Nyní se začneme připravovat na charakterizaci pólu.

Definice 20.8.5 (k-násobný nulový bod funkce). Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní v bodě z_0 a $k \in \mathbb{N}$. Řekneme, že funkce f má v bodě z_0 *k-násobný nulový bod* (nebo *k-násobný kořen*), jestliže

$$f^{(n)}(z_0) = 0 \quad \text{pro všechna } n \in \{0, 1, \dots, k-1\} \qquad \text{a} \qquad f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

Poznámka 20.8.6. Pokud platí $f^{(n)}(z_0) = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a jisté $z_0 \in \mathbb{C}$ a f je holomorfní na jistém okolí bodu z_0, pak podle Věty o Taylorově řadě příslušející holomorfní funkci (Věta 20.7.1) na jistém okolí bodu z_0 platí $f \equiv 0$. Navíc pak podle Věty o jednoznačnosti (Věta 20.7.2) musí platit $f \equiv 0$ na celé množině, kde je f holomorfní. Pro netriviální holomorfní funkci je číslo k určeno jednoznačně.

Lemma 20.8.7 (O rozkladu holomorfní funkce mající kořen)**.** *Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní v bodě z_0 a $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak následující výroky jsou ekvivalentní.*
(i) *Bod z_0 je k-násobným kořenem funkce f*
(ii) *existuje funkce $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, která je holomorfní v bodě z_0, splňuje $g(z_0) \neq 0$ a*

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z) \qquad \textit{na jistém okolí bodu } z_0.$$

Důkaz. Implikace „(ii)⇒(i)“ plyne z Leibnizova pravidla. Dokažme nyní implikaci „(i)⇒(ii)“. Pro $k = 0$ je to zřejmé. Nechť tedy $k \in \mathbb{N}$ a platí

$$f^{(n)}(z_0) = 0 \quad \text{pro všechna } n \in \{0, 1, \dots, k-1\} \qquad \text{a} \qquad f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

V Taylorově rozvoji funkce f pro okolí bodu z_0 pak můžeme provést následující úpravu

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^k \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-k}.$$

Nyní stačí položit $g(z) := \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-k}$. □

Lemma 20.8.8 (O rozkladu funkce s pólem)**.** *Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má izolovanou singularitu v bodě z_0. Pak následující výroky jsou ekvivalentní.*
(i) *Funkce f má v bodě z_0 pól*
(ii) *existuje jednoznačné číslo $k \in \mathbb{N}$ a funkce $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, která je holomorfní v bodě z_0, splňuje $h(z_0) \neq 0$ a*

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} h(z) \qquad \textit{na jistém prstencovém okolí bodu } z_0.$$

Důkaz. Implikace „(ii)⇒(i)“ plyne z aritmetiky limit. Dokažme nyní implikaci „(i)⇒(ii)“. Protože $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$, existuje prstencové okolí bodu z_0, kde $f \neq 0$. Díky tomu je funkce $\frac{1}{f}$ holomorfní na témže prstencovém okolí. Navíc platí $\lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$. Proto po dodefinování funkce $\frac{1}{f}$ nulou v bodě z_0 dostáváme (netriviální) holomorfní funkci, pro kterou nám předchozí lemma (Lemma 20.8.7) dává číslo $k \in \mathbb{N}$ a funkci $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, která je holomorfní v bodě z_0, splňuje $g(z_0) \neq 0$ a

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^k g(z) \qquad \text{na jistém okolí bodu } z_0.$$

Odtud

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} \frac{1}{g(z)} \qquad \text{na jistém prstencovém okolí bodu } z_0.$$

Stačí položit $h = \frac{1}{g}$ na uvedeném okolí (připomeňme, že $g(z_0) \neq 0$). Jednoznačnost čísla k plyne z jednoznačnosti násobnosti nulového bodu. □

V situaci popsané předešlým lemmatem říkáme, že f má v bodě z_0 *pól násobnosti k*. I tento jev se dá charakterizovat chováním Laurentovy řady.

Věta 20.8.9 (O charakterizaci pólu)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ izolovanou singularitu a $k \in \mathbb{N}$. Pak následující výroky jsou ekvivalentní.*
(i) *Funkce f má v bodě z_0 pól násobnosti k*
(ii) *existují čísla $a_{-k}, a_{-k+1}, \dots, a_{-1} \in \mathbb{C}$ a funkce $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ taková, že g je holomorfní v bodě z_0, $a_{-k} \neq 0$ a*

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + g(z)$$

na jistém prstencovém okolí bodu z_0.

Důkaz. Implikace „(ii)⇒(i)“ je zřejmá. Dokažme implikaci „(i)⇒(ii)“. Začneme tím, že holomorfní funkci h z předchozího lemmatu vyjádříme pomocí jejího Taylorova rozvoje a ten pak upravíme

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-z_0)^k} h(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k}\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^{n-k} \\ &= \frac{b_0}{(z-z_0)^k} + \frac{b_1}{(z-z_0)^{k-1}} + \dots + \frac{b_{k-1}}{z-z_0} + \sum_{n=k}^{\infty} b_n (z-z_0)^{n-k}. \end{aligned}$$

Odtud plyne požadovaný výsledek. □

Z předchozích výsledků okamžitě dostáváme charakterizaci podstatné singularity.

Věta 20.8.10 (O charakterizaci podstatné singularity)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ izolovanou singularitu. Pak následující výroky jsou ekvivalentní.*
(i) *Funkce f má v bodě z_0 podstatnou singularitu*
(ii) *hlavní část Laurentova rozvoje funkce f se středem z_0 má nekonečně mnoho nenulových koeficientů.*

Nyní se konečně začneme zabývat případem izolované singularity v nekonečnu. Předešlé výsledky byly založeny na práci s Laurentovým rozvojem v bodě z_0. Laurentův rozvoj se středem v nekonečnu nemáme zaveden. Proto musíme zvolit jiný přístup. Zkusíme se inspirovat definicí rezidua v nekonečnu a pracujme s Laurentovými rozvoji funkce f na mezikružích tvaru $B_{a,\infty}(z_1)$ a budeme si všímat vlastností těchto Laurentových rozvojů, které nezávisí na volbě středu z_1.

Nechť f je holomorfní na jistém prstencovém okolí nekonečna, neboli existuje $a \geq 0$ takové, že f je holomorfní na $B_{a,\infty}(0)$. Pak pro každé $z_1 \in \mathbb{C}$ můžeme funkci f rozvinout na mezikruží $B_{a+|z_1|,\infty}(z_1)$ do Laurentovy řady (rovnou ji píšeme ve tvaru, který se nám bude hodit níže)

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

První z uvedených řad konverguje lokálně stejnoměrně na $B_{a+|z_1|,\infty}(z_1)$ a její limitou pro $z \to \infty$ je číslo a_0. Naopak druhá z uvedených řad rozhoduje o limitním chování pro $z \to \infty$. Proto první řadu nazýváme *regulární část* a druhou řadu *hlavní část*.

Věta 20.8.11 (O charakterizaci izolovaných singularit v nekonečnu)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má v bodě ∞ izolovanou singularitu.*
(i) *Funkce f má v nekonečnu odstranitelnou singularitu právě tehdy, když hlavní část Laurentovy řady funkce f v nekonečnu je identicky nulová. Navíc jsou oba výroky ekvivalentní tomu, že funkce f je omezená na jistém prstencovém okolí nekonečna.*
(ii) *Funkce f má v nekonečnu pól právě tehdy, když hlavní část Laurentovy řady funkce f v nekonečnu obsahuje jen konečný počet netriviálních členů.*
(iii) *Funkce f má v nekonečnu podstatnou singularitu právě tehdy, když hlavní část Laurentovy řady funkce f v nekonečnu obsahuje nekonečný počet netriviálních členů.*

Důkaz. Dokažme první část. Pokud hlavní část Laurentovy řady se středem z_1 je identicky nulová, funkce má v nekonečnu limitu rovnou koeficientu a_0. To znamená, že funkce f má v nekonečnu odstranitelnou singularitu. Odtud zase dostáváme, že funkce f je omezená na jistém prstencovém okolí nekonečna. Konečně, omezenost implikuje identickou nulovost hlavní části Laurentovy řady podle Důsledku 20.7.12.

Nyní se zabývejme druhou částí. Má-li hlavní část Laurentovy řady nenulový, ale konečný počet nenulových koeficientů, snadno se dá dokázat, že $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$ (regulární část konverguje stejnoměrně na jistém prstencovém okolí nekonečna a na hlavní část můžeme použít aritmetiku limit). Pokud naopak $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$, je funkce $\frac{1}{f(z)}$ na jistém okolí nekonečna netriviální a má nulovou limitu. Odtud existuje číslo $k \in \mathbb{N}$ a funkce $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ taková, že $\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z-z_1)^k} h(z)$ a h je holomorfní a odražená od nuly na jistém prstencovém okolí nekonečna (skutečně, lze psát $z = z_1 + \frac{1}{w}$ a $F_{z_1}(w) = \frac{1}{f(z_1+\frac{1}{w})}$, novou funkci v počátku spojitě dodefinovat nulou a pak v počátku použít Lemma o rozkladu holomorfní funkce mající kořen, tedy Lemma 20.8.8). Díky tomu můžeme psát

$$f(z) = (z-z_1)^k \frac{1}{h(z)} =: (z-z_1)^k g(z),$$

kde $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní a omezená na jistém okolí nekonečna. Podle první části můžeme funkci g rozvinout do Laurentovy řady se středem v bodě z_1, která má jen nulové koeficienty v hlavní části, a pak máme

$$f(z) = (z-z_1)^k g(z) = (z-z_1)^k \sum_{n=-\infty}^{0} (z-z_1)^n = \sum_{n=-\infty}^{0} (z-z_1)^{n+k},$$

což jsme chtěli ukázat.

Třetí část plyne z předchozích dvou. Skutečnost, že f má v nekonečnu podstatnou singularitu je ekvivalentní tomu, že je zde singularita, která není ani odstranitelná ani pól, což je ekvivalentní tomu, že hlavní část Laurentova rozvoje musí mít nekonečný počet netriviálních členů. □

Poznámka 20.8.12. (i) Tvar řad použitých v odvození předchozí věty sice závisí na volbě $z_1 \in \mathbb{C}$, nicméně jevy vystupující ve znění předchozí věty už nikoliv.
(ii) Je možné definovat násobnost pólu v nekonečnu jako nejmenší $k \in \mathbb{N}$ takové, že funkce $\frac{f(z)}{z^k}$ je omezená na nějakém prstencovém okolí nekonečna.

Poznámka 20.8.13. Povšimněte si, že za reziduum v nekonečnu jsme vzali koeficient, jemuž příslušející člen nepatří do hlavní části Laurentovy řady. Na druhou stranu jsme jako u klasického rezidua vybrali člen Laurentovy řady, který nemá primitivní funkci na prstencovém okolí středu Laurentovy řady. Podívejme se ještě na vztah rezidua a chování funkce f při integraci přes kružnici. V případě $z_0 \in \mathbb{C}$ máme podle Věty o Laurentově rozvoji (Věta 20.7.6; pro dostatečně malé $r > 0$)

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_r(z_0)} f(z)\,\mathrm{d}z$$

a odtud

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \lim_{r\to 0_+} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_r(z_0)} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Pro $z_0 = \infty$ zvolíme $z_1 \in \mathbb{C}$ a pak pro všechna dostatečně velká $R > 0$ máme

$$\operatorname{Res}_{\infty} f = -a_{-1} = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_R(z_1)} f(z)\,\mathrm{d}z$$

a odtud

$$\operatorname{Res}_{\infty} f = -\lim_{R\to +\infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_R(z_1)} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Ukažme si ještě, jak patologické je limitní chování funkce s podstatnou singularitou.

Věta 20.8.14 (Casorati–Weierstrassova věta)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má v bodě $z_0 \in \mathbb{C}^*$ podstatnou singularitu. Pak pro každé $w \in \mathbb{C}^*$ existuje posloupnost $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ taková, že*

$$z_n \to z_0 \qquad a \qquad f(z_n) \to w.$$

Důkaz. Nechť pro spor existuje $w \in \mathbb{C}^*$ takové, že pro něj existují $\varepsilon, \delta > 0$ splňující

$$z \in \mathcal{P}_\delta(z_0) \qquad \Longrightarrow \qquad f(z) \notin \mathcal{U}_\varepsilon(w).$$

Nyní budeme rozlišovat dva případy. Nejprve nechť $w \in \mathbb{C}$. Zde definujeme funkci $h(z) := \frac{1}{f(z)-w}$. Ta je pak omezená na $\mathcal{P}_\delta(z_0)$ a holomorfní, a proto funkce h má v bodě z_0 odstranitelnou singularitu (podle Věty o charakterizaci odstranitelné singularity, tedy Věty 20.8.3 respektive Věty o charakterizaci izolovaných singularit v nekonečnu, tedy Věty 20.8.11). Speciálně h má v z_0 limitu. Pak má také funkce $f(z) = w + \frac{1}{h(z)}$ v bodě z_0 limitu. Proto zde nemůže mít podstatnou singularitu, což je ve sporu s předpoklady věty.

Zbývá případ $w = \infty$. V tomto případě je f omezená na $\mathcal{P}_\delta(z_0)$, což odpovídá odstranitelné singularitě. To je opět ve sporu s předpoklady věty. □

Platí dokonce silnější výsledek. Důkaz lze nalézt například v monografii [SaZy].

Věta 20.8.15 (Picardova věta)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má v bodě $z_0 \in \mathbb{C}^*$ podstatnou singularitu. Pak v každém prstencovém okolí bodu z_0 nabývá všech hodnot z $\mathbb{C}$ kromě nejvýše jedné.*

Příklad 20.8.16. Funkce e^z na prstencových okolích nekonečna nabývá všech hodnot kromě nuly. Podobně pro funkci $\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ na prstencových okolích počátku.

Hlavním výsledkem našeho snažení v této kapitole je následující zobecnění Cauchyovy věty.

Věta 20.8.17 (Reziduová věta)**.** *Nechť Γ je kladně orientovaná Jordanova po částech C^1-křivka, $k \in \mathbb{N}$ a $a_1, a_2, \dots, a_k \in \operatorname{Int}\Gamma$. Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na $\operatorname{Int}\Gamma \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ a spojitá na $\overline{\operatorname{Int}\Gamma} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Pak*

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{a_j} f.$$

Důkaz. Protože bodů $a_1, a_2, \dots, a_k$ je konečný počet, okolo každého z nich umíme zkonstruovat kružnice s tak malým poloměrem (poloměr volíme pro všechny kružnice stejný, označme jej r), že jsou vzniklé uzavřené kruhy po dvou disjunktní a všechny leží v $\operatorname{Int}\Gamma$. Nyní aplikujeme třetí verzi Cauchyovy věty (Věta 20.4.7), kde položíme

$$\varphi := \Gamma \qquad \text{a} \qquad \varphi_j := C_r(a_j) \quad \text{pro všechna } j \in \{1, \dots, k\},$$

a dostáváme

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{k} \int_{C_r(a_j)} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Teď už stačí na každý z integrálů napravo použít vzorec pro reziduum z Věty o Laurentově rozvoji (Věta 20.7.6). □

Poznámka 20.8.18. Povšimněte si, že jsme v důkazu nepotřebovali, aby f byla holomorfní na celé množině $\operatorname{Int}\Gamma \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ a spojitá na množině $\overline{\operatorname{Int}\Gamma} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Holomorfnost a spojitost můžeme oželet na malých okolích bodů $a_1, a_2, \dots, a_k$. Stačí nám, když umíme zkonstruovat kružnice s vlastnostmi jako v důkazu, dokonce ani nemusejí mít stejný poloměr.

Existuje analogické tvrzení pro reziduum v nekonečnu, které nám může usnadnit práci v situacích, kdy f má v $\operatorname{Int}\Gamma$ nepříjemně mnoho singularit.

Věta 20.8.19 (Reziduová věta pro reziduum v nekonečnu)**.** *Nechť Γ je kladně orientovaná Jordanova po částech C^1-křivka. Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na $\operatorname{Ext}\Gamma$ a spojitá na $\overline{\operatorname{Ext}\Gamma}$. Pak*

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = -2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}_\infty f.$$

Důkaz. Zvolme $R > 0$ tak velké, aby $\langle\Gamma\rangle \subset B_R(0)$. Pak díky třetí verzi Cauchyovy věty (Věta 20.4.7) a definici rezidua v nekonečnu máme

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_R(0)} f(z)\,\mathrm{d}z = -2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_\infty f.$$

□

Poznámka 20.8.20. Pojem kladně orientovaná křivka znamená, že vnitřek křivky je obíhán tak, že leží nalevo proti směru obíhání. Při práci s reziduem v nekonečnu je přirozené situaci vnímat tak, že obíháme vnějšek křivky. Pokud by ten měl ležet nalevo proti směru obíhání, změnilo by se nám znaménko integrálu. Mohli bychom vyrušit toto záporné znaménko se záporným znaménkem pravé strany. Jinými slovy, pokud Γ obíhá v kladném smyslu $\mathrm{Ext}\,\Gamma$, pak

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_\infty f.$$

Platí ještě jedno zajímavé tvrzení.

Věta 20.8.21 (O součtu reziduí)**.** *Nechť $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{C}$. Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Pak*

$$\mathrm{Res}_\infty f + \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}_{a_j} f = 0.$$

Důkaz. Zvolme $R > 0$ tak velké, aby $a_1, a_2, \dots, a_k \in B_R(0)$. Podle Reziduové věty (Věta 20.8.17) a Reziduové věty pro reziduum v nekonečnu (Věta 20.8.19) pak máme

$$2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}_{a_j} f = \int_{C_R(0)} f(z)\,\mathrm{d}z = -2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_\infty f.$$

□

Funkcím, se kterými jsme výše pracovali, se obvykle říká *meromorfní funkce.* Uveďme si přesnou definici.

Definice 20.8.22 (Meromorfní funkce)**.** Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a $K \subset \Omega$ je nejvýše spočetná množina, která nemá žádný hromadný bod v Ω. Jestliže funkce $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na $\Omega \setminus K$ a v bodech množiny K má póly, říkáme, že f je *meromorfní funkce* na Ω.

Poznámka 20.8.23. (i) Nevylučujeme možnost, že nekonečno je hromadným bodem množiny K.
(ii) V definici používáme naši úmluvu, že všechny odstranitelné singularity již byly odstraněny prostřednictvím dodefinováním limitou.
(iii) Typickým příkladem meromorfní funkce na $\mathbb{C}$ je racionální lomená funkce.

20.9 Aplikace Reziduové věty na výpočet integrálů

20.9.1 Metody výpočtu reziduí

Abychom měli z Reziduové věty (Věta 20.8.17) v aplikacích prospěch, potřebujeme se nejprve naučit rezidua efektivně počítat. Někdy je výhodné pracovat s Laurentovou řadou, jindy použít vzorce, které si představíme níže.

Příklad 20.9.1. (i) Uvažujme funkci $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$. Na $B_{0,1}(0)$ pak máme

$$f(z) = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} z^k = -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n$$

a odtud $\operatorname{Res}_0 f = -1$.

Dále na $B_{1,\infty}(0)$ platí

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z^2}\sum_{k=-\infty}^{0} z^k = \sum_{n=-\infty}^{-2} z^n$$

a odtud $\operatorname{Res}_\infty f = 0$.

Podle Věty o součtu reziduí (Věta 20.8.21) ještě dostáváme

$$\operatorname{Res}_1 f = -\operatorname{Res}_\infty f - \operatorname{Res}_0 f = 1.$$

(ii) Uvažujme funkci $f(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$. Protože platí

$$\mathrm{e}^w = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} \qquad \text{pro všechna } w \in \mathbb{C},$$

máme

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k!} = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{z^n}{(-n)!} \qquad \text{pro všechna } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Odtud $\operatorname{Res}_\infty f = -1$ a $\operatorname{Res}_0 f = 1$.

Věta 20.9.2 (První věta o výpočtu reziduí)**.** *Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, funkce $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má v bodě z_0 izolovanou singularitu a funkce $g, h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jsou v bodě z_0 holomorfní.*
(i) *Má-li f v bodě z_0 odstranitelnou singularitu, pak $\operatorname{Res}_{z_0} f = 0$.*
(ii) *Má-li f v bodě z_0 pól násobnosti nejvýše $k \in \mathbb{N}$, pak*

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} \left(\frac{1}{(k-1)!}(z-z_0)^k f(z)\right)^{(k-1)}.$$

(iii) *Má-li f v bodě z_0 pól násobnosti jedna, pak*

$$\operatorname{Res}_{z_0}(fg) = g(z_0) \operatorname{Res}_{z_0} f.$$

Speciálně pokud $g(z_0) = 0$, pak má funkce fg v bodě z_0 odstranitelnou singularitu.
(iv) *Jestliže h má v bodě z_0 jednoduchý kořen, pak*

$$\operatorname{Res}_{z_0}\left(\frac{g}{h}\right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Důkaz. V prvním případě po dodefinování limitou dostaneme holomorfní funkci s Taylorovým rozvojem na okolí bodu z_0, tedy s nulovým reziduem.

Ve druhém případě máme pro všechna z z dostatečně malého prstencového okolí bodu z_0

$$\begin{aligned}(z - z_0)^k f(z) &= (z - z_0)^k \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+k} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} a_{m-k} (z - z_0)^m.\end{aligned}$$

Proto pro všechna z z dostatečně malého redukovaného okolí bodu z_0 máme (využíváme lokálně stejnoměrnou konvergenci)

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{(k-1)!}(z - z_0)^k f(z)\right)^{(k-1)} \\ &\qquad = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{m=k-1}^{\infty} a_{m-k} m(m-1)\dots(m-k+2)(z - z_0)^{m-k+1}.\end{aligned}$$

Odtud (zůstala nám Taylorova řada a ta už konverguje stejnoměrně na nějakém okolí z_0)

$$\lim_{z \to z_0} \left(\frac{1}{(k-1)!}(z - z_0)^k f(z)\right)^{(k-1)} = a_{-1} = \operatorname{Res}_{z_0} f.$$

Třetí vzorec plyne z druhého, neboť v uvedené situaci máme

$$\operatorname{Res}_{z_0}(fg) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) g(z) = g(z_0) \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = g(z_0) \operatorname{Res}_{z_0} f.$$

Na odvození čtvrtého vzorce lze opět použít druhý vzorec (díky podmínce na násobnost kořenu funkce h má výsledek dobrý smysl)

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{z_0}\left(\frac{g}{h}\right) &= \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z \to z_0} g(z) \frac{z - z_0}{h(z) - 0} = \lim_{z \to z_0} g(z) \frac{z - z_0}{h(z) - h(z_0)} \\ &= \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.\end{aligned}$$

□

Příklad 20.9.3. Podle třetí části předchozí věty máme

$$\operatorname{Res}_1 \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z}\Big|_{z=1} \operatorname{Res}_1 \frac{1}{z-1} = 1.$$

Můžeme použít i čtvrtou část

$$\operatorname{Res}_1 \frac{1}{z(z-1)} = \operatorname{Res}_1 \frac{\frac{1}{z}}{z-1} = \frac{\frac{1}{z}|_{z=1}}{(z-1)'|_{z=1}} = \frac{1}{1} = 1$$

a druhou část

$$\operatorname{Res}_1 \frac{1}{z(z-1)} = \lim_{z\to 1}\Big((z-1)\frac{1}{z(z-1)}\Big) = \lim_{z\to 1} \frac{1}{z} = 1.$$

Druhou část můžeme použít s libovolně velkým $k \in \mathbb{N}$ (ale zbytečně to prodlužuje délku výpočtu), třeba pro $k = 3$ máme

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_1 \frac{1}{z(z-1)} &= \lim_{z\to 1}\Big(\frac{1}{2}(z-1)^3\frac{1}{z(z-1)}\Big)'' = \lim_{z\to 1}\frac{1}{2}\Big(\frac{(z-1)^2}{z}\Big)'' \\ &= \lim_{z\to 1}\frac{1}{2}\Big(z-2+\frac{1}{z}\Big)'' = \lim_{z\to 1}\frac{1}{2}\frac{2}{z^3} = 1.\end{aligned}$$

Nyní se zaměřme na počítání rezidua v nekonečnu.

Věta 20.9.4 (Druhá věta o výpočtu reziduí)**.** *Nechť funkce $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má v nekonečnu izolovanou singularitu.*
(i) *Platí* $\operatorname{Res}_\infty f = \operatorname{Res}_0 g$*, kde funkce g je definovaná předpisem* $g(w) = -\frac{1}{w^2} f(\frac{1}{w})$.
(ii) *Existují-li $R, K > 0$ taková, že $|f(z)| \le \frac{K}{|z|^2}$ kdykoliv $|z| > R$, pak* $\operatorname{Res}_\infty f = 0$.
(iii) *Má-li f v nekonečnu pól násobnosti nejvýše $k \in \mathbb{N}$, pak*

$$\operatorname{Res}_\infty f = \lim_{z\to\infty} (-1)^k \frac{1}{(k+1)!}\Big(z^{k+2} f^{(k+1)}(z)\Big).$$

Důkaz. V prvním případě na jistém prstencovém okolí nekonečna máme

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

Proto na jistém prstencovém okolí počátku platí

$$g(w) = -\frac{1}{w^2} f\Big(\frac{1}{w}\Big) = -\frac{1}{w^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \Big(\frac{1}{w}\Big)^n = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{w^{n+2}}.$$

Zde vidíme, že koeficient a_{-1} doprovází činitel $-\frac{1}{w}$, což jsme přesně chtěli ukázat.

Ve druhém případě růstová podmínka požaduje (spolu s Větou o charakterizaci izolovaných singularit v nekonečnu, tedy Větou 20.8.11), aby měl Laurentův rozvoj na okolí nekonečna tvar

$$\sum_{n=-\infty}^{-2} a_n z^n.$$

Odtud je vidět požadovaný výsledek.

Ve třetím případě zase na okolí nekonečna máme

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-2} a_n z^n + a_{-1}\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{k} a_n z^n.$$

Odtud (o tvar koeficientů derivace první sumy se nemusíme příliš zajímat)

$$f^{(k+1)}(z) = \sum_{n=-\infty}^{-2} b_n z^{n-k-1} + a_{-1}(-1)^{k+1}(k+1)!\frac{1}{z^{k+2}}.$$

Z poslední formule nám limitní přechod dává požadovaný výsledek. □

Poznámka 20.9.5. Povšimněte si, že žádná z vět o výpočtu reziduí nám nenabízí vzorec, který by se dal použít v případě podstatné singularity. V uvedené situaci bývá nejčastěji nutné použít Laurentův rozvoj. Občas se dá použít i Věta o součtu reziduí (Věta 20.8.21).

Příklad 20.9.6. Nalezněme hodnotu rezidua $\operatorname{Res}_0 \frac{\sin(\frac{1}{z})}{z-3}$. Postup přes Laurentův rozvoj využívá vzorce

$$\sin\Big(\frac{1}{z}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{-2n-1}}{(2n+1)!} \qquad \text{pro } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \tag{20.9.1}$$

a (pozor, rozvoj se musí uvést ve tvaru odpovídajícímu tomu, že chceme pracovat s mezikružím sousedícím s počátkem)

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{z}{3}\Big)^n \qquad \text{pro } z \in B_{0,3}(0).$$

Proto

$$\frac{\sin(\frac{1}{z})}{z-3} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{-2n-1}}{(2n+1)!}\Big)\Big(-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{z}{3}\Big)^n\Big) \qquad \text{pro } z \in B_{0,3}(0).$$

Podle Cauchyovy věty o součinu řad (Věta 8.5.12; rozmyslete si, že tato věta platí i pro absolutně konvergentní řady s komplexními členy) máme napravo absolutně konvergentní zobecněnou řadu stabilní vůči přerovnání (podle Definice zobecněné řady a její konvergence, tedy Definice 8.5.8 a Věty o přerovnání absolutně konvergentní řady, tedy Věty 8.5.6). Proto je ve výsledném součtu výraz z^{-1} doprovázen koeficientem

$$a_{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{1}{3}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!9^k} = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\frac{1}{3})^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\sin\Big(\frac{1}{3}\Big).$$

Odtud

$$\operatorname{Res}_0 \frac{\sin(\frac{1}{z})}{z-3} = -\sin\Big(\frac{1}{3}\Big).$$

Můžeme také postupovat přes Větu o součtu reziduí (Věta 20.8.21). Tento přístup je v našem případě velice efektivní, neboť funkce $\frac{\sin(\frac{1}{z})}{z-3}$ má v $\mathbb{C}^*$ jen velmi malý počet singularit a zároveň se mimo počátek vyskytují pouze singularity s velice snadno spočítatelnými rezidui. Dostáváme

$$\operatorname{Res}_0 \frac{\sin(\frac{1}{z})}{z-3} = -\operatorname{Res}_3 \frac{\sin(\frac{1}{z})}{z-3} - \operatorname{Res}_\infty \frac{\sin(\frac{1}{z})}{z-3} = -\sin\Big(\frac{1}{3}\Big) + 0,$$

neboť

$$\operatorname{Res}_3 \frac{\sin(\frac{1}{z})}{z-3} = \frac{\sin(\frac{1}{z})}{(z-3)'}\Big|_{z=3} = \sin\Big(\frac{1}{3}\Big)$$

a

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{3}{z}\Big)^n \qquad \text{pro } z \in B_{3,\infty}(0),$$

což spolu s (20.9.1) dává nulovou hodnotu rezidua v nekonečnu.

Při aplikacích budeme také používat následující výsledek o integrálu přes část kladně orientované kružnice.

Tvrzení 20.9.7 (O obíhání části kružnice)**.** *Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a funkce $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má v bodě z_0 jednoduchý pól. Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ splňují $\alpha < \beta$ a $\beta - \alpha \le 2\pi$. Pro každé $\varepsilon > 0$ definujme křivku φ_ε předpisem*

$$\varphi_\varepsilon(t) = z_0 + \varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \qquad \textit{pro } t \in [\alpha, \beta].$$

Pak

$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_{\varphi_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = (\beta-\alpha)\mathrm{i}\operatorname{Res}_{z_0} f.$$

Důkaz. V naší situaci na jistém prstencovém okolí bodu z_0 platí

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Označme $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Pak h je holomorfní na jistém okolí bodu z_0, a proto existuje $M > 0$ takové, že $|h| < M$ na jistém okolí bodu z_0. Díky tomu pro všechna dostatečně malá $\varepsilon > 0$ máme

$$\int_{\varphi_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta \frac{a_{-1}}{\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \mathrm{i}\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t + \int_{\varphi_\varepsilon} h(z)\,\mathrm{d}z = (\beta-\alpha)\mathrm{i}\operatorname{Res}_{z_0} f + \int_{\varphi_\varepsilon} h(z)\,\mathrm{d}z.$$

Dokazovaný výsledek nyní plyne z odhadu

$$\Big|\int_{\varphi_\varepsilon} h(z)\,\mathrm{d}z\Big| \le \sup_{\langle\varphi_\varepsilon\rangle} |h| \ell_{\varphi_\varepsilon} \le M(\beta-\alpha)\varepsilon \overset{\varepsilon\to 0_+}{\to} 0.$$

$\square$

Poznámka 20.9.8. Povšimněte si, že pro $\beta - \alpha = 2\pi$ se dostáváme do situace, kde stejný výsledek dává Reziduová věta (Věta 20.8.17). Té však postačí izolovaná singularita libovolného typu a navíc není potřeba limitní přechod $\varepsilon \to 0_+$.

20.9.2 l'Hospitalovo pravidlo

Techniky výpočtu reziduí v sobě často zahrnují limitní proces. Počítání limit nám může často usnadnit l'Hospitalovo pravidlo. Přímé přenesení tohoto výsledku z teorie funkcí jedné reálné proměnné není možné, protože jeho důkaz byl založen na větách o střední hodnotě, které v komplexním oboru neplatí. Můžeme však využít speciální vlastnosti holomorfních funkcí (zejména věty charakterizující jednotlivé typy izolovaných singularit prostřednictvím chování Laurentových řad). Dokonce dostaneme o něco silnější výsledek, než jaký známe z teorie funkcí jedné reálné proměnné.

Věta 20.9.9 (l'Hospitalovo pravidlo)**.** *Nechť $f, g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}^*$. Nechť na jistém prstencovém okolí bodu z_0 jsou funkce f, g holomorfní a platí zde $g' \neq 0$. Nechť platí jedna z podmínek*
(i) $\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} g(z) = 0$
(ii) $\lim_{z\to z_0} g(z) = \infty$.
Pak $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)}$ existuje právě tehdy, když existuje $\lim_{z\to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$. V takovém případě navíc platí

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Poznámka 20.9.10. Oproti verzi z teorie funkcí jedné reálné proměnné je naše věta silnější v tom, že navíc dává ekvivalenci existence $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)}$ a $\lim_{z\to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$. V komplexním případě totiž nenastávají analogie patologických jevů jako třeba

$$0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x + \sin x} \neq \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin' x}{x' + \sin' x}.$$

Než přistoupíme k důkazu komplexní verze l'Hospitalova pravidla, připravme si ještě jeden pomocný výsledek.

Lemma 20.9.11 (O derivaci Laurentovy řady)**.** *Každou Laurentovu řadu je možné derivovat člen po členu na jejím konvergenčním mezikruží.*

Důkaz. Nechť $0 \leq a < b \leq +\infty$, $z_0 \in \mathbb{C}$ a

$$f(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

je Laurentova řada konvergentní na mezikruží $B_{a,b}(z_0)$. Označme

$$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{a} \qquad h(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n.$$

Pak regulární část g je holomorfní funkce na $B_b(z_0)$ a lze ji zde derivovat člen po členu. Zbývá získat podobný výsledek pro hlavní část h. Tu lze psát jako

$$h(z) = \eta\Big(\frac{1}{z - z_0}\Big),$$

kde $\eta(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$ je holomorfní funkce na $B_{\frac{1}{a}}(0)$. Funkci η můžeme derivat člen po členu uvnitř jejího konvergenčního kruhu. Proto pro $0 < \frac{1}{z-z_0} < \frac{1}{a}$ dostáváme

$$\begin{aligned}h'(z) &= \eta'\Big(\frac{1}{z-z_0}\Big)\Big(\frac{1}{z-z_0}\Big)' = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} n a_{-n} w^{n-1}\Big)\Big|_{w=\frac{1}{z-z_0}}\Big(-\frac{1}{(z-z_0)^2}\Big)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-n)a_{-n}\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\Big(\frac{1}{(z-z_0)^n}\Big)'.\end{aligned}$$

To jsme chtěli ukázat. □

Důkaz l'Hospitalova pravidla. V důkazu budeme rozlišovat několik případů.

1) Případ $z_0 \in \mathbb{C}$, $\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} g(z) = 0$
Uvažované funkce mají v bodě z_0 odstranitelnou singularitu. Proto lze psát na jistém okolí bodu z_0

$$f(z) = f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2}(z-z_0)^2 + \frac{f'''(z_0)}{6}(z-z_0)^3 + \dots$$

a

$$g(z) = g'(z_0)(z-z_0) + \frac{g''(z_0)}{2}(z-z_0)^2 + \frac{g'''(z_0)}{6}(z-z_0)^3 + \dots .$$

Nyní se snadno nahlédne (diskutujte polohu prvního nenulového koeficientu v rozvojích funkcí f a g), že platí

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} &= \lim_{z\to z_0}\frac{f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2}(z-z_0)^2 + \frac{f'''(z_0)}{6}(z-z_0)^3 + \dots}{g'(z_0)(z-z_0) + \frac{g''(z_0)}{2}(z-z_0)^2 + \frac{g'''(z_0)}{6}(z-z_0)^3 + \dots}\\ &= \lim_{z\to z_0}\frac{f'(z_0) + \frac{f''(z_0)}{2}(z-z_0) + \frac{f'''(z_0)}{6}(z-z_0)^2 + \dots}{g'(z_0) + \frac{g''(z_0)}{2}(z-z_0) + \frac{g'''(z_0)}{6}(z-z_0)^2 + \dots} = \lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}.\end{aligned}$$

2) Případ $z_0 \in \mathbb{C}$, $\lim_{z\to z_0} g(z) = \infty$, f nemá podstatnou singularitu v z_0
Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $z_0 = 0$. Navíc můžeme předpokládat, že f není konstantně nulová (jinak by šlo použít zjednodušenou verzi následujícího postupu). Proto existují $k \in \mathbb{N}$ a $m \in \mathbb{Z}$ taková, že

$$g(z) = b_{-k}z^{-k} + b_{-k+1}z^{-k+1} + \dots \qquad \text{a} \qquad f(z) = a_m z^m + a_{m+1}z^{m+1} + \dots,$$

$b_{-k} \neq 0$ a $a_m \neq 0$. Odtud

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{g(z)} = \begin{cases} 0 & \text{pro } -k < m\\ \frac{a_{-k}}{b_{-k}} & \text{pro } -k = m\\ \infty & \text{pro } -k > m.\end{cases}$$

Na druhou stranu je z výše uvedených zápisů také vidět (pozor na derivování pro $m = 0$)

$$\lim_{z\to 0}\frac{f'(z)}{g'(z)} = \begin{cases} 0 & \text{pro } -k < m\\ \frac{(-k)a_{-k}}{(-k)b_{-k}} & \text{pro } -k = m\\ \infty & \text{pro } -k > m.\end{cases}$$

Proto obě limity existují a rovnají se.

3) Případ $z_0 \in \mathbb{C}$, $\lim_{z\to z_0} g(z) = \infty$, f má podstatnou singularitu v z_0
Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $z_0 = 0$. Tentokrát můžeme psát

$$g(z) = b_{-k}z^{-k} + b_{-k+1}z^{1-k} + \cdots = z^{-k}h(z),$$

kde h je holomorfní funkce, která je nenulová na jistém okolí počátku. Díky tomu

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z)}{z^{-k}h(z)} = z^k f(z)\frac{1}{h(z)}.$$

Limita výrazu úplně napravo pro $z \to 0$ nemůže existovat, protože jednak máme $\frac{1}{h(z)} \to \frac{1}{h(0)} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ a jednak má funkce $z^k f(z)$ v počátku podstatnou singularitu a proto má podle Casorati–Weierstrassovy věty (Věta 20.8.14) mezi hromadným hodnotami přinejmenším nulu a nekonečno. Ty musí být také hromadnými hodnotami funkce $\frac{f}{g}$. Zabývejme se nyní podílem $\frac{f'}{g'}$. Díky Lemmatu o derivaci Laurentovy řady (Lemma 20.9.11) máme v čitateli funkci s podstatnou singularitou a ve jmenovateli funkci s pólem. To je situace, ve které umíme ukázat, že limita podílu neexistuje. Celkově jsme tedy ukázali, že v našem případě neexistuje žádná z dvojice studovaných limit.

4) Případ $z_0 = \infty$, $\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} g(z) = 0$
Předpokládejme, že existují $k \in \mathbb{N}$ a $m \in \mathbb{N}$ taková, že

$$g(z) = b_{-k}z^{-k} + b_{-k-1}z^{-k-1} + \dots \qquad \text{a} \qquad f(z) = a_{-m}z^{-m} + a_{-m-1}z^{-m-1} + \dots,$$

$b_{-k} \neq 0$ a $a_{-m} \neq 0$ (pokud $f \equiv 0$, důkaz je snazší). Pak máme

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{g(z)} = \begin{cases} 0 & \text{pro } -k > -m \\ \frac{a_{-k}}{b_{-k}} & \text{pro } -k = -m \\ \infty & \text{pro } -k < -m. \end{cases}$$

Dále platí

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \begin{cases} 0 & \text{pro } -k > -m \\ \frac{(-k)a_{-k}}{(-k)b_{-k}} & \text{pro } -k = -m \\ \infty & \text{pro } -k < -m. \end{cases}$$

Proto obě limity existují a rovnají se.

5) Případ $z_0 = \infty$, $\lim_{z\to\infty} g(z) = \infty$, f nemá podstatnou singularitu v nekonečnu
Předpokládejme, že existují $k \in \mathbb{N}$ a $m \in \mathbb{Z}$ taková, že

$$g(z) = b_k z^k + b_{k-1}z^{k-1} + \dots \qquad \text{a} \qquad f(z) = a_m z^m + a_{m-1}z^{m-1} + \dots,$$

$b_k \neq 0$ a $a_m \neq 0$ (pokud $f \equiv 0$, důkaz je snazší). Pak máme

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{g(z)} = \begin{cases} 0 & \text{pro } k > m \\ \frac{a_k}{b_k} & \text{pro } k = m \\ \infty & \text{pro } k < m. \end{cases}$$

Dále platí

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \begin{cases} 0 & \text{pro } k > m \\ \frac{ka_k}{kb_k} & \text{pro } k = m \\ \infty & \text{pro } k < m. \end{cases}$$

Proto obě limity existují a rovnají se.

6) Případ $z_0 = \infty$, $\lim_{z\to\infty} g(z) = \infty$, f má podstatnou singularitu v nekonečnu Opět se pomocí Casorati–Weierstrassovy věty (Věta 20.8.14) ukáže, že ani jedna z uvažovaných limit neexistuje. $\square$

Příklad 20.9.12. Spočítejme $\operatorname{Res}_0 \frac{e^z-1}{\sin^2 z}$. Protože

$$e^z - 1|_{z=0} = 0 \qquad \text{a} \qquad (e^z-1)'|_{z=0} = e^z|_{z=0} = 1,$$

zadaná funkce má v počátku jednonásobný pól. Proto nám druhá část První věty o výpočtu reziduí (Věta 20.9.2) spolu s dvakrát aplikovaným l'Hospitalovým pravidlem (Věta 20.9.9; v obou aplikacích se jedná o případ s nulovou limitou čitatele a jmenovatele) dávají

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_0 \frac{e^z-1}{\sin^2 z} &= \frac{1}{0!} \lim_{z\to 0} z \frac{e^z-1}{\sin^2 z} = \lim_{z\to 0} \frac{z(e^z-1)}{\sin^2 z} = \lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1 + ze^z}{2\sin z \cos z} \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{e^z + e^z + ze^z}{2\cos^2 z - 2\sin^2 z} = \frac{2}{2} = 1.\end{aligned}$$

Cvičení 20.9.13. Spočítejte limity

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^z-1}{z}, \quad \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z}, \quad \lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{z^2}, \quad \lim_{z\to 0} \frac{\sinh z}{z} \quad \text{a} \quad \lim_{z\to 0} \frac{\cosh z - 1}{z^2}.$$

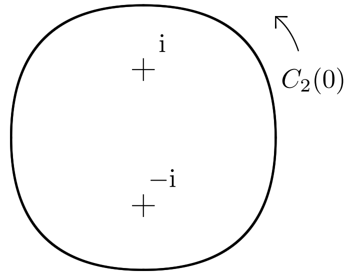
Nyní si ukážeme, jak můžeme za pomoci Reziduové věty (Věta 20.8.17) počítat některé typy integrálů. Ve většině případů budeme integrovat funkce reálné proměnné. Zadaný integrál si vhodně převedeme na křivkový integrál funkce komplexní proměnné podobným způsobem, jako jsme počítali Fresnelovy integrály pomocí Cauchyovy věty. Naše první ukázka integrace založené na Reziduové větě však bude čistě komplexní.

20.9.3 Přímý výpočet křivkových integrálů

Příklad 20.9.14. Spočítejme

$$I := \int_{C_2(0)} \frac{1}{1+z^2}\,dz.$$

Použijeme Reziduovou větu (Věta 20.8.17) v kombinaci s První větou o výpočtu reziduí (Věta 20.9.2). Funkce $f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$ je totiž holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$. V bodech $-i$ a i má jednoduché póly. Oba body $-i$ a i se vyskytují ve vnitřku křivky $C_2(0)$, proto se oba budou podílet na hodnotě integrálu I.



Obrázek 20.10: Výpočet křivkového integrálu z funkce $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ přes kružnici $C_2(0)$. Obě izolované singularity se nalézají uvnitř kruhu, proto se obě podílí na hodnotě integrálu.

Podle čtvrté části První věty o výpočtu reziduí (Věta 20.9.2) máme

$$\operatorname{Res}_{-\mathrm{i}} \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(1+z^2)'|_{z=-\mathrm{i}}} = \frac{1}{2z|_{z=-\mathrm{i}}} = \frac{1}{-2\mathrm{i}} = -\frac{1}{2\mathrm{i}}$$

a

$$\operatorname{Res}_{\mathrm{i}} \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(1+z^2)'|_{z=\mathrm{i}}} = \frac{1}{2z|_{z=\mathrm{i}}} = \frac{1}{2\mathrm{i}}.$$

Proto Reziduová věta (Věta 20.8.17) dává

$$I = 2\pi\mathrm{i}\Big(\operatorname{Res}_{-\mathrm{i}} \frac{1}{1+z^2} + \operatorname{Res}_{\mathrm{i}} \frac{1}{1+z^2}\Big) = 2\pi\mathrm{i}\Big(-\frac{1}{2\mathrm{i}} + \frac{1}{2\mathrm{i}}\Big) = 0.$$

Poznámka 20.9.15. Postupovat jsme také mohli přes Reziduovou větu pro reziduum v nekonečnu (Věta 20.8.19) kombinovanou s druhou částí Druhé věty o výpočtu reziduí (Věta 20.9.4; platí $\operatorname{Res}_\infty \frac{1}{1+z^2} = 0$). Takový přístup by byl obzvlášť výhodný při počítání integrálu

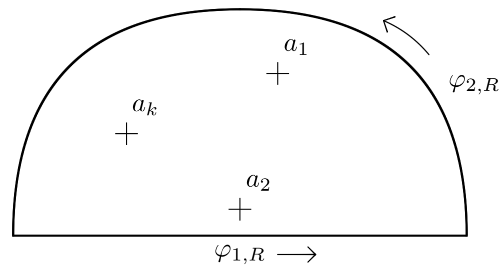
$$\int_{C_2(0)} \frac{1}{1+z^n}\,\mathrm{d}z$$

pro $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, pokud by n bylo velmi velké číslo.

20.9.4 Integrály typu $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$

Předpokládejme, že funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na reálné ose a je ji možné rozšířit na funkci $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, která je holomorfní na množině $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$ (přičemž všechny body $a_1, \dots, a_k$ leží v horní polorovině). Integrál budeme počítat často jako Newtonův, i když často existuje i jako Lebesgueův. Budeme zde kombinovat Reziduovou větu (Věta 20.8.17) a Jordanovo lemma (Lemma 20.4.13). Definujme křivky

$$\begin{aligned} \varphi_{1,R}(t) &= t + \mathrm{i}0 && \text{pro } t \in [-R, R], \\ \varphi_{2,R}(t) &= R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} && \text{pro } t \in [0, \pi] \end{aligned}$$



Obrázek 20.11: Výpočet reálného integrálu přes interval $(-\infty, \infty)$ pomocí integrace přes horní půlkruh.

a $\varphi_R := \varphi_{1,R} \oplus \varphi_{2,R}$.

Jsou-li nyní splněny předpoklady Jordanova lemmatu (Lemma 20.4.13), dostáváme pro všechna $R > \max\{|a_1|, \dots, |a_k|\}$

$$2\pi \mathrm{i} \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}_{a_j} f = \int_{\varphi_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\varphi_{1,R}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_{2,R}} f(z)\,\mathrm{d}z$$
$$\overset{R\to+\infty}{\to} (\mathcal{N}) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x + 0.$$

Příklad 20.9.16. Spočítejme integrál

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^6}\,\mathrm{d}x.$$

Funkce $f(z) = \frac{1}{1+z^6}$ je holomorfní všude na $\mathbb{C}$ až na šest bodů $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{6}+j\frac{\pi}{3})}$, kde $j \in \{0, 1, \dots, 5\}$. Ve zmíněných šesti bodech má jednoduché póly. Z těchto bodů leží v horní polorovině první tři.

V Jordanově lemmatu (Lemma 20.4.13) máme $\alpha = 0$. Proto potřebujeme odhadnout

$$RM_R = R \max_{\langle \varphi_{2,R} \rangle} |f| \le R \frac{1}{R^6 - 1} \overset{R\to+\infty}{\to} 0.$$

Díky tomu můžeme použít výše uvedený postup. Potřebujeme však ještě spočítat rezidua odpovídající trojici bodů $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{6}+j\frac{\pi}{3})}$, kde $j \in \{0, 1, 2\}$. Ve všech případech použijeme čtvrtou část První věty o výpočtu reziduí (Věta 20.9.2) opírající se o vzorec $\frac{1}{(1+z^6)'} = \frac{1}{6z^5}$. Proto máme

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Res}_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}} f + \operatorname{Res}_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3})}} f + \operatorname{Res}_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{6}+2\frac{\pi}{3})}} f \\
&\qquad = \frac{1}{6}\Big(\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\frac{\pi}{6}}} + \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}5(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3})}} + \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}5(\frac{\pi}{6}+2\frac{\pi}{3})}}\Big) = \frac{1}{6}\Big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5}{6}\pi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{15}{6}\pi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{25}{6}\pi}\Big) \\
&\qquad = \frac{1}{6}\Big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5}{6}\pi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}\pi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{6}\pi}\Big) \\
&\qquad = \frac{1}{6}\Big(\cos\frac{5\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{6} - \mathrm{i}\Big(\sin\frac{5\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{6}\Big)\Big) \\
&\qquad = \frac{1}{6}\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\Big(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}\Big)\Big) = -\frac{\mathrm{i}}{3}.
\end{aligned}$$

Celkově dostáváme

$$I = 2\pi\mathrm{i}\Big(\operatorname{Res}_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}} f + \operatorname{Res}_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3})}} f + \operatorname{Res}_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{6}+2\frac{\pi}{3})}} f\Big) = 2\pi\mathrm{i}\Big(-\frac{\mathrm{i}}{3}\Big) = \frac{2}{3}\pi.$$

Předchozí postup se dá s drobnou modifikací použít i v případě, že funkce f má singularitu na reálné ose. V takovém případě singularitu oběhneme pomocí půloblouku jako v následujícím příkladu. Ve výpočtu využijeme ještě Tvrzení o obíhání části kružnice (Tvrzení 20.9.7).

Příklad 20.9.17. Spočítejme integrál

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x.$$

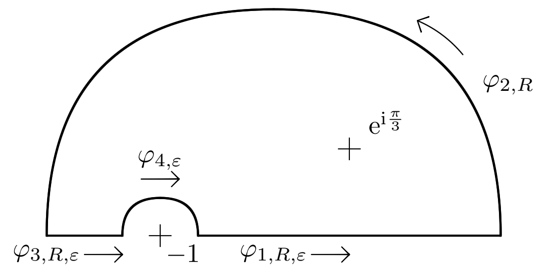
Uvedený integrál neexistuje jako Lebesgueův. Existuje však jako integrál ve smyslu *hlavní hodnoty* a přesně tomu bude odpovídat následující konstrukce. Nejprve si povšimněme, že funkce $f(z) = \frac{1}{1+z^3}$ je holomorfní všude na $\mathbb{C}$ až na tři body $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{3}+j\frac{2\pi}{3})}$, kde $j \in \{0,1,2\}$. Ve zmíněných třech bodech má jednoduché póly. Podívejme se ještě na polohu jednotlivých bodů. Bod $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ leží v horní polorovině, bod $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$ leží na reálné ose (právě tento bod si vynutí konstrukci malé půlkružnice) a bod $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}$ leží v dolní polorovině. Zafixujme $R > 1$, $\varepsilon \in (0,1)$ a definujme křivky

$$\begin{aligned}
\varphi_{1,R,\varepsilon}(t) &= t + \mathrm{i}0 && \text{pro } t \in [-1+\varepsilon, R] \\
\varphi_{2,R}(t) &= R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} && \text{pro } t \in [0,\pi] \\
\varphi_{3,R,\varepsilon}(t) &= t + \mathrm{i}0 && \text{pro } t \in [-R, -1-\varepsilon] \\
\varphi_{4,\varepsilon}(t) &= -1 + \varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-t)} && \text{pro } t \in [0,\pi]
\end{aligned}$$

a $\varphi_{R,\varepsilon} := \varphi_{1,R,\varepsilon} \oplus \varphi_{2,R} \oplus \varphi_{3,R,\varepsilon} \oplus \varphi_{4,\varepsilon}$.

Z Reziduové věty (Věta 20.4.8) máme

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi_{R,\varepsilon}} \frac{1}{1+z^3}\,\mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}} \frac{1}{1+z^3} = 2\pi\mathrm{i}\frac{1}{(1+z^3)'|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}} = 2\pi\mathrm{i}\frac{1}{3z^2|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}} \\
&= 2\pi\mathrm{i}\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2}{3}\pi} = \frac{2}{3}\pi\mathrm{i}\Big(\cos\frac{2\pi}{3} - \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\Big) = \frac{2}{3}\pi\mathrm{i}\Big(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \mathrm{i}\frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$



Obrázek 20.12: Leží-li na reálné ose bod se singularitou, můžeme si vypomoci malou půlkružnicí.

Nyní se budeme věnovat integraci přes jednotlivé křivky tvořící křivku $\varphi_{R,\varepsilon}$. Nejprve si povšimněme, že podle Tvrzení o obíhání části kružnice (Tvrzení 20.9.7) máme

$$\int_{\varphi_{4,\varepsilon}} \frac{1}{1+z^3}\,\mathrm{d}z \overset{\varepsilon\to 0_+}{\to} -\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{-1}\frac{1}{1+z^3} = -\pi\mathrm{i}\frac{1}{(1+z^3)'|_{z=-1}} = \frac{-\pi\mathrm{i}}{3(-1)^2} = -\mathrm{i}\frac{\pi}{3}.$$

Dále podle Jordanova lemmatu (Lemma 20.4.13; používáme $\max_{\langle\varphi_{2,R,\varepsilon}\rangle}|f| \leq \frac{1}{R^3-1}$) platí

$$\int_{\varphi_{2,R}} \frac{1}{1+z^3}\,\mathrm{d}z \overset{R\to+\infty}{\to} 0.$$

Nyní si povšimněme, že pro všechna $\xi > 0$ existují $R > 1$ tak velké a $\varepsilon \in (0,1)$ tak malé, že (rozmyslete si podrobně)

$$\left|\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x - \int_{\varphi_{1,R,\varepsilon}}\frac{1}{1+z^3}\,\mathrm{d}z - \int_{\varphi_{3,R,\varepsilon}}\frac{1}{1+z^3}\,\mathrm{d}z\right| < \xi.$$

Celkově jsme proto dostali

$$\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \mathrm{i}\frac{\pi}{3} - \left(-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Přístup, který jsme si zde ukázali, je často možné s menšími či většími modifikacemi používat i při integraci přes interval $(0,\infty)$. Asi nejsnazší je situace, když je funkce sudá. Tehdy můžeme psát

$$\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

a na pravou stranu se můžeme pokusit použít výše představený postup.

Někdy může být modifikace postupu dokonce velmi výhodná. To nám ukazuje následující příklad, kde vhodná modifikace snižuje počet bodů se singularitou uvnitř křivky a tím významně zkracuje výpočet.

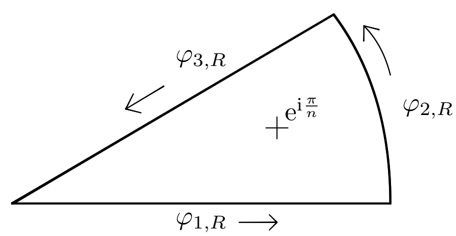
Příklad 20.9.18. Spočítejme integrál

$$I_{m,n} := \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x,$$

kde $m, n \in \mathbb{N}$ a $m < n$. Zafixujme $R > 1$ a definujme křivky

$$\begin{aligned} \varphi_{1,R}(t) &= t + \mathrm{i}0 && \text{pro } t \in [0, R] \\ \varphi_{2,R}(t) &= R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} && \text{pro } t \in [0, \tfrac{2\pi}{n}] \\ \varphi_{3,R}(t) &= -t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}} && \text{pro } t \in [-R, 0] \end{aligned}$$

a $\varphi_R := \varphi_{1,R} \oplus \varphi_{2,R} \oplus \varphi_{3,R}$.



Obrázek 20.13: Obíhání kruhové výseče za účelem počítání rezidua jen v jediném bodě.

Funkce $f(z) = \frac{z^{m-1}}{1+z^n}$ má na vnitřku křivky φ_R jedinou singularitu, a sice jednonásobný pól v bodě $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}$. Proto díky Reziduové větě (Věta 20.8.17) a čtvrté části První věty o výpočtu reziduí (Věta 20.9.2) máme

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_R} \frac{z^{m-1}}{1+z^n}\,\mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}} \frac{z^{m-1}}{1+z^n} = 2\pi\mathrm{i}\frac{z^{m-1}}{(1+z^n)'}\Big|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}} = 2\pi\mathrm{i}\frac{1}{n}z^{m-n}\Big|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}} \\ &= \frac{2\pi\mathrm{i}}{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi(m-n)}{n}}. \end{aligned}$$

Nyní se zabývejme integrály přes jednotlivé části křivky φ_R. Předně máme

$$\int_{\varphi_{1,R}} \frac{z^{m-1}}{1+z^n}\,\mathrm{d}z = \int_0^R \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \overset{R\to+\infty}{\longrightarrow} I_{m,n}.$$

Dále analogickým postupem jako v důkazu Jordanova lemmatu (Lemma 20.4.13) se dá ukázat (lišíme se jen v tom, že máme kratší integrační dráhu), že

$$\int_{\varphi_{2,R}} \frac{z^{m-1}}{1+z^n}\,\mathrm{d}z \overset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Zbývá poslední integrál. Pro ten máme (pro snazší zápis křivku obíháme v opačném směru)

$$\int_{\varphi_{3,R}} \frac{z^{m-1}}{1+z^n}\,\mathrm{d}z = -\int_0^R \frac{(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}})^{m-1}}{1+(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}})^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}\,\mathrm{d}t$$
$$= -\int_0^R \frac{t^{m-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi m}{n}}}{1+t^n}\,\mathrm{d}t \overset{R\to+\infty}{\to} -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi m}{n}} I_{m,n}.$$

Celkově jsme dostali

$$I_{m,n} = \frac{2\pi\mathrm{i}}{n}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi(m-n)}{n}}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi m}{n}}} = \frac{2\pi\mathrm{i}}{n}\frac{\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi m}{n}}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi m}{n}}} = \frac{2\pi\mathrm{i}}{n}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi m}{n}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi m}{n}}-1} = \frac{\pi}{n}\frac{2\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi m}{n}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi m}{n}}}$$
$$= \frac{\pi}{n}\frac{1}{\sin\frac{\pi m}{n}}.$$

20.9.5 Integrály typu $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}R(x)\,\mathrm{d}x$

Pro tento typ integrálů najdeme uplatnění při počítání Fourierovy transformace, ale i při čistě reálné integraci, neboť $\cos(\alpha x) = \operatorname{Re}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}$ a $\sin(\alpha x) = \operatorname{Im}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}$.

Budeme předpokládat, že $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde P, Q jsou polynomy, polynom Q není identicky nulový (může však mít kořeny prvního stupně, při jejich přítomnosti si opět můžeme vypomoci malými obloučky a integrál chápat jako integrál ve smyslu hlavní hodnoty) a $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$.

Základní schéma řešení si ukažme na jednoduchém případě, kdy polynom Q nemá reálné kořeny. Položme $f(z) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}\frac{P(z)}{Q(z)}$. Je-li $\alpha > 0$, volíme křivky

$$\begin{aligned} \varphi_{1,R}(t) &= t + \mathrm{i}0 && \text{pro } t \in [-R, R] \\ \varphi_{2,R}(t) &= R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} && \text{pro } t \in [0, \pi] \end{aligned}$$

a pak zavádíme $\varphi_R := \varphi_{1,R} \oplus \varphi_{2,R}$. Pro $\alpha < 0$ volíme

$$\begin{aligned} \varphi_{1,R}(t) &= t + \mathrm{i}0 && \text{pro } t \in [-R, R] \\ \varphi_{2,R}(t) &= R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} && \text{pro } t \in [0, \pi] \end{aligned}$$

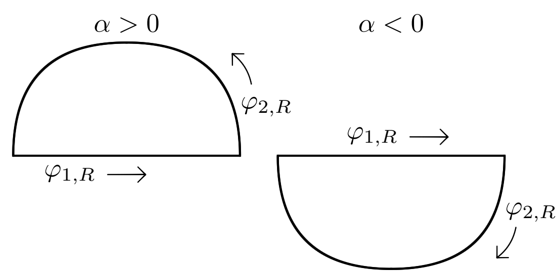
a pak opět položíme $\varphi_R := \varphi_{1,R} \oplus \varphi_{2,R}$.

Pak

$$\int_{\varphi_{1,R}} f(z)\,\mathrm{d}z \overset{R\to+\infty}{\to} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}R(x)\,\mathrm{d}x$$

(pokud $\operatorname{st} P \le \operatorname{st} Q - 2$, vychází nám Lebesgueův integrál; pokud $\operatorname{st} P = \operatorname{st} Q - 1$, integrál konverguje jako Newtonův prostřednictvím Dirichletova kritéria (Věta 7.6.11; jako Lebesgueův nikoliv). Z Jordanova lemmatu (Lemma 20.4.13) dále plyne

$$\int_{\varphi_{2,R}} f(z)\,\mathrm{d}z \overset{R\to+\infty}{\to} 0.$$



Obrázek 20.14: Volba křivky v závislosti na $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pozor, pro $\alpha < 0$ se jedná o obíhání v záporném smyslu.

Jsou-li body $\{a_1, \dots, a_k\} \subset \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0\}$ všechny kořeny polynomu Q, celkově jsme dostali (pozor na směr obíhání v případě $\alpha < 0$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x} R(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i} \sum_{\{j\in\{1,\dots,k\}:\ \operatorname{Im} a_j > 0\}} \operatorname{Res}_{a_j} f & \text{pro } \alpha > 0 \\ -2\pi\mathrm{i} \sum_{\{j\in\{1,\dots,k\}:\ \operatorname{Im} a_j < 0\}} \operatorname{Res}_{a_j} f & \text{pro } \alpha < 0. \end{cases}$$

Modifikaci postupu a výsledku pro případ, že Q má i reálné kořeny, si ukážeme později.

Příklad 20.9.19. Nechť $a, b > 0$. Spočítejme Newtonův (či zobecněný Lebesgueův) integrál

$$I := \int_0^{\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2 + b^2}\,\mathrm{d}x.$$

Nejprve si povšimněme, že nám zde skutečně může pomoci právě probíraná metoda, neboť

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2 + b^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}}{x^2 + b^2}\,\mathrm{d}x.$$

Zabývejme se dále funkcí $f(z) = \frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{z^2+b^2}$. Tato funkce je holomorfní na množině $\mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}b, \mathrm{i}b\}$ a ve zmíněných dvou bodech má jednoduché póly. Protože $a > 0$, dostáváme

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \operatorname{Im}\Big(2\pi\mathrm{i} \operatorname{Res}_{\mathrm{i}b} \frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{z^2 + b^2}\Big) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}\Big(2\pi\mathrm{i} \frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{(z^2 + b^2)'}\big|_{z=\mathrm{i}b}\Big) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}\Big(2\pi\mathrm{i} \frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{2z}\big|_{z=\mathrm{i}b}\Big) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im}\Big(\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{-ab}\Big) = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-ab}. \end{aligned}$$

Nyní si spočítáme jeden integrál, jehož integrand má póly na reálné ose.

Příklad 20.9.20. Nechť $a, b > 0$. Spočítejme integrál ve smyslu hlavní hodnoty

$$I := \text{p.v.} \int_0^{\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2 - b^2}\,\mathrm{d}x.$$

Opět si přepišme

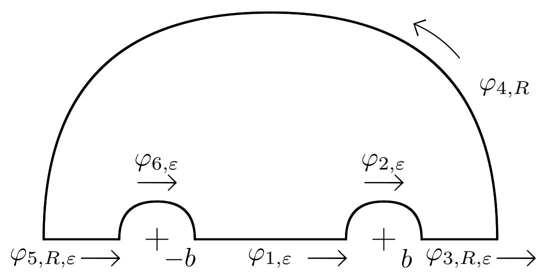
$$I = \frac{1}{2}\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2-b^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\text{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}}{x^2-b^2}\,\mathrm{d}x.$$

Po přepisu jsme dostali dvě singularity na reálné ose. Tím se dostáváme do situace, která není zahrnuta v pojmu integrálu ve smyslu hlavní hodnoty, jak jsme si jej představili v Definici 15.3.6. Ukážeme si, že Reziduová věta (Věta 20.4.8) nám umožní interpretovat zkoumaný integrál takovým způsobem, který přirozeně zobecní dosud používaný pojem *integrál ve smyslu hlavní hodnoty.*

Nyní zafixujme $\varepsilon \in (0,b)$ a $R > 2b$. Položme $f(z) = \frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{z^2-b^2}$,

$$\begin{aligned}
\varphi_{1,\varepsilon}(t) &= t + \mathrm{i}0 && \text{pro } t \in [-b+\varepsilon, b-\varepsilon]\\
\varphi_{2,\varepsilon}(t) &= b + \varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-t)} && \text{pro } t \in [0,\pi]\\
\varphi_{3,R,\varepsilon}(t) &= t + \mathrm{i}0 && \text{pro } t \in [b+\varepsilon, R]\\
\varphi_{4,R}(t) &= R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} && \text{pro } t \in [0,\pi]\\
\varphi_{5,R,\varepsilon}(t) &= t + \mathrm{i}0 && \text{pro } t \in [-R, -b-\varepsilon]\\
\varphi_{6,\varepsilon}(t) &= -b + \varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-t)} && \text{pro } t \in [0,\pi]
\end{aligned}$$

a $\varphi_{R,\varepsilon} := \varphi_{1,\varepsilon} \oplus \varphi_{2,\varepsilon} \oplus \varphi_{3,R,\varepsilon} \oplus \varphi_{4,R} \oplus \varphi_{5,R,\varepsilon} \oplus \varphi_{6,\varepsilon}$.



Obrázek 20.15: Leží-li na reálné ose bod se singularitou, můžeme si vypomoci malou půlkružnicí.

Nejprve máme

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+}\lim_{R\to+\infty}\Big(\int_{\varphi_{5,R,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_{1,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_{3,R,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z\Big) = \text{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}}{x^2-b^2}\,\mathrm{d}x.$$

Doporučujeme čtenáři si uvědomit, že díky tomu, že všechny integrály jsou konečné, v tomto případě není důležité, v jakém pořadí se limity provádějí, přehozením pořadí limit se výsledek nezmění. Dále podle Tvrzení o obíhání části křivky

(Tvrzení 20.9.7) dostáváme (pozor, části kružnic obíháme v záporném smyslu)

$$\int_{\varphi_{6,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_{2,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z \overset{\varepsilon\to 0+}{\to} -\pi\mathrm{i}(\operatorname{Res}_{-b} f + \operatorname{Res}_b f).$$

Navíc Jordanovo lemma (Lemma 20.4.13) dává

$$\int_{\varphi_{4,R}} f(z)\,\mathrm{d}z \overset{R\to\infty}{\to} 0$$

a díky holomorfnosti funkce f na $\operatorname{Int}\varphi_{R,\varepsilon}$ ještě máme $\int_{\varphi_{R,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

Celkově jsme dostali

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\Big(\pi\mathrm{i}(\operatorname{Res}_{-b} f + \operatorname{Res}_b f)\Big) = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\Big(\pi\mathrm{i}\Big(\frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{(z^2-b^2)'}|_{z=-b} + \frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{(z^2-b^2)'}|_{z=b}\Big)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\Big(\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ab}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}ab}}{2}\Big) = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\Big(\pi\mathrm{i}\cos(ab)\Big) = \frac{\pi}{2}\cos(ab). \end{aligned}$$

Poznámka 20.9.21. (i) Rozmyslete si, že pokud bychom body $-b$ a b obíhali pomocí spodních půloblouků, dostali bychom stejný výsledek, ale výpočet by byl delší.
(ii) Povšimněte si, že náš postup vlastně v situaci, kdy připouštíme reálné kořeny polynomu Q, rozšiřuje výše získaný vzorec pro $\alpha > 0$ na vzorec

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x} R(x)\,\mathrm{d}x \\ &\quad = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\{j\in\{1,\dots,k\}:\ \operatorname{Im} a_j>0\}} \operatorname{Res}_{a_j} f + \pi\mathrm{i} \sum_{\{j\in\{1,\dots,k\}:\ \operatorname{Im} a_j=0\}} \operatorname{Res}_{a_j} f \end{aligned}$$

a pro $\alpha < 0$ na vzorec

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x} R(x)\,\mathrm{d}x \\ &\quad = -2\pi\mathrm{i} \sum_{\{j\in\{1,\dots,k\}:\ \operatorname{Im} a_j<0\}} \operatorname{Res}_{a_j} f - \pi\mathrm{i} \sum_{\{j\in\{1,\dots,k\}:\ \operatorname{Im} a_j=0\}} \operatorname{Res}_{a_j} f. \end{aligned}$$

20.9.6 Integrály typu $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}x$

Předpokládejme, že funkce R splňuje $R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, kde P, Q jsou polynomy, a

$$Q(x,y) \neq 0 \qquad \text{pro } x^2 + y^2 = 1.$$

Náš typ integrálu se dá převést na křivkový integrál přes jednotkovou kružnici centrovanou v počátku. Využijeme následující úvahu s vhodnou funkcí $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (v praxi postup provádíme v obráceném směru a funkci f konstruujeme)

$$\int_{C_1(0)} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t.$$

Příklad 20.9.22. Nechť $a \in \mathbb{C}$, $|a| \neq 1$. Spočítejme integrál

$$I(a) := \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 - 2a\cos t + a^2}.$$

Protože $\cos t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2}$, můžeme psát

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 - a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}) + a^2} = \int_{C_1(0)} \frac{1}{1 - a(z + \frac{1}{z}) + a^2} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z} \\ &= \int_{C_1(0)} \frac{\mathrm{i}\mathrm{d}z}{az^2 - (1 + a^2)z + a}. \end{aligned}$$

Jmenovatel získané funkce má jednoduché kořeny v bodech a a $\frac{1}{a}$. Proto pro $|a| < 1$, $a \neq 0$ máme

$$\begin{aligned} I(a) &= 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_a \frac{\mathrm{i}}{az^2 - (1 + a^2)z + a} = 2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{i}}{(az^2 - (1 + a^2)z + a)'|_{z=a}} \\ &= 2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{i}}{a^2 - 1} = \frac{2\pi}{1 - a^2} \end{aligned}$$

a pro $|a| > 1$ dostáváme

$$\begin{aligned} I(a) &= 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{\frac{1}{a}} \frac{\mathrm{i}}{az^2 - (1 + a^2)z + a} = 2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{i}}{(az^2 - (1 + a^2)z + a)'|_{z=\frac{1}{a}}} \\ &= 2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{i}}{1 - a^2} = \frac{2\pi}{a^2 - 1}. \end{aligned}$$

Je-li $a = 0$, přímým výpočtem získáme $I(0) = 2\pi$, což formálně odpovídá vzorci pro $|a| < 1$.

20.9.7 Integrály typu $\int_0^\infty x^{\alpha-1} f(x)\,\mathrm{d}x$

Budeme předpokládat, že $\alpha \in (0, 1)$ a funkci f můžeme holomorfně prodloužit na $\mathbb{C}$ s výjimkou konečně mnoha bodů $a_1, \dots, a_k$, z nichž žádný neleží na kladné reálné poloose ani v počátku. Navíc předpokládejme, že

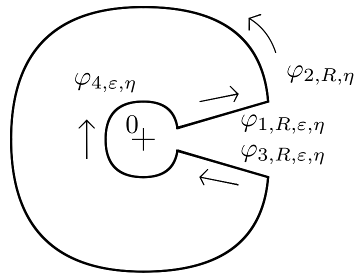
$$|f(z)| \leq \frac{C}{|z|}$$

na jistém prstencovém okolí nekonečna. Zřejmě pak uvažovaný integrál existuje jako Lebesgueův i Newtonův (funkce $\alpha \in (0, 1) \mapsto \int_0^\infty x^{\alpha-1} f(x)\,\mathrm{d}x$ se nazývá *Mellinova transformace* funkce f).

Kromě toho, že jsme do komplexní roviny rozšířili funkci f, potřebujeme holomorfně rozšířit také funkci $x^{\alpha-1}$. Připomeňme, že obecná mocnina je zavedena prostřednictvím logaritmu, u něhož můžeme volit z většího počtu větví. Zde volbu podřídíme volbě integrační dráhy, kterou zvolme nejdříve. Zafixujme velmi malé číslo $\varepsilon \in (0,1)$, velmi velké číslo $R > 1$ a velmi malé číslo $\eta \in (0,\pi)$. Definujme křivky

$$\begin{aligned}
\varphi_{1,R,\varepsilon,\eta}(t) &= t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta} && \text{pro } t \in [\varepsilon, R]\\
\varphi_{2,R,\eta}(t) &= R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} && \text{pro } t \in [\eta, 2\pi-\eta]\\
\varphi_{3,R,\varepsilon,\eta}(t) &= (R-t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta} && \text{pro } t \in [0, R-\varepsilon]\\
\varphi_{4,\varepsilon,\eta}(t) &= \varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi-t)} && \text{pro } t \in [\eta, 2\pi-\eta]
\end{aligned}$$

a $\varphi_{R,\varepsilon,\eta} := \varphi_{1,R,\varepsilon,\eta} \oplus \varphi_{2,R,\eta} \oplus \varphi_{3,R,\varepsilon,\eta} \oplus \varphi_{4,\varepsilon,\eta}$.



Obrázek 20.16: Při výpočtu Mellinovy transformace se využívá křivka, která má kladnou reálnou poloosu ve svém vnějšku.

Větev logaritmu nyní zvolíme tak, aby byla holomorfní na vnitřku zvolené křivky. Volíme proto logaritmus s argumentem probíhajícím interval $(0, 2\pi)$. Tato volba se projeví jak při vyhodnocování dílčích integrálů, tak při počítání reziduí. Zabývejme se nyní integrály přes jednotlivé křivky. Reziduová věta (Věta 20.8.17) nám dává pro všechna ε, η dostatečně malá a R dostatečně velká

$$\int_{\varphi_{R,\varepsilon,\eta}} z^{\alpha-1} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{a_j} z^{\alpha-1} f(z).$$

Dále si povšimněme, že pro R dostatečně velké díky růstové podmínce pro funkci f platí na $\langle\varphi_{2,R,\eta}\rangle$ (první logaritmus je komplexní, ostatní jsou reálné)

$$\begin{aligned}
|z^{\alpha-1} f(z)| &= |f(z)||\mathrm{e}^{(\alpha-1)\log z}| = |f(z)||\mathrm{e}^{(\alpha-1)(\log|z|+\mathrm{i}\arg z)}|\\
&= |f(z)||\mathrm{e}^{(\alpha-1)\log|z|}||\mathrm{e}^{(\alpha-1)\mathrm{i}\arg z}| = |f(z)||\mathrm{e}^{(\alpha-1)\log|z|}|\\
&= |f(z)||z|^{\alpha-1} \le C|z|^{\alpha-2},
\end{aligned}$$

a proto

$$\left|\int_{\varphi_{2,R,\eta}} z^{\alpha-1} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le C|z|^{\alpha-2}\ell_{\varphi_{2,R,\eta}} \le C|z|^{\alpha-1} \overset{R\to+\infty}{\to} 0.$$

Protože f je holomorfní v počátku, je na jeho okolí omezená. Odtud (obecnou mocninu opět odhadujeme jako výše, tedy $|z^{\alpha-1}| \le |z|^{\alpha-1}$)

$$\left|\int_{\varphi_{4,\varepsilon,\eta}} z^{\alpha-1} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le C|z|^{\alpha-1}\ell_{\varphi_{4,\varepsilon,\eta}} \le C|z|^{\alpha} \overset{\varepsilon\to 0_+}{\to} 0,$$

přičemž limita je stejnoměrná vůči $\eta \in (0,1)$. Nyní si uvědomme, že ke každému libovolně malému $\xi \in (0,1)$ existují $R_0 > 0$, $\varepsilon_0 \in (0,1)$ a $\eta_0 \in (0,1)$ taková, že

$$\Big|\int_{\varphi_{1,R,\varepsilon,\eta}} z^{\alpha-1} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_0^\infty x^{\alpha-1} f(x)\,\mathrm{d}x\Big| < \xi$$

pro všechna $R > R_0$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ a $\eta \in (0,\eta_0)$. Skutečně, jednak se totiž prostřednictvím Lebesgueovy věty o majorizované konvergenci (Věta 15.8.17) druhému z integrálů umíme libovolně přiblížit integrály probíhajícími interval (ε, R). Dále třeba na množině $[\varepsilon, R] \times [0,1]$ je integrand stejnoměrně spojitý (na kladné reálné poloose dodefinováváme argument našeho logaritmu jednostrannou limitou, tedy nulou), tudíž vezmeme-li nyní η velmi malé, integrandy pod oběma integrály jsou si libovolně (stejnoměrně) blízké. V prvním integrálu však máme o maličko delší integrační dráhu, což se opět projeví velmi málo díky omezenosti integrandu.

Při práci s integrálem přes křivku $\varphi_{3,R,\varepsilon,\eta}$ pracujeme podobně. Dojde však ke dvěma změnám. Jednak se změní znaménko (díky obrácenému smyslu obíhání). Dále pro η blízké nule je argument logaritmu ve výrazu

$$z^{\alpha-1} = \mathrm{e}^{(\alpha-1)\log z} = \mathrm{e}^{(\alpha-1)(\log|z| + \mathrm{i}\arg z)} = |z|^{\alpha-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-1)\arg z}$$

blízko k hodnotě 2π. To se nakonec projeví multiplikativní konstantou $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-1)2\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\alpha}$.

Celkově jsme dostali

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\alpha}} \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}_{a_j} z^{\alpha-1} f(z).$$

Poznámka 20.9.23. Povšimněte si, že z výpočtu provedeného výše je vidět, že pro obecnou mocninu platí

$$|z^\alpha| = |z|^\alpha$$

bez ohledu na to, z jakého intervalu bereme argument logaritmu.

Příklad 20.9.24. Za pomoci právě představené metody a částečných výsledků spočítejme

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{\beta + x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{kde } \alpha \in (0,1) \text{ a } \beta > 0.$$

Protože funkce $f(z) = \frac{1}{\beta+z}$ má všechny požadované vlastnosti, dostáváme (nezapomeňme, že při výpočtu reziduí používáme výše zavedenou větev logaritmu potažmo obecnou mocninu)

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{\beta+x}\,\mathrm{d}x &= \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\alpha}} \operatorname{Res}_{-\beta} \frac{z^{\alpha-1}}{z+\beta} = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\alpha}}(-\beta)^{\alpha-1} = \frac{2\pi\mathrm{i}\beta^{\alpha-1}\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}(\alpha-1)}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\alpha}} \\ &= \pi\beta^{\alpha-1}\frac{2\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\alpha}} = \frac{\pi\beta^{\alpha-1}}{\sin(\pi\alpha)}.\end{aligned}$$

20.9.8 Integrály typu $\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x$

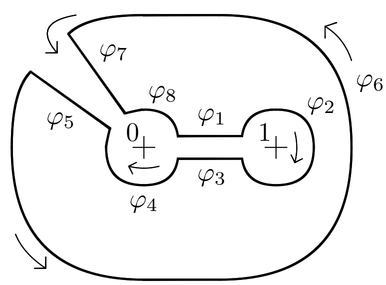
8 Budeme předpokládat, že $\alpha \in (0,1)$ a funkci f můžeme holomorfně prodloužit na $\mathbb{C}$ s výjimkou konečně mnoha bodů $a_1, \dots, a_k$, z nichž žádný neleží na úsečce $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z \in [0,1], \operatorname{Im} z = 0\}$. Navíc předpokládejme, že funkce f má odstranitelnou singularitu v nekonečnu. Zřejmě pak uvažovaný integrál existuje jako Lebesgueův; k tomu jsme samozřejmě nepotřebovali znát chování funkce f kolem nekonečna, to souvisí jen s metodou výpočtu integrálu níže.

Kromě toho, že jsme do komplexní roviny rozšířili funkci f, potřebujeme holomorfně rozšířit také funkci $x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha}$. O to se nám opět postará vhodně zvolená větev logaritmu. Tentokrát bude mít rozšířená funkce $x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha}$ skok na úsečce $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z \in (0,1), \operatorname{Im} z = 0\}$.

Řešení zahájíme volbou integrační dráhy. Zafixujme velmi malé číslo $\varepsilon \in (0,1)$, velmi velké číslo $R > 1$, velmi malé číslo $\eta \in (0,\pi)$ a číslo $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ takové, aby na úsečce $\{t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\colon t \geq 0\}$ neležela žádná singularita (takový paprsek jistě najdeme, neboť bodů se singularitou je jen konečný počet). Definujme křivky

$$
\begin{aligned}
\varphi_{1,\varepsilon,\eta}(t) &= t + \mathrm{i}\varepsilon\sin\eta && \text{pro } t \in [\varepsilon\cos\eta, 1-\varepsilon\cos\eta]\\
\varphi_{2,\varepsilon,\eta}(t) &= 1 + \varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-t)} && \text{pro } t \in [\eta, 2\pi-\eta]\\
\varphi_{3,\varepsilon,\eta}(t) &= 1 - t - \mathrm{i}\varepsilon\sin\eta && \text{pro } t \in [\varepsilon\cos\eta, 1-\varepsilon\cos\eta]\\
\varphi_{4,\varepsilon,\eta;\theta}(t) &= \varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi-t)} && \text{pro } t \in [\eta, 2\pi-\theta-\eta]\\
\varphi_{5,R,\varepsilon,\eta;\theta}(t) &= t\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\eta)} && \text{pro } t \in [\varepsilon, R]\\
\varphi_{6,R,\eta;\theta}(t) &= R\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+\theta)} && \text{pro } t \in [\eta, 2\pi-\eta]\\
\varphi_{7,R,\varepsilon,\eta;\theta}(t) &= (R-t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\eta)} && \text{pro } t \in [0, R-\varepsilon]\\
\varphi_{8,\varepsilon,\eta;\theta}(t) &= \varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi-t)} && \text{pro } t \in [2\pi-\theta+\eta, 2\pi-\eta]
\end{aligned}
$$

a $\varphi_{R,\varepsilon,\eta;\theta} := \varphi_{1,\varepsilon,\eta} \oplus \varphi_{2,\varepsilon,\eta} \oplus \varphi_{3,\varepsilon,\eta} \oplus \varphi_{4,\varepsilon,\eta;\theta} \oplus \varphi_{5,R,\varepsilon,\eta;\theta} \oplus \varphi_{6,R,\eta;\theta} \oplus \varphi_{7,R,\varepsilon,\eta;\theta} \oplus \varphi_{8,\varepsilon,\eta;\theta}$.



Obrázek 20.17: Kladně obíhaná křivka, která má ve svém vnějšku spojnici počátku s bodem $1 + \mathrm{i}0$ (značení křivek je zkráceno).

Zabývejme se nyní rozšířením funkce $x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha}$ na holomorfní funkci. Nejprve si ji přepišme do vhodnějšího tvaru

$$x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha} = \frac{1}{x}\Big(\frac{x}{1-x}\Big)^{\alpha}.$$

Nyní funkci $x \mapsto (\frac{x}{1-x})^\alpha$ rozšíříme na $z \mapsto (\frac{z}{1-z})^\alpha$ prostřednictvím volby vhodné větve komplexního logaritmu. Nejprve si povšimněme, že zobrazení

$$z \mapsto \frac{z}{1-z} = -1 + \frac{1}{1-z}$$

je dobře definované na $\mathbb{C}^*$, je prosté a množinu $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z \in [0,1], \operatorname{Im} z = 0\}$ zobrazuje na množinu $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z \in [0,\infty), \operatorname{Im} z = 0\} \cup \{\infty\}$. Volíme proto logaritmus s argumentem probíhajícím interval $(0, 2\pi)$ a dostáváme tak funkci $\frac{1}{z}(\frac{z}{1-z})^\alpha$, která je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z \in [0,1], \operatorname{Im} z = 0\}$.

Než vyhodnotíme integrály přes jednotlivé křivky, zkusme prostudovat chování argumentu výrazu $(\frac{z}{1-z})^\alpha$ při integraci přes křivky $\varphi_{1,\varepsilon,\eta}$ a $\varphi_{3,\varepsilon,\eta}$. Jednak pro body tvaru $t + \mathrm{i}\delta$, kde $t \in (0,1)$ a $\delta > 0$ je velmi malé číslo, máme

$$\frac{t + \mathrm{i}\delta}{1 - (t + \mathrm{i}\delta)} = \frac{(t + \mathrm{i}\delta)(1 - t + \mathrm{i}\delta)}{|1 - t - \mathrm{i}\delta|^2} = \frac{t - t^2 - \delta^2 + \mathrm{i}\delta}{|1 - t - \mathrm{i}\delta|^2}.$$

Bude-li tedy t odraženo od čísel 0 a 1, postupné zmenšování čísla δ povede k tomu, že argument výrazu $\frac{t+\mathrm{i}\delta}{1-(t+\mathrm{i}\delta)}$ půjde do nuly (výraz $(\frac{z}{1-z})^\alpha$ pak jde stejnoměrně k $(\frac{x}{1-x})^\alpha$).

Naopak pro body tvaru $t - \mathrm{i}\delta$, kde $t \in (0,1)$ a $\delta > 0$ je velmi malé číslo, máme

$$\frac{t - \mathrm{i}\delta}{1 - (t - \mathrm{i}\delta)} = \frac{(t - \mathrm{i}\delta)(1 - t - \mathrm{i}\delta)}{|1 - t + \mathrm{i}\delta|^2} = \frac{t - t^2 - \delta^2 - \mathrm{i}\delta}{|1 - t + \mathrm{i}\delta|^2}.$$

Bude-li tedy t odraženo od čísel 0 a 1, postupné zmenšování čísla δ povede k tomu, že argument výrazu $\frac{t-\mathrm{i}\delta}{1-(t-\mathrm{i}\delta)}$ půjde do hodnoty 2π (výraz $(\frac{z}{1-z})^\alpha$ pak jde stejnoměrně k $(\frac{x}{1-x})^\alpha \mathrm{e}^{2\pi\alpha\mathrm{i}}$).

Nyní již můžeme vyhodnotit integrály přes jednotlivé křivky. Předně, protože bodů $a_1, \dots, a_k$ je jen konečný počet, jsou-li ε, η dostatečně malá a R dostatečně velké, máme

$$\int_{\varphi_{R,\varepsilon,\eta}} \frac{1}{z}\Big(\frac{z}{1-z}\Big)^\alpha f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{a_j} \frac{1}{z}\Big(\frac{z}{1-z}\Big)^\alpha f(z).$$

Dále integrály přes křivky $\varphi_{2,\varepsilon,\eta}$, $\varphi_{4,\varepsilon,\eta;\theta}$ a $\varphi_{8,\varepsilon,\eta;\theta}$ umíme udělat libovolně malé volbou $\varepsilon > 0$. Ukažme si to třeba na prvním ze zmíněných integrálů. Máme

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\varphi_{2,\varepsilon,\eta}} \frac{1}{z}\Big(\frac{z}{1-z}\Big)^\alpha f(z)\,\mathrm{d}z\Big| &\le \ell_{\varphi_{2,\varepsilon,\eta}} \max_{\langle\varphi_{2,\varepsilon,\eta}\rangle} \Big|\frac{1}{z}\Big(\frac{z}{1-z}\Big)^\alpha f(z)\Big| \\ &\le 2\pi\varepsilon \frac{1}{\varepsilon}\Big(\frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}}\Big)^\alpha C \le C\varepsilon^\alpha.\end{aligned}$$

Ještě si uvědomme, že tyto odhady jsou stejnoměrné vůči η a nezávisí na θ. Vyhodnoťme integrál přes křivku $\varphi_{6,R,\eta;\theta}$. Ten umíme učinit libovolně blízký hodnotě $2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\alpha} \lim_{z\to\infty} f(z)$. Skutečně, pro R dost velké je $f(z)$ libovolně (stejnoměrně) blízko k $\lim_{z\to\infty} f(z)$, $\frac{z}{1-z}$ je libovolně (stejnoměrně) blízko k číslu -1 Připomeňme ještě, že jsme α-tou mocninu definovali holomorfně na okolí bodu -1 a platí $(-1)^\alpha = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi})^\alpha$. Navíc využíváme, že

$$\int_{C_R(0)} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}$$

(sice ve skutečnosti neintegrujeme přes celou křivku $C_R(0)$, ale volbou η velice malého se umíme uvedené hodnotě libovolně přiblížit). Proto jsme dostali (znaku konvergence dáváme význam popsaný výše)

$$\int_{\varphi_{6,R,\eta;\theta}} \frac{1}{z}\Big(\frac{z}{1-z}\Big)^\alpha f(z)\,\mathrm{d}z \to 2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\alpha} \lim_{z\to\infty} f(z).$$

Dále integrály přes křivky $\varphi_{5,R,\varepsilon,\eta;\theta}$ a $\varphi_{7,R,\varepsilon,\eta;\theta}$ se s libovolnou přesností vyruší, opět nezávisle na θ. To umíme zařídit pro zafixovaná R a ε postupným zmenšováním čisla η díky stejnoměrné spojitosti integrandu. Tedy

$$\int_{\varphi_{5,R,\varepsilon,\eta;\theta}} \frac{1}{z}\Big(\frac{z}{1-z}\Big)^\alpha f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_{7,R,\varepsilon,\eta;\theta}} \frac{1}{z}\Big(\frac{z}{1-z}\Big)^\alpha f(z)\,\mathrm{d}z \to 0.$$

Připomeňme ještě výsledky získané výše, podle nichž se integrálem přes křivku $\varphi_{1,R,\varepsilon,\eta}$ umíme libovolně přiblížit zadanému integrálu a integrálem přes křivku $\varphi_{3,R,\varepsilon,\eta}$ zase $-\mathrm{e}^{2\pi\alpha\mathrm{i}}$-násobku zadaného integrálu. Tedy

$$\int_{\varphi_{1,\varepsilon,\eta}} \frac{1}{z}\Big(\frac{z}{1-z}\Big)^\alpha f(z)\,\mathrm{d}z \to \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x$$

a

$$\int_{\varphi_{3,\varepsilon,\eta}} \frac{1}{z}\Big(\frac{z}{1-z}\Big)^\alpha f(z)\,\mathrm{d}z \to -\mathrm{e}^{2\pi\alpha\mathrm{i}} \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Celkově máme

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{2\pi\alpha\mathrm{i}}}\Big(\sum_{j=1}^k \operatorname{Res}_{a_j} \frac{1}{z}\Big(\frac{z}{1-z}\Big)^\alpha f(z) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\alpha} \lim_{z\to\infty} f(z)\Big).$$

Příklad 20.9.25. Pro každé $\alpha \in (0,1)$ máme

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{2\pi\alpha\mathrm{i}}}(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\alpha}) = \pi\frac{2\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\pi\alpha\mathrm{i}}-\mathrm{e}^{-\pi\alpha\mathrm{i}}} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.$$

20.9.9 Integrály typu $\int_0^\infty f(x)\log x\,\mathrm{d}x$

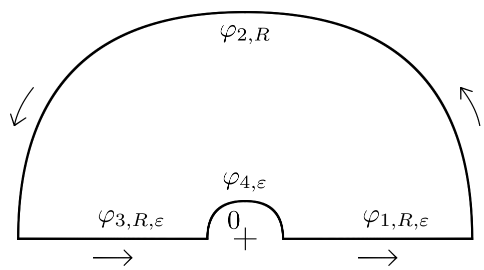
Budeme předpokládat, že funkce f je spojitá na $\mathbb{R}$, sudá na $\mathbb{R}$ a existuje konečný počet bodů $a_1,\dots,a_k \in \{z\in\mathbb{C}\colon\ \operatorname{Im} z > 0\}$ a rozšíření funkce f, které je spojité na $\{z\in\mathbb{C}\colon\ \operatorname{Im} z \ge 0\}\setminus\{a_1,\dots,a_k\}$ a holomorfní na $\{z\in\mathbb{C}\colon\ \operatorname{Im} z > 0\}\setminus\{a_1,\dots,a_k\}$. Nechť navíc platí růstová podmínka

$$\max_{\{z\in\mathbb{C}\colon\ \operatorname{Im} z\ge 0, |z|=R\}} |f(z)| R\log R \overset{R\to+\infty}{\to} 0.$$

Tentokrát budeme pracovat s funkcí logaritmus takovou, že její argument leží v intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ (níže uvidíme, že potřebujeme interval obsahující $[0,\pi]$). Zadefinujme ještě integrační dráhu. Zafixujme velmi malé číslo $\varepsilon \in (0,1)$ a velmi velké číslo $R > 1$. Definujme křivky

$$\begin{aligned}
\varphi_{1,R,\varepsilon}(t) &= t && \text{pro } t \in [\varepsilon, R]\\
\varphi_{2,R}(t) &= R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} && \text{pro } t \in [0, \pi]\\
\varphi_{3,R,\varepsilon}(t) &= t && \text{pro } t \in [-R, -\varepsilon]\\
\varphi_{4,\varepsilon}(t) &= \varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi - t)} && \text{pro } t \in [0, \pi]
\end{aligned}$$

a $\varphi_{R,\varepsilon} := \varphi_{1,R,\varepsilon} \oplus \varphi_{2,R} \oplus \varphi_{3,R,\varepsilon} \oplus \varphi_{4,\varepsilon}$.



Obrázek 20.18: Kladně obíhaná křivka, jejíž obraz leží v uzavřené horní polorovině a při vhodné volbě parametrů má ve svém vnitřku všechny body horní poloroviny se singularitou.

Nyní vyhodnotíme integrály přes jednotlivé křivky. Protože bodů $a_1, \dots, a_k$ je jen konečný počet, je-li ε dostatečně malé a R dostatečně velké, máme

$$\int_{\varphi_{R,\varepsilon}} f(z) \log z \,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{a_j}(f(z)\log z).$$

Dále díky růstové podmínce platí

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{\varphi_{2,R}} f(z)\log z \,\mathrm{d}z\Big| &\le \ell_{\varphi_{2,R}} \max_{\langle \varphi_{2,R,\varepsilon}\rangle} |f(z)\log z|\\
&\le \pi R \max_{\{z\in\mathbb{C}:\ \operatorname{Im} z \ge 0, |z| = R\}} |f(z)| \log R \overset{R\to+\infty}{\to} 0.
\end{aligned}$$

Navíc díky spojitosti funkce f v počátku máme

$$\Big|\int_{\varphi_{4,\varepsilon}} f(z)\log z \,\mathrm{d}z\Big| \le \ell_{\varphi_{4,\varepsilon}} \max_{\langle \varphi_{4,\varepsilon}\rangle} |f(z)\log z| \le \pi\varepsilon C \log\varepsilon \overset{\varepsilon\to 0+}{\to} 0.$$

Dále dostáváme (zvětšováním R a zmenšováním ε se můžeme libovolně přiblížit integrálům na pravých stranách)

$$\int_{\varphi_{1,R,\varepsilon}} f(z)\log z \,\mathrm{d}z \to \int_0^\infty f(x) \log x \,\mathrm{d}x$$

a

$$\int_{\varphi_{3,R,\varepsilon}} f(z)\log z\,\mathrm{d}z \to \int_{-\infty}^{0} f(|x|)(\log|x| + \mathrm{i}\pi)\,\mathrm{d}x.$$

Celkově

$$2\int_0^\infty f(x)\log x\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\pi\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Res}_{a_j}(f(z)\log z).$$

Povšimněte si, že jsme navíc zjistili, čemu se rovná $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$.

Příklad 20.9.26. Spočítejme integrál

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Vidíme, že na množině $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ má funkce $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$ jedinou singularitu a tou je dvojnásobný pól v bodě i. Proto pro výpočet rezidua tentokrát použijeme druhou část první Věty o výpočtu reziduí (Věta 20.9.2) a dostáváme

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{\mathrm{i}}\frac{\log z}{(1+z^2)^2} &= \lim_{z\to\mathrm{i}}\Big(\frac{\log z}{(z+\mathrm{i})^2}\Big)' = \lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{\frac{1}{z}(z+\mathrm{i})^2 - 2(z+\mathrm{i})\log z}{(z+\mathrm{i})^4}\\ &= \frac{\frac{-4}{\mathrm{i}} - 4\mathrm{i}(\mathrm{i}\frac{\pi}{2})}{16} = \frac{\pi}{8} + \frac{\mathrm{i}}{4}.\end{aligned}$$

Díky tomu po dosazení do obecného výsledku dostáváme

$$2\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\pi\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\Big(\frac{\pi}{8} + \frac{\mathrm{i}}{4}\Big) = -\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\frac{\pi^2}{4}.$$

Odtud

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4} \qquad \text{a} \qquad \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

Poznámka 20.9.27. Předchozí integrál dokonce existuje jako Lebesgueův.

20.9.10 Integrály obsahující exponenciálu

Tentokrát čtenáři nenabídneme univerzální postup končící obecným vzorcem, ale pouze mu na příkladu ukážeme myšlenky, které se často hodí v podobných situacích.

Příklad 20.9.28. Pro $a > 0$ spočítejme integrál

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{\sinh x}\,\mathrm{d}x.$$

Nejprve si integrál přepíšeme do vhodnějšího tvaru (přechod k integrálu ve smyslu hlavní hodnoty způsobuje singularita v počátku)

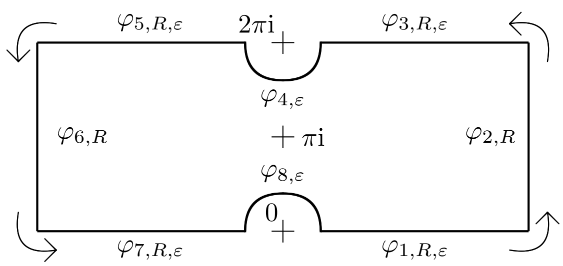
$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{\sinh x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(ax)}{\sinh x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}}{\sinh x}\,\mathrm{d}x.$$

V úlohách našeho typu se dá využít periodicity komplexní exponenciály, díky níž máme $\sinh(z+2\pi\mathrm{i}) = \sinh z$ na $\mathbb{C}$. Tato vlastnost nám přinese jisté výhody při následující volbě integrační dráhy (pokoušíme se obíhat pás $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im} \in (0,2\pi)\}$, dáváme si pozor na kořen jmenovatele v počátku a jeho kopii v bodě $2\pi\mathrm{i}$).

Zafixujme velmi malé číslo $\varepsilon \in (0,1)$ a velmi velké číslo $R > 1$. Definujme křivky

$$\begin{aligned}
\varphi_{1,R,\varepsilon}(t) &= t + \mathrm{i}0 && \text{pro } t \in [\varepsilon, R]\\
\varphi_{2,R}(t) &= R + \mathrm{i}t && \text{pro } t \in [0, 2\pi]\\
\varphi_{3,R,\varepsilon}(t) &= R - t + 2\pi\mathrm{i} && \text{pro } t \in [0, R-\varepsilon]\\
\varphi_{4,\varepsilon}(t) &= 2\pi\mathrm{i} + \varepsilon\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} && \text{pro } t \in [0, \pi]\\
\varphi_{5,R,\varepsilon}(t) &= -t + 2\pi\mathrm{i} && \text{pro } t \in [\varepsilon, R]\\
\varphi_{6,R}(t) &= -R + \mathrm{i}(2\pi - t) && \text{pro } t \in [0, 2\pi]\\
\varphi_{7,R,\varepsilon}(t) &= t + \mathrm{i}0 && \text{pro } t \in [-R, -\varepsilon]\\
\varphi_{8,\varepsilon}(t) &= \varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi - t)} && \text{pro } t \in [0, \pi]
\end{aligned}$$

a $\varphi_{R,\varepsilon} := \varphi_{1,R,\varepsilon} \oplus \varphi_{2,R} \oplus \varphi_{3,R,\varepsilon} \oplus \varphi_{4,\varepsilon} \oplus \varphi_{5,R,\varepsilon} \oplus \varphi_{6,R} \oplus \varphi_{7,R,\varepsilon} \oplus \varphi_{8,\varepsilon}$.



Obrázek 20.19: Kladně obíhaná křivka z příkladu na integrál obsahující exponenciální funkci.

Uvnitř obíhané oblasti se nachází ještě jedna singularita v bodě $\pi\mathrm{i}$, kde má jmenovatel jednonásobný kořen. Proto

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi_{R,\varepsilon}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{\sinh z}\,\mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}_{\pi\mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{\sinh z} = 2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{\sinh' z}\Big|_{z=\pi\mathrm{i}} = 2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{-\pi a}}{\frac{\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}+\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}}}{2}}\\
&= 2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{-\pi a}}{\frac{-1-1}{2}} = -2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\pi a}.
\end{aligned}$$

Dále při integraci přes křivky $\varphi_{4,\varepsilon}$ a $\varphi_{8,\varepsilon}$ použijeme Tvrzení o obíhání části kružnice (Tvrzení 20.9.7). Dostáváme

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi_{4,\varepsilon}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{\sinh z}\,\mathrm{d}z \overset{\varepsilon\to 0+}{\to} -\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}_{2\pi\mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{\sinh z} &= -\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{\sinh' z}\Big|_{z=2\pi\mathrm{i}} = -\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{-2\pi a}}{\frac{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}+\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}}}{2}}\\
&= -\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{-2\pi a}}{\frac{1+1}{2}} = -\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{-2\pi a}
\end{aligned}$$

a

$$\int_{\varphi_{8,\varepsilon}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{\sinh z}\,\mathrm{d}z \overset{\varepsilon\to 0_+}{\to} -\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_0 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{\sinh z} = -\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{\sinh' z}|_{z=0} = -\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^0}{\cosh 0} = -\pi\mathrm{i}.$$

Ještě si povšimněme, že máme

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+}\lim_{R\to\infty}\Big(\int_{\varphi_{1,R,\varepsilon}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{\sinh z}\,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_{7,R,\varepsilon}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{\sinh z}\,\mathrm{d}z\Big) = \text{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}}{\sinh x}\,\mathrm{d}x$$

a

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0_+}\lim_{R\to\infty}\Big(\int_{\varphi_{3,R,\varepsilon}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{\sinh z}\,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_{5,R,\varepsilon}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{\sinh z}\,\mathrm{d}z\Big) &= -\text{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a(x+2\pi\mathrm{i})}}{\sinh x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\mathrm{e}^{-2\pi a}\text{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}}{\sinh x}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Konečně

$$\int_{\varphi_{2,R}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{\sinh z}\,\mathrm{d}z \overset{R\to+\infty}{\to} 0 \qquad \text{a} \qquad \int_{\varphi_{6,R}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{\sinh z}\,\mathrm{d}z \overset{R\to+\infty}{\to} 0,$$

neboť pro $z_1 + \mathrm{i}z_2 \in \mathbb{C}$ splňující $|z_1| = R$ a $z_2 \in [0, 2\pi]$ platí

$$\Big|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{\sinh z}\Big| = 2\frac{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}az_1}\mathrm{e}^{-az_2}|}{|\mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2} - \mathrm{e}^{-z_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_2}|} \le 2\frac{\mathrm{e}^{-az_2}}{||\mathrm{e}^{z_1}| - |\mathrm{e}^{-z_1}||} \le 2\frac{1}{\mathrm{e}^R - \mathrm{e}^{-R}} \overset{R\to+\infty}{\to} 0.$$

Celkově jsme získali

$$\begin{aligned}\text{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}}{\sinh x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2\pi a}}\Big(-2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\pi a} + \pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{-2\pi a} + \pi\mathrm{i}\Big) \\ &= \pi\mathrm{i}\frac{(1-\mathrm{e}^{-\pi a})^2}{(1-\mathrm{e}^{-\pi a})(1+\mathrm{e}^{-\pi a})} = \pi\mathrm{i}\frac{1-\mathrm{e}^{-\pi a}}{1+\mathrm{e}^{-\pi a}} = \pi\mathrm{i}\tanh\Big(\frac{\pi a}{2}\Big).\end{aligned}$$

Proto

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)}{\sinh x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\Big(\pi\mathrm{i}\tanh\Big(\frac{\pi a}{2}\Big)\Big) = \frac{\pi}{2}\tanh\Big(\frac{\pi a}{2}\Big).$$

Příklad 20.9.29. Při výpočtu integrálu v Příkladu 20.4.10 jsme slíbili, že ukážeme příklad demonstrující, že „záměna proměnných“ typu $x = y + \mathrm{i}\alpha$ pro x, y a $\alpha \in \mathbb{R}$ není možná a její použití může (na rozdíl od Příkladu 20.4.10) skutečně vést k nesprávnému výsledku.

Postupem analogickým jako v Příkladu 20.9.28 můžeme spočítat, že

$$\int_{\{\mathrm{Im}\, z=-1\}} \frac{\mathrm{e}^{-z^2}}{z}\,\mathrm{d}z - \int_{\{\mathrm{Im}\, z=1\}} \frac{\mathrm{e}^{-z^2}}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}. \tag{20.9.2}$$

Skutečně, stačí jen využít toho, že $\mathrm{Res}_0 \frac{\mathrm{e}^{-z^2}}{z} = 1$ díky První větě o výpočtu reziduí (Věta 20.9.2) a toho, že pro $\varphi_R = \pm R + \mathrm{i}t$, $t \in [-1, 1]$ je

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\varphi_R} \frac{\mathrm{e}^{-z^2}}{z}\,\mathrm{d}z = 0.$$

Na druhou stranu, pokud píšeme

$$\int_{\{\operatorname{Im} z=-1\}} \frac{\mathrm{e}^{-z^2}}{z}\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(x-i)^2}}{x-i}\,\mathrm{d}x,$$

nesmíme použít záměnu proměnných $x = y+2\mathrm{i}$. Pak by totiž výše uvedený integrál přešel na

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(y+i)^2}}{y+i}\,\mathrm{d}y = \int_{\{\operatorname{Im} z=1\}} \frac{\mathrm{e}^{-z^2}}{z}\,\mathrm{d}z,$$

což by vedlo k

$$\int_{\{\operatorname{Im} z=-1\}} \frac{\mathrm{e}^{-z^2}}{z}\,\mathrm{d}z = \int_{\{\operatorname{Im} z=1\}} \frac{\mathrm{e}^{-z^2}}{z}\,\mathrm{d}z.$$

To je ale zjevně ve sporu s (20.9.2).

20.10 Analytické prodloužení, Γ-funkce

Při aplikacích Reziduové věty (Věta 20.8.17) jsme často naráželi na situaci, kdy jsme měli zadanou funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a potřebovali ji prodloužit na funkci $\widetilde{f}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, která je holomorfní na požadované množině. Zatím nám jisté informace o této problematice poskytuje druhá část Věty o harmoničnosti složek holomorfní funkce (Věta 20.2.14) a také Věta o jednoznačnosti (Věta 20.7.2), která nám dává jednoznačnost holomorfního prodloužení z množiny s hromadným bodem. Jiným typem úloh může být situace, kdy máme zadánu holomorfní funkci na nějaké otevřené množině a ptáme se, jestli můžeme (a jak) prodloužit tuto funkci na větší množinu popřípadě na celou komplexní rovinu tak, aby výsledná funkce byla holomorfní na zmíněné větší množině. Zde si ukážeme, jak se dají holomorfní prodloužení konstruovat, pokud se nám již podařilo získat prodloužení na vhodnou část komplexní roviny. V dalším budeme často používat značení

$$\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im} z > 0\} \qquad \text{a} \qquad \mathbb{C}^- := \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im} z < 0\}.$$

Lemma 20.10.1 (O holomorfním napojení). *Nechť $\Omega_1 \subset \mathbb{C}^+$ a $\Omega_2 \subset \mathbb{C}^-$ jsou neprázdné otevřené množiny. Nechť $\widetilde{M} \subset \mathbb{R}$ je otevřená množina a pro množinu $M := \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z \in \widetilde{M}, \operatorname{Im} z = 0\}$ platí*

$$\overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2 = \overline{M}$$

a pro každé $t \in \widetilde{M}$ existuje číslo $r(t) > 0$ takové, že kruh $B_{r(t)}(t + \mathrm{i}0)$ splňuje

$$B_{r(t)}(t + \mathrm{i}0) \subset \Omega_1 \cup M \cup \Omega_2.$$

Nechť funkce $f_1, f_2\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ splňují

f_j jsou holomorfní na Ω_j a spojité na $\Omega_j \cup M$ vzhledem k $\Omega_j \cup M$ pro $j \in \{1, 2\}$

a platí $f_1 = f_2$ na M. Pak množina $\Omega_1 \cup M \cup \Omega_2$ je otevřená a funkce

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \textit{pro } z \in \Omega_1 \cup M \\ f_2(z) & \textit{pro } z \in \Omega_2 \end{cases}$$

je holomorfní na $\Omega_1 \cup M \cup \Omega_2$.

Důkaz. Otevřenost množiny $\Omega := \Omega_1 \cup M \cup \Omega_2$ plyne snadno z definice. Zabývejme se otázkou holomorfnosti funkce f. Potřebujeme dokázat existenci f' v každém bodě množiny M. Zafixujme libovolné $z_0 \in M$. Zvolme $r > 0$ tak malé, aby

$$B_r(z_0) \subset \Omega_1 \cup M \cup \Omega_2$$

a definujme pomocnou funkci

$$F(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{w - z} \,\mathrm{d}w \qquad \text{pro } z \in B_r(z_0).$$

Stejně jako v důkazu Cauchyova vzorce (Věta 20.5.1; do podílu $\frac{F(z_0+h)-F(z_0)}{h}$ dosadíme definiční vztah pro F a pak odhadneme $\frac{1}{(w-z)(w-(z+h))} - \frac{1}{(w-z)^2}$) dostaneme, že na $B_r(z_0)$ existuje F' a platí pro ni

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z)^2} \,\mathrm{d}w \qquad \text{pro } z \in B_r(z_0).$$

Speciálně F je holomorfní na $B_r(z_0)$. Dalším krokem je důkaz, že $F = f_1$ na $B_r(z_0) \cap \mathbb{C}^+$. Zvolme $z \in B_r(z_0) \cap \mathbb{C}^+$ a položme

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= z_0 + t && \text{pro } t \in [-r, r] \\ \varphi_2(t) &= z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} && \text{pro } t \in [0, \pi] \\ \varphi_3(t) &= z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} && \text{pro } t \in [\pi, 2\pi] \\ \varphi_4(t) &= z_0 - t && \text{pro } t \in [-r, r]. \end{aligned}$$

Pak

$$C_r(z_0) = \varphi_2 \oplus \varphi_3,$$

ale také

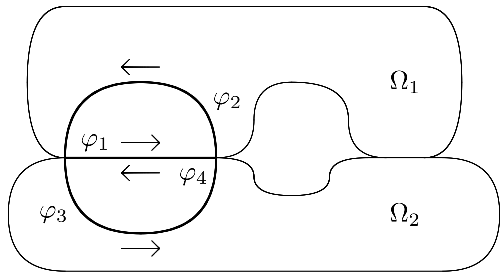
$$C_r(z_0) = (\varphi_1 \oplus \varphi_2) \oplus (\varphi_3 \oplus \varphi_4),$$

přičemž $\varphi_1 \oplus \varphi_2$ a $\varphi_3 \oplus \varphi_4$ jsou Jordanovy křivky. Povšimněme si, že podle Cauchyova vzorce (Věta 20.5.1) máme

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\varphi_1 \oplus \varphi_2} \frac{f(w)}{w - z} \,\mathrm{d}w,$$

podle první verze Cauchyovy věty (Věta 20.4.3) platí (připomeňme, že $z \in \operatorname{Ext} \varphi_3 \oplus \varphi_4$)

$$0 = \int_{\varphi_3 \oplus \varphi_4} \frac{f(w)}{w - z} \,\mathrm{d}w$$



Obrázek 20.20: Konstrukce k převedení integrálu přes kružnici na dva integrály přes půlkružnice.

a zřejmě

$$\int_{\varphi_1} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w + \int_{\varphi_4} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = 0.$$

Proto celkově máme

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\varphi_2 \oplus \varphi_3} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus \varphi_3 \oplus \varphi_4} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\varphi_1 \oplus \varphi_2} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\varphi_3 \oplus \varphi_4} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = f_1(z). \end{aligned}$$

Analogicky se dokáže $F = f_2$ na $B_r(z_0) \cap \mathbb{C}^-$. Díky spojitosti F a f dostáváme $f = F$ na $B_r(z_0)$, a proto je f holomorfní na $B_r(z_0)$. Protože $z_0 \in M$ bylo libovolné, jsme hotovi. $\square$

Poznámka 20.10.2. Lemma zřejmě platí i když množiny napojujeme na přímce, která je posunutá ve směru imaginární osy. Uvedená přímka ani nemusí být vodorovná. Dokonce se dá pracovat i s některými obecnějšími křivkami, my ale takový výsledek nebudeme potřebovat.

Věta 20.10.3 (Schwarzův princip zrcadlení)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}^+$ je oblast, neprázdný interval $(a, b) \subset \mathbb{R}$ splňuje*

$$L := \{z \in \mathbb{C}\colon\ \operatorname{Re} z \in (a, b), \operatorname{Im} z = 0\} \subset \partial\Omega$$

a pro každé $z \in L$ existuje $r > 0$ takové, že $B_r(z) \cap \mathbb{C}^+ \subset \Omega$. Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na Ω, spojitá na $\Omega \cup L$ vzhledem k $\Omega \cup L$ a f je reálná na L. Pak funkce

$$\widetilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{pro } z \in \Omega \cup L \\ \overline{f(\overline{z})} & \text{pro } z \in \{w \in \mathbb{C}^-\colon \overline{w} \in \Omega\} =: \Omega^* \end{cases}$$

je holomorfní na $\Omega \cup L \cup \Omega^*$.

Důkaz. Důkaz bude založen na předchozím lemmatu. Potřebujeme proto dokázat, že $\widetilde{f}$ je holomorfní na Ω^* a spojitá na $L \cup \Omega^*$. Holomorfnost na Ω^* plyne z toho, že pokud zafixujeme $z_0 \in \Omega^*$, pak pro každé $z \in \Omega^* \setminus \{z_0\}$ máme

$$\begin{aligned}\frac{\widetilde{f}(z)-\widetilde{f}(z_0)}{z-z_0} &= \frac{\overline{f(\overline{z})}-\overline{f(\overline{z}_0)}}{z-z_0} = \frac{\overline{f(\overline{z})-f(\overline{z}_0)}}{z-z_0} = \overline{\Big(\frac{f(\overline{z})-f(\overline{z}_0)}{\overline{z-z_0}}\Big)} \\ &= \overline{\Big(\frac{f(\overline{z})-f(\overline{z}_0)}{\overline{z}-\overline{z}_0}\Big)} \overset{z\to z_0}{\to} \overline{f'(\overline{z}_0)}.\end{aligned}$$

Proto je $\widetilde{f}$ holomorfní (a tedy i spojitá) na Ω^*. Zbývá ukázat spojitost na L. Podle předpokladu pro každé $z_0 \in L$ a $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$z \in B_\delta(z_0) \cap (\mathbb{C}^+ \cup L) \qquad \Longrightarrow \qquad |\widetilde{f}(z)-\widetilde{f}(z_0)| = |f(z)-f(z_0)| < \varepsilon.$$

Pokud naopak máme $z \in B_\delta(z_0) \cap \mathbb{C}^-$, pak $\overline{z} \in B_\delta(z_0) \cap \mathbb{C}^+$, a proto z informací uvedených výše a z předpokladu o reálnosti f na L dostáváme

$$|\widetilde{f}(z)-\widetilde{f}(z_0)| = |\overline{f}(\overline{z})-\overline{f}(\overline{z}_0)| = |\overline{f(\overline{z})-f(\overline{z}_0)}| = |f(\overline{z})-f(\overline{z}_0)| = |f(\overline{z})-f(z_0)| < \varepsilon.$$

Tím je důkaz dokončen. □

Nyní se budeme zabývat holomorfním rozšířením Eulerovy Γ-funkce. Připomeňme, že jsme ji zadefinovali na $(0,\infty)$ jako

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

Jedná se o $C^\infty((0,\infty))$-funkci a na $(0,\infty)$ splňuje $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Protože platí

$$|t^z| = |\mathrm{e}^{\log t \operatorname{Re} z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\log t \operatorname{Im} z}| = t^{\operatorname{Re} z} \qquad \text{pro } t > 0 \text{ a } z \in \mathbb{C},$$

má dobrý smysl (níže uvedený integrál konverguje) vzorec

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{z-1}\,\mathrm{d}t \qquad \text{kdykoliv } \operatorname{Re} z > 0. \tag{20.10.1}$$

Můžeme však dosáhnout ještě většího definičního oboru holomorfního prodloužení.

Věta 20.10.4 (O holomorfním prodloužení Γ-funkce)**.** (i) *Funkce* Γ *zavedená pomocí vzorce* (20.10.1) *je holomorfní na množině* $\Omega = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z > 0\}$.
(ii) *Pro každé* $z \in \Omega$ *platí* $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
(iii) Γ*-funkci je možné holomorfně rozšířit na* $\mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,-3,\dots\}$ *vzorcem*

$$\Gamma(z) := \frac{\Gamma(z+k)}{(z+k-1)(z+k-2)\dots z}$$
$$\textit{pro všechna } k \in \mathbb{N} \textit{ a } z \in \{w \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} w \in (-k,-k+1], w \neq -k+1\}.$$

(iv) *Holomorfní rozšíření z části* (iii) *má v bodech* $0,-1,-2,\dots$ *jednonásobné póly a platí*

$$\operatorname{Res}_m \Gamma = \frac{(-1)^m}{(-m)!} \qquad \textit{pro všechna } m \in \{0,-1,-2,\dots\}.$$

Důkaz. Důkaz první části založíme na Větě o holomorfnosti integrálu závislého na parametru (Věta 20.8.15). Ta se však dá používat jen při integraci přes omezené intervaly. Proto pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme pomocnou funkci

$$\gamma_n(z) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \mathrm{e}^{-t} t^{z-1}\,\mathrm{d}t \qquad \text{kdykoliv } \operatorname{Re} z > 0.$$

Podle citované věty se jedná o holomorfní funkce. Dále máme

$$\begin{aligned} |\gamma_n(z) - \Gamma(z)| &= \Big| \int_0^{\frac{1}{n}} \mathrm{e}^{-t} t^{z-1}\,\mathrm{d}t + \int_n^{\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{z-1}\,\mathrm{d}t \Big| \\ &\le \int_0^{\frac{1}{n}} |\mathrm{e}^{-t} t^{z-1}|\,\mathrm{d}t + \int_n^{\infty} |\mathrm{e}^{-t} t^{z-1}|\,\mathrm{d}t \\ &\le \int_0^{\frac{1}{n}} t^{\operatorname{Re} z-1}\,\mathrm{d}t + \int_n^{\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{\operatorname{Re} z-1}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Proto je Γ na všech množinách tvaru $\{z \in \mathbb{C} \colon \delta < \operatorname{Re} z < M\}$ stejnoměrnou limitou posloupnosti holomorfních funkcí. První Weierstrassova věta (Věta 20.6.1) nám díky tomu dává holomorfnost funkce Γ na množině $\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z > 0\}$.

Dokažme druhou část. Zadefinujme pomocnou funkci

$$h(z) = \Gamma(z+1) - z\Gamma(z) \qquad \text{pro } \operatorname{Re} z > 0.$$

Tato funkce je pak holomorfní na $\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z > 0\}$ a navíc je nulová na množině $\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z = 0\}$. Podle Věty o jednoznačnosti (Věta 20.7.2) pak dostáváme, že $h \equiv 0$ na $\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z > 0\}$, což jsme chtěli ukázat.

Zabývejme se třetí částí. Funkce $\frac{\Gamma(z+1)}{z}$ je holomorfní na $\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z > -1\} \setminus \{0\}$. Zároveň na $\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z > 0\}$ platí $\frac{\Gamma(z+1)}{z} = \Gamma(z)$. Výše jsme tedy zkonstruovali holomorfní rozšíření Γ-funkce na množinu $\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z > -1\} \setminus \{0\}$, které má v počátku jednonásobný pól. Ve druhém kroku použijeme rovnost

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\frac{\Gamma(z+2)}{z+1}}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{(z+1)z}$$

k holomorfnímu rozšíření na množinu $\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z > -2\} \setminus \{0, -1\}$. Pokračujeme indukcí.

Poslední tvrzení plyne ze čtvrté části První věty o výpočtu reziduí (Věta 20.9.2), neboť při zadaném $m \in \{0, -1, -2, \dots\}$ můžeme pracovat s částečným rozšířením

$$\frac{\Gamma(z+|m|+1)}{(z+|m|)(z+|m|-1)\dots z} \quad \text{na množině } \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im} z > m-1\} \setminus \{0, -1, \dots, m\}.$$

Pro něj máme

$$\operatorname{Res}_m \frac{\Gamma(z+|m|+1)}{(z+|m|)(z+|m|-1)\dots z} = \operatorname{Res}_m \frac{\frac{\Gamma(z+|m|+1)}{(z+|m|-1)\dots z}}{z+|m|} = \frac{\frac{\Gamma(1)}{(-1)(-2)\dots m}}{1} = \frac{(-1)^m}{(-m)!}.$$

□

Věta 20.10.5 (O asymptotickém chování Γ-funkce)**.** *Pro $s > 0$ platí*

$$\Gamma(s) = \Big(\frac{s}{\mathrm{e}}\Big)^s \frac{1}{s}\sqrt{2\pi s}\Big(1 + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{\sqrt{s}}\Big)\Big) \qquad \textit{pro } s \to \infty.$$

Důkaz. Nejprve si přepišme za použití substituce $t = y\sqrt{s} + s$

$$\begin{aligned} s\Gamma(s) = \Gamma(s+1) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^s \,\mathrm{d}t = \int_{-\sqrt{s}}^\infty \mathrm{e}^{-y\sqrt{s}-s}(y\sqrt{s}+s)^s \sqrt{s}\,\mathrm{d}y \\ &= \sqrt{s}\Big(\frac{s}{\mathrm{e}}\Big)^s \int_{-\sqrt{s}}^\infty \mathrm{e}^{-y\sqrt{s}}\Big(1 + \frac{y}{\sqrt{s}}\Big)^s \,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Ve zbytku důkazu ukážeme, že funkce

$$\Phi_s(y) := \chi_{(-\sqrt{s},\infty)} \mathrm{e}^{-y\sqrt{s}}\Big(1 + \frac{y}{\sqrt{s}}\Big)^s$$

bodově konvergují k funkci $\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}$, přesněji

$$\Phi_s(y) \overset{s\to\infty}{\to} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} \qquad \text{pro všechna } y \in \mathbb{R},$$

a pro všechna $s \geq 1$ platí

$$\Phi_s(y) \leq h(y) := \begin{cases} \mathrm{e}^{-y}(1+y) & \text{pro } y \geq 0 \\ \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} & \text{pro } y < 0. \end{cases}$$

Pak totiž kombinací Lebesgueovy věty o majorizované konvergenci (Věta 15.8.17) a Heineho věty (Věta 5.4.1) získáváme

$$\frac{s\Gamma(s)}{\sqrt{s}(\frac{s}{\mathrm{e}})^s} = \int_{-\infty}^\infty \Phi_s(y)\,\mathrm{d}y \overset{s\to\infty}{\to} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y = \sqrt{2\pi},$$

což je dokazovaný výsledek věty.

Bodová konvergence

$$\mathrm{e}^{-y\sqrt{s}}\Big(1 + \frac{y}{\sqrt{s}}\Big)^s = \mathrm{e}^{-y\sqrt{s} + s\log(1+\frac{y}{\sqrt{s}})} \overset{s\to\infty}{\to} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}$$

se snadno ověří Taylorovým rozvojem výrazu $\log(1 + \frac{y}{\sqrt{s}})$.

Zbývá ukázat, že funkce h shora odhaduje Φ_s pro všechna $s \geq 1$. K tomu nám stačí dokázat, že zobrazení

$$h_y : s \mapsto -y\sqrt{s} + s\log\Big(1 + \frac{y}{\sqrt{s}}\Big)$$

je nerostoucí na $[1,\infty)$ pro všechna $y \geq 0$ a neklesající na $(\max\{1, y^2\}, \infty)$ pro všechna $y < 0$.

Máme

$$h_y'(s) = -\frac{y}{2\sqrt{s}} + \log\Big(1+\frac{y}{\sqrt{s}}\Big) - \frac{s}{1+\frac{y}{\sqrt{s}}}\frac{y}{2s\sqrt{s}} = \log\Big(1+\frac{y}{\sqrt{s}}\Big) - \frac{\frac{y}{2\sqrt{s}}}{1+\frac{y}{\sqrt{s}}} - \frac{y}{2\sqrt{s}}.$$

Definujme pomocnou funkci

$$g(u) := \log(1+u) - \frac{\frac{u}{2}}{1+u} - \frac{u}{2} = \log(1+u) - \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{1+u} - \frac{u}{2}.$$

Pro ni platí na $(-1,\infty)$

$$g'(u) = \frac{1}{1+u} - \frac{\frac{1}{2}}{(1+u)^2} - \frac{1}{2} = \frac{1+u}{(1+u)^2} - \frac{\frac{1}{2}}{(1+u)^2} - \frac{\frac{1}{2}(1+u^2)}{(1+u)^2} = -\frac{\frac{1}{2}u^2}{(1+u)^2}.$$

Díky této rovnosti a vlastnosti $g(0)=0$ dostáváme

$$g \geq 0 \quad \text{na } (-1,0] \qquad \text{a} \qquad g \leq 0 \quad \text{na } [0,\infty).$$

Proto

$$h_y'(s) \geq 0 \qquad \text{pro všechna } y<0 \text{ a } s > \max\{1, y^2\}$$

a

$$h_y'(s) \leq 0 \qquad \text{pro všechna } y \geq 0 \text{ a } s \geq 1.$$

Tím je důkaz dokončen. □

Poznámka 20.10.6. (i) Protože pro $n \in \mathbb{N}$ platí $n! = n\Gamma(n)$, z předchozí věty plyne rovnost

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(\frac{n}{\mathrm{e}})^n\sqrt{2\pi n}} = 1,$$

které se říká *Stirlingova formule*.

(ii) Tvrzení předchozí věty platí dokonce v zesílené formě

$$\Gamma(s) = \mathrm{e}^{s\log s}\mathrm{e}^{-s}\frac{\sqrt{2\pi}}{s^{\frac{1}{2}}}\Big(1 + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{|s|^{\frac{1}{2}}}\Big)\Big) \qquad \text{pro } s\to\infty,$$

kde $s \in \{z \in \mathbb{C}\colon\ |\arg z| \leq \pi - \delta\}$ pro nějaké $0<\delta<\pi$. Důkaz je možno nalézt v [StSa AnII, Theorem A.2.3].

20.10.1 Konformní zobrazení, globální Cauchyova věta

V oddíle věnovaném Větě o regulárním zobrazení (Sekce 12.8) jsme viděli, že přechod k jinému souřadnému systému (kupříkladu od kartézských souřadnic k polárním) nám může pomoci vyřešit parciální diferenciální rovnici. Tyto transformace byly reprezentovány zobrazeními z $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}^N$, u nichž jsme potřebovali, aby byla dostatečně hladká, invertovatelná a aby i inverze byla dostatečně hladká. I v komplexní rovině se podobné transformace studují. Jako výhodná vlastnost se zde ukazuje, když použité zobrazení alespoň lokálně zachovává úhly. Taková zobrazení se nazývají *konformní zobrazení* a sehrála významnou úlohu v historii řešení Laplaceovy rovnice.

Definice 20.10.7 (Konformní zobrazení)**.** Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a $\Omega \subset \mathbb{C}$. Řekneme, že funkce f je *konformní* na Ω, jestliže je holomorfní na Ω a prostá na Ω.

Dá se ukázat (například [Ru, Věta 10.33]), že konformní zobrazení má nenulovou derivaci všude na Ω.

Nenulovost derivace má za následek, že konformní zobrazení zachovává úhly mezi křivkami. Je-li totiž $z_0 \in \Omega$ a $(\varphi, [a, b])$ regulární C^1-křivka splňující

$$a < 0 < b \qquad \text{a} \qquad \varphi(0) = z_0,$$

pak pro „jednotkový tečný vektor“ φ v bodě z_0 máme vztah

$$\tau_\varphi = \lim_{t\to 0_+} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{|\varphi(t) - \varphi(0)|},$$

neboť

$$\frac{\varphi'(0)}{|\varphi'(0)|} = \frac{\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t-0}}{\lim_{t\to 0} |\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t-0}|} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t-0}}{|\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t-0}|} = \lim_{t\to 0_+} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{|\varphi(t) - \varphi(0)|},$$

kde jsme použili, že příslušné limity existují a jsou nenulové. Díky holomorfnosti f v bodě z_0 můžeme psát na jistém okolí bodu z_0

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots,$$

kde $a_0 = f(z_0)$, $a_1 = f'(z_0) \neq 0$ a konvergence řady na pravé straně je stejnoměrná. Odtud (opět používáme, že příslušné limity existují a jsou nenulové)

$$\begin{aligned}\tau_{f(\varphi)} &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\varphi(t)) - f(\varphi(0))}{|f(\varphi(t)) - f(\varphi(0))|} = \lim_{t\to 0} \frac{a_1(\varphi(t) - \varphi(0)) + a_2(\varphi(t) - \varphi(0))^2 + \dots}{|a_1(\varphi(t) - \varphi(0)) + a_2(\varphi(t) - \varphi(0))^2 + \dots|}\\ &= \frac{a_1}{|a_1|}\tau_\varphi.\end{aligned}$$

Odtud vidíme, že funkce f převádí každou křivku na křivku, jejíž „jednotkový tečný vektor“ v bodě $f(z_0)$ je $\frac{a_1}{|a_1|}$-násobkem původního „jednotkového tečného vektoru“. U všech takových křivek proto dochází k rotaci tohoto vektoru o stejný úhel reprezentovaný číslem $\frac{a_1}{|a_1|}$ (s jednotkovou velikostí).

Jedním z hlavních výsledků teorie konformních zobrazení je následující tvrzení (důkaz je například v [Ru, Věta 14.8])

Věta 20.10.8 (Riemannova věta)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast a $\Omega \neq \mathbb{C}$. Pak existuje konformní zobrazení množiny Ω na $B_1(0)$.*

Poznámka 20.10.9. Z Liouvilleovy věty (Věta 20.5.11) je okamžitě vidět, že nemůžeme konformně zobrazit $\mathbb{C}$ na $B_1(0)$.

Poznámka 20.10.10. Inverze ke konformnímu zobrazení je opět konformní (díky Větě o derivaci inverzního zobrazení, tedy Větě 20.2.7). Je proto možné konformě převádět libovolné dvě jednoduše souvislé oblasti, které jsou vlastními podmnožinami $\mathbb{C}$, na sebe.

Na závěr se budeme věnovat zobecněním Cauchyovy věty (Věta 20.4.5) a Reziduové věty (Věta 20.8.17) pro případ, kdy nepracujeme s jednoduchou křivkou (některé body budeme obíhat vícekrát). Nejprve si zavedeme několik nových pojmů.

Definice 20.10.11 (Index bodu vzhledem ke křivce)**.** Nechť $a \in \mathbb{C}$, φ je uzavřená po částech C^1-křivka v $\mathbb{C}$ a $a \notin \langle\varphi\rangle$. *Index bodu a vzhledem ke křivce* φ je definován předpisem

$$\operatorname{Ind}_\varphi a := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{z-a}.$$

Nyní si uvedeme základní vlastnosti našeho nového pojmu.

Věta 20.10.12 (O vlastnostech indexu bodu vzhledem ke křivce)**.** *Nechť φ je uzavřená po částech C^1-křivka v $\mathbb{C}$.*
(i) *Pro všechna $a \in \mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$ je* $\operatorname{Ind}_\varphi a$ *definován a roven celému číslu.*
(ii) *Funkce $z \mapsto$* $\operatorname{Ind}_\varphi z$ *je konstantní na každé oblasti obsažené v $\mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$.*
(iii) *Existuje neomezená oblast obsažená v $\mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$, na níž je* $\operatorname{Ind}_\varphi$ *roven nule.*

Důkaz. Dokažme první tvrzení. Nechť $[\alpha,\beta]$ značí definiční obor křivky φ. Definujme pomocnou funkci

$$\psi(t) := \int_\alpha^t \frac{1}{\varphi(s)-a}\varphi'(s)\,\mathrm{d}s \qquad \text{pro } t \in [\alpha,\beta].$$

Zaveďme ještě funkci

$$\eta(t) := \mathrm{e}^{\psi(t)} \qquad \text{pro } t \in [\alpha,\beta].$$

Pak pro všechna $t \in [\alpha,\beta]$, kde existuje $\varphi'(t)$, máme

$$\eta'(t) = \mathrm{e}^{\psi(t)}\psi'(t) = \eta(t)\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)-a}.$$

Díky tomu platí

$$\Big(\frac{\eta(t)}{\varphi(t)-a}\Big)' = \frac{\eta'(t)(\varphi(t)-a)-\eta(t)\varphi'(t)}{(\varphi(t)-a)^2} = \frac{\eta(t)\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)-a}(\varphi(t)-a)-\eta(t)\varphi'(t)}{(\varphi(t)-a)^2} = 0.$$

Proto (φ je po částech C^1-křivka; na hladkých částech křivky použijeme jednoznačnost primitivní funkce, pro napojení spojitost; jde o stejný princip, který jsme používali při důkazu jednoznačnosti zobecněné primitivní funkce u Newtonova integrálu) existuje $K \in \mathbb{C}$ takové, že

$$\eta(t) = K(\varphi(t)-a) \qquad \text{pro všechna } t \in [\alpha,\beta].$$

Speciálně uzavřenost křivky φ dává

$$\mathrm{e}^{\psi(\alpha)} = \eta(\alpha) = K(\varphi(\alpha)-a) = K(\varphi(\beta)-a) = \eta(\beta) = \mathrm{e}^{\psi(\beta)}.$$

Proto existuje $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $\psi(\alpha) = \psi(\beta) + 2k\pi\mathrm{i}$. Odtud

$$\operatorname{Ind}_\varphi a := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\alpha^\beta \frac{1}{\varphi(t) - a} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\psi(\beta) - \psi(\alpha)}{2\pi\mathrm{i}} = k.$$

Tím jsme dokázali první tvrzení.

Dokažme druhé tvrzení. Nejprve si povšimněme, že funkce $a \mapsto \operatorname{Ind}_\varphi a$ je spojitá na $\mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$. Skutečně, máme totiž

$$\operatorname{Ind}_\varphi a - \operatorname{Ind}_\varphi b = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\varphi \Big(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b} \Big)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\varphi \frac{b-a}{(z-a)(z-b)}\,\mathrm{d}z.$$

Délka integrační dráhy je konečná, při zafixovaném a je výraz $|z-a|$ odražený od nuly ($\langle\varphi\rangle$ je kompaktní) a pro b dostatečně blízké číslu a je výraz $|b-a|$ libovolně malý a výraz $|z-b|$ odražený od nuly.

Nyní již jen stačí spojit libovolnou dvojici bodů ležících v téže souvislé podmnožině množiny $\mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$ vhodnou lomenou čarou. Každý bod má na této čáře okolí, kde je index konstantní (je spojitý a nabývá pouze celých hodnot), a nakonec použít Borelovu pokrývací větu (Věta 11.7.3).

Dokažme třetí část. Protože $\langle\varphi\rangle$ je kompaktní, existuje $R > 0$ takové, že $\langle\varphi\rangle \subset B_R(0)$. Položme $a := -R$. Pak funkce $z \mapsto \frac{1}{z+R}$ je holomorfní na $\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z > -R\}$, proto zde má primitivní funkci a odtud $\operatorname{Ind}_\varphi(-R) = 0$. Díky druhé části musí být index nulový přinejmenším na množině $\mathbb{C} \setminus B_R(0)$. □

Definice 20.10.13 (Cyklus)**.** Nechť $m \in \mathbb{N}$ a $(\varphi_j, [a_j, b_j])$ jsou uzavřené po částech C^1-křivky v $\mathbb{C}$. Pak objekt $\Gamma := (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$ se nazývá *cyklus*. Pro cyklus zavádíme

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \sum_{j=1}^m \int_{\varphi_j} f(z)\,\mathrm{d}z, \qquad \operatorname{Ind}_\Gamma a := \sum_{j=1}^m \operatorname{Ind}_{\varphi_j} a \qquad \text{a} \qquad \langle\Gamma\rangle := \bigcup_{j=1}^m \langle\varphi_j\rangle,$$

mají-li pravé strany definičních vztahů smysl.

Věta 20.10.14 (Globální Cauchyova a reziduová věta)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast, $\Gamma = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ je cyklus takový, že $\langle\Gamma\rangle \subset \Omega$, a $\operatorname{Ind}_\Gamma a = 0$ pro všechna $a \notin \Omega$. Pak*

(i) *(Cauchyova věta) Pro každou funkci $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfní na Ω platí*

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

(ii) *(Cauchyův vzorec) Pro každou funkci $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfní na Ω a každý bod $w \in \Omega \setminus \langle\Gamma\rangle$ platí*

$$f(w) \operatorname{Ind}_\Gamma w = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z.$$

(ii) *(Reziduová věta) Nechť $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na množině $\Omega \setminus A$, kde $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset \Omega$ je konečná, a $A \cap \langle\Gamma\rangle = \emptyset$. Pak*

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{k=1}^n (\operatorname{Res}_{a_k} f \operatorname{Ind}_\Gamma a_k).$$

Důkaz. Nejprve dokážeme druhou část věty. Předpokládejme, že f je holomorfní na Ω. Položme

$$g(z,w) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} & \text{pro } z \neq w \\ f'(z) & \text{pro } z = w. \end{cases}$$

Pak je g spojitá na $\Omega\times\Omega$. Díky tomu, že g je stejnoměrně spojitá na kompaktních podmnožinách množiny $\Omega \times \Omega$, můžeme ještě položit

$$h(w) := \int_\Gamma g(z,w)\,\mathrm{d}z \qquad \text{pro } w \in \Omega$$

a dostáváme spojitou funkci na Ω.

Nechť nyní ψ je libovolná Jordanova po částech C^1-křivka v Ω taková, že $\operatorname{Int}\psi \subset \Omega$. Pak

$$\int_\psi h(w)\,\mathrm{d}w = \int_\psi \int_\Gamma g(z,w)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}w = \int_\Gamma \int_\psi g(z,w)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}z = 0,$$

neboť $z \mapsto g(z,w)$ je holomorfní funkce na Ω (díky Větě o charakterizaci odstranitelné singularity, tedy Větě 20.8.3).

Proto integrál z funkce h nezávisí na cestě v Ω. Odtud podle Morerovy věty (Věta 20.5.9) je funkce h holomorfní na Ω.

Označme ještě

$$\Omega_1 := \{z \in \mathbb{C}\colon\ \operatorname{Ind}_\Gamma z = 0\}.$$

Pak $\mathbb{C}\setminus\Omega \subset \Omega_1$ (podle jednoho z předpokladů věty). Navíc $\langle\Gamma\rangle \cap \Omega_1 = \emptyset$. Můžeme proto položit

$$h_1(w) := \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z \qquad \text{pro } w \in \Omega_1$$

a funkce h_1 je pak holomorfní na Ω_1 (lze použít postup z důkazu Cauchyova vzorce, tedy Věty 20.5.1, pro $k = 1$).

Povšimněme si ještě, že pro všechna $w \in \Omega\cap\Omega_1$ platí

$$\begin{aligned} h(w) &= \int_\Gamma g(z,w)\,\mathrm{d}z = \int_\Gamma \frac{f(z)-f(w)}{z-w}\,\mathrm{d}z = \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z - f(w)\int_\Gamma \frac{1}{z-w}\,\mathrm{d}z \\ &= \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z - 2\pi \mathrm{i} f(w)\operatorname{Ind}_\Gamma w = \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z = h_1(z). \end{aligned}$$

Proto

$$H(w) := \begin{cases} h(w) & \text{pro } w \in \Omega \\ h_1(w) & \text{pro } w \in \Omega_1 \end{cases}$$

je dobře definovaná holomorfní funkce na $\mathbb{C}$. Navíc máme (připomeňme, že $\operatorname{Ind}_\Gamma$ je nulový vně dostatečně velkého kruhu centrovaného v počátku; níže provedené prohození limitních procesů nám umožňuje Lebesgueova věta o majorizované konvergenci, tedy Věta 15.8.17, neboť $|f|$ je omezená na $\langle\Gamma\rangle$)

$$\lim_{w\to\infty} H(w) = \lim_{w\to\infty} h_1(w) = \lim_{w\to\infty} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z = \int_\Gamma \lim_{w\to\infty} \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z = 0.$$

Proto je H omezená na $\mathbb{C}$. Podle Liouvilleovy věty (Věta 20.5.11) je tudíž konstantní, tedy konstantně nulová. Proto pro všechna $w \in \Omega \setminus \langle \Gamma \rangle$ platí

$$\begin{aligned} 0 = H(w) = h(w) &= \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z - f(w)\int_\Gamma \frac{1}{z-w}\,\mathrm{d}z \\ &= \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z - 2\pi \mathrm{i} f(w)\operatorname{Ind}_\Gamma w. \end{aligned}$$

Tím jsme dokázali druhou část věty.

Dokažme první část věty. Zvolme $w \in \Omega \setminus \langle \Gamma \rangle$. Označme $g(z) := (z-w)f(z)$. Podle druhé části věty aplikované na funkci g pak máme

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\Gamma \frac{g(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} g(w)\operatorname{Ind}_\Gamma w = 0.$$

Přistupme k důkazu třetí části. Pro každé $k \in \{1,\dots,n\}$ nechť $L_k(z)$ označuje hlavní část Laurentovy řady funkce f na mezikruží $B_{0,r_k}(a_k)$ (existuje prstencové okolí bodu a_k, kde f je holomorfní a podle Věty o Laurentově rozvoji, tedy Věty 20.7.6, zde můžeme zkonstruovat Laurentovu řadu; zároveň hlavní část této řady konverguje na $\mathbb{C} \setminus \{a_k\}$). Položme ještě

$$g(z) = f(z) - \sum_{k=1}^n L_k(z).$$

Pak funkce g je holomorfní na Ω a podle již dokázané první části věty máme

$$0 = \int_\Gamma g(z)\,\mathrm{d}z = \int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z - \sum_{k=1}^n \int_\Gamma L_k(z)\,\mathrm{d}z.$$

Zbývá ukázat, že pro každé $k \in \{1,\dots,n\}$ platí

$$\int_\Gamma L_k(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \operatorname{Res}_{a_k} L_k \operatorname{Ind}_\Gamma a_k = 2\pi \mathrm{i} \operatorname{Res}_{a_k} f \operatorname{Ind}_\Gamma a_k.$$

První rovnost plyne z toho, že Laurentova řada L_k konverguje stejnoměrně na $\langle \Gamma \rangle$ a z toho, že všechny její členy tvaru $\frac{c_j}{(z-a_k)^j}$, kde $j \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, mají primitivní funkci na $\mathbb{C} \setminus \{a_k\}$, a proto se při integraci přes uzavřené křivky tvořící cyklus Γ vynulují. Zbývá jen člen s výrazem $\frac{1}{z-a_k}$. Jeho koeficientem je reziduum $\operatorname{Res}_{a_k} L_k$ a to je stejné i pro funkci f. Tím je důkaz dokončen. $\square$

Kapitola 21

Fourierova transformace

V kapitole o Fourierových řadách jsme si představili metodu řešení diferenciálních rovnic, která využívala proces, kdy jsme funkci $f \in L^1((a, a+l))$ nahradili posloupností jejích Fourierových koeficientů (vzhledem k trigonometrickému systému). Upřednostníme-li komplexní zápis Fourierovy řady, pak mají námi používané vzorce tvar

$$F_f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{l}x}$$

a

$$c_k = \frac{1}{l}\int_a^{a+l} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2k\pi}{l}x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pro } k \in \mathbb{Z}.$$

Tento proces nyní zmodifikujeme. Nebudeme Fourierův koeficient přiřazovat pouze číslu $k \in \mathbb{Z}$, ale každému číslu $\xi \in \mathbb{R}$ pomocí předpisu

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\xi x}\,\mathrm{d}x,$$

čímž dostaneme funkci tvořenou Fourierovými koeficienty, které se říká *Fourierova transformace* funkce f. Zároveň došlo k tomu, že původní perioda délky l byla prodloužena na celé $\mathbb{R}$.

Opět nás bude zajímat, pro které prostory funkcí je funkce $\mathcal{F}(f)$ definovaná a zda je možné z tvaru funkce $\mathcal{F}(f)$ získat zpětně předpis pro funkci f. Uvedený předpis bude mít tvar (platí ale jen někdy)

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\xi x}\,\mathrm{d}\xi.$$

Zároveň zjistíme, že Fourierova transformace má řadu pozoruhodných vlastností, které ji staví do role mocného nástroje při hledání řešení obyčejných i parciálních diferenciálních rovnic, ale i získávání informací o vlastnostech funkcí. Opět se však nebude jednat o nástroj univerzální. Při počítání Fourierovy transformace a „zpětné“ Fourierovy transformace se budeme běžně setkávat s obtížně spočítatelnými integrály. Často nám v takových případech pomohou metody výpočtu integrálů, které jsme si osvojili při studiu komplexní analýzy. V celé kapitole budeme typicky uvažovat funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

21.1 Schwartzův prostor $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

Abychom dostali výsledky aplikovatelné i na parciální diferenciální rovnice (zde zatím trpíme až tragickým nedostatkem metod řešení), budeme se muset naučit transformovat rovněž funkce více proměnných a jejich parciální derivace. Připomeňme zde zkrácené značení, kdy pro *multiindex* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ píšeme

$$D^\alpha f := \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$$

(nulanásobnou parciální derivaci chápeme tak, že podle uvedené proměnné nederivujeme). Značíme ještě

$$|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N \qquad \text{a} \qquad x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_N^{\alpha_N}$$

(číslo $|\alpha|$ se nazývá *výška multiindexu* α). V souladu s tímto značením se často píše $D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}$. Konečně $\alpha \le \beta$ znamená, že $\alpha_i \le \beta_i$ pro všechna $i = 1, 2, \dots, N$.

V celé teorii Fourierovy transformace budeme eukleidovskou normu prvku $x \in \mathbb{R}^N$ značit $|x|$.

Poznámka 21.1.1. Nejčastěji budeme pracovat s nekonečně hladkými funkcemi. U nich jsou parciální derivace záměnné.

Příklad 21.1.2. Nechť $N = 4$ a $\alpha = (1, 3, 0, 5)$. Pak pro $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$

$$D^\alpha f = \frac{\partial^9 f}{\partial x_1 \partial x_2^3 \partial x_4^5} \qquad \text{a} \qquad x^\alpha = x_1 x_2^3 x_4^5.$$

Podobně jako teorii Fourierových řad, i teorii Fourierovy transformace budeme budovat v několika krocích. Opět začneme prací s prostorem, který není příliš bohatý, ale nabízí snadné získání nejdůležitějších výsledků.

Definice 21.1.3 (Schwartzův prostor)**.** Nechť $N \in \mathbb{N}$. Pak *Schwartzův prostor* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ je množina všech funkcí $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, které splňují

$$\|f\|_{\alpha,\beta} := \|x^\alpha D^\beta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < \infty \qquad \text{pro všechna } \alpha, \beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N. \tag{21.1.1}$$

Příklad 21.1.4. (i) Zřejmě platí $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset C^\infty(\mathbb{R}^N)$.
(ii) Funkce $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|^2}$ patří do $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \setminus \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.
(iii) Žádná netriviální racionální lomená funkce není v $S(\mathbb{R}^N)$ vlivem nedostatečného poklesu na okolí nekonečna.
(iv) Funkce $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$ nepatří do $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, neboť nemá dostatečnou hladkost.

Definice 21.1.5 (Konvergence ve Schwartzově prostoru)**.** Nechť $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ a $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje k funkci f ve Schwartzově prostoru, jestliže

$$\|f_n - f\|_{\alpha,\beta} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \qquad \text{pro všechna } \alpha, \beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N.$$

Pak píšeme $f_n \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)}{\to} f$.

Poznámka 21.1.6. Konvergence ve Schwartzově prostoru neodpovídá žádné normě. K tomu se vrátíme v příštím semestru.

Poznámka 21.1.7. Není těžké vidět, že podmínku (21.1.1) z definice Schwartzova prostoru (Definice 21.1.3) lze ekvivalentně vyjádřit i jinak, totiž

$$\||x|^{|\alpha|} D^\beta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < \infty \qquad \text{pro všechna } \alpha, \beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$$

nebo

$$\|(1 + |x|)^{|\alpha|} D^\beta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < \infty \qquad \text{pro všechna } \alpha, \beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$$

nebo

$$\|(1 + |x|^2)^{|\alpha|} D^\beta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < \infty \qquad \text{pro všechna } \alpha, \beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N.$$

Kupříkladu vždy máme $|x|^\alpha \leq (1 + |x|)^\alpha$ a na druhou stranu můžeme využít odhady

$$(1 + |x|)^\alpha \leq \begin{cases} 2^{|\alpha|}|x|^\alpha & \text{pro } |x| \geq 1 \\ 2^{|\alpha|} & \text{pro } |x| \leq 1, \end{cases}$$

odkud dostáváme

$$\|(1 + |x|)^{|\alpha|} D^\beta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq 2^{|\alpha|} \||x|^{|\alpha|} D^\beta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + 2^{|\alpha|} \|D^\beta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}.$$

Tento typ úvah nám ukazuje, že trojice nových podmínek je vzájemně ekvivalentní.

Podobně můžeme postupovat při důkazu ekvivalence třeba první z výše uvedených podmínek a podmínky (21.1.1). Na jednu stranu triviálně máme

$$\|x^\alpha D^\beta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \||x|^{|\alpha|} D^\beta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}.$$

Na druhou stranu máme odhady

$$|x|^{|\alpha|} \leq \begin{cases} N^{\frac{|\alpha|}{2}} |x_1|^{|\alpha|} & \text{pokud } |x_1| = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|\} \\ N^{\frac{|\alpha|}{2}} |x_2|^{|\alpha|} & \text{pokud } |x_2| = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|\} \\ \ldots & \ldots. \end{cases}$$

a z nich plyne

$$\||x|^{|\alpha|} D^\beta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq N^{\frac{|\alpha|}{2}} \sum_{j=1}^N \|x_j^{|\alpha|} D^\beta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}.$$

Věta 21.1.8 (O základních vlastnostech Schwartzova prostoru)**.** (i) *Schwartzův prostor tvoří algebru vzhledem ke sčítání a násobení funkcí.*
(ii) *Nechť* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ *a* P *je polynom v* $\mathbb{R}^N$. *Pak* $D^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *a* $Pf \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.
(iii) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ *pro všechna* $p \in [1, \infty]$.
(iv) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *je hustý v* $L^p(\mathbb{R}^N)$ *pro všechna* $p \in [1, \infty)$.

Důkaz. První část věty plyne z aritmetiky derivace. Druhá část je zřejmá. Dokažme třetí část. Nechť $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Nejprve si povšimněme, že zřejmě platí

$$f \in L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Dále snadno získáváme

$$|f| \le \frac{C}{1 + |x|^{N+1}} \qquad \text{na } \mathbb{R}^N,$$

a proto

$$f \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Pro ostatní $p \in (1, \infty)$ si vypomůžeme interpolační nerovností

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \le \|f\|^\theta_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|f\|^{1-\theta}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \qquad \text{kde } \theta = \frac{1}{p}.$$

Čtvrtá část nyní plyne z $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ a hustoty $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ v uvedených Lebesgueových prostorech. □

Další často používanou operací bude *konvoluce*, se kterou jsme se seznámili při zhlazování funkcí. Připomeňme, že se jedná o komutativní operaci pracující s dvojicí funkcí f, g definovanou jako

$$(f \star g)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y) g(y) \, \mathrm{d}y.$$

Nejprve se zabývejme otázkou, pro jaké dvojice funkcí má konvoluce smysl.

Věta 21.1.9 (O vlastnostech konvoluce)**.** (i) *Nechť* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. *Pak* $f \star g = g \star f \in L^1(\mathbb{R}^N)$.
(ii) *Nechť* $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *a* $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. *Pak* $f \star g = g \star f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.
(iii) *Nechť* $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k(\mathbb{R}^N)$, $\sup_{|\alpha| \le k, x \in \mathbb{R}^N} |D^\alpha f(x)| < \infty$ *a* $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. *Pak* $f \star g = g \star f \in C^k(\mathbb{R}^N)$.
(iv) *Nechť* $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. *Pak* $f \star g = g \star f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Důkaz. Dokažme první část. Odhad se dá poměrně snadno získat z Fubiniho věty (Věta 15.11.2), pro niž však potřebujeme lebesgueovskou měřitelnost funkce $(x, y) \mapsto f(x-y)g(y)$. Tu získáme z lebesgueovské měřitelnosti funkcí $(x, y) \mapsto g(y)$ a $(x, y) \mapsto f(x-y)$, jejichž součinem je zkoumaná funkce. Zřejmě existuje posloupnost hladkých funkcí s kompaktním nosičem $\{g_n\}_{n=1}^\infty$, která konverguje pro skoro všechna $y \in \mathbb{R}^N$ k funkci g. (Zde využíváme kromě Věty o hustých podmnožinách

$L^p(\Omega)$, tedy Věty 16.4.3, i Větu o konvergenci skoro všude a úplnosti Lebesgueových prostorů, tedy Větu 16.3.3.) Protože je zřejmě také funkce $(x,y) \mapsto g_n(y)$ měřitelná na $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, plyne měřitelnost g na $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ z Věty o měřitelnosti bodové limity měřitelných funkcí (Věta 15.4.40). Analogicky postupujeme u funkce f. Opět existuje posloupnost hladkých funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, která pro skoro všechna $z \in \mathbb{R}^N$ konverguje k $f(z)$, tedy pro skoro všechna $(x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ konverguje $f_n(x-y)$ k $f(x-y)$. Lebesgueovská měřitelnost $(x,y) \mapsto f_n(x-y)$ je důsledkem její spojitosti. Proto aplikací Věty o měřitelnosti bodové limity měřitelných funkcí (Věta 15.4.10) je měřitelná i $f(x-y)$ na $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

Nyní přistupme k odhadu normy. Díky Fubiniho větě (Věta 15.11.2) máme

$$\begin{aligned}\|f \star g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} &= \int_{\mathbb{R}^N} \Big| \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y \Big| \,\mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)g(y)| \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,\mathrm{d}x |g(y)|\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^N} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} |g(y)|\,\mathrm{d}y \\ &= \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

Komutativita se dokáže jednoduchou substitucí $x - y = z$ (stejně ve všech čtyřech částech věty, důkaz už nebudeme opakovat)

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^N} f(z)g(x-z)\,\mathrm{d}y = (g \star f)(x).$$

Druhá část plyne z odhadu (měřitelnost integrandu se ověří jako výše, jen u funkce f si připomeňme, že funkce z $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ jsou lokálně integrovatelné, a v tomto smyslu používáme aproximaci pomocí hladkých funkcí)

$$\begin{aligned}|(f \star g)(x)| &= \Big| \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y \Big| \le \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|\,\mathrm{d}y \\ &\le \int_{\mathbb{R}^N} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} |g(y)|\,\mathrm{d}y = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

Třetí část plyne z vícenásobně aplikované Věty o derivaci integrálu podle parametru (Věta 15.10.3). Za integrovatelné majoranty při postupném derivování bereme funkci

$$y \mapsto \sup_{|\alpha| \le k, x \in \mathbb{R}^N} |D^\alpha f(x)||g(y)|.$$

Spojitost nejvyšší derivace plyne z Věty o spojitosti integrálu závislého na parametru (Věta 15.10.1).

Dokažme čtvrtou část. Podle třetí části máme $f \star g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Věnujme se nyní otázce požadovaného poklesu. Pro každé $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ máme

$$
\begin{aligned}
&|x^\alpha (f \star g)(x)| \\
&\quad = \left| x^\alpha \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) g(y) \, \mathrm{d}y \right| \le \int_{\mathbb{R}^N} |x - y + y|^{|\alpha|} |f(x-y)||g(y)| \, \mathrm{d}y \\
&\quad \le \int_{\mathbb{R}^N} 2^{|\alpha|} (|x-y|^{|\alpha|} + |y|^{|\alpha|}) |f(x-y)||g(y)| \, \mathrm{d}y \\
&\quad = 2^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^N} |x-y|^{|\alpha|} |f(x-y)||g(y)| \, \mathrm{d}y + 2^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||y|^{|\alpha|} |g(y)| \, \mathrm{d}y \\
&\quad \le 2^{|\alpha|} \| |t|^{|\alpha|} f(t) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + 2^{|\alpha|} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \| |y|^{|\alpha|} g(y) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}
$$

Napravo jsme dostali konstantu, která nezávisí na $x \in \mathbb{R}^N$ (používáme Poznámku 21.1.7). Podobně dokážeme požadovaný pokles i pro parciální derivace funkce $f \star g$. ☐

Poznámka 21.1.10. Existují i výsledky pracující s dalšími dvojicemi prostorů. Platí například užitečná *Youngova nerovnost* tvrdící, že pokud $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$, kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ge 1$, pak pro $r \in [1, \infty]$ definované předpisem $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ máme

$$
\|f \star g\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}.
$$

Důkaz plyne z odhadu založeného na Hölderově nerovnosti a na rovnostech $\frac{1}{q'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}$ (neboli $q'(1 - \frac{p}{r}) = p$) a $\frac{1}{p'} = \frac{1}{q} - \frac{1}{r}$ (neboli $p'(1 - \frac{q}{r}) = q$)

$$
\begin{aligned}
|(f \star g)(x)| &\le \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)| \, \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^{\frac{p}{r}} |f(x-y)|^{1-\frac{p}{r}} |g(y)|^{\frac{q}{r}} |g(y)|^{1-\frac{q}{r}} \, \mathrm{d}y \\
&\le \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^p |g(y)|^q \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^{q'(1-\frac{p}{r})} \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{q'}} \\
&\qquad \times \left(\int_{\mathbb{R}^N} |g(y)|^{p'(1-\frac{q}{r})} \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^p |g(y)|^q \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{r}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{\frac{p}{q'}} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^{\frac{q}{p'}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^p |g(y)|^q \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{r}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{1-\frac{p}{r}} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^{1-\frac{q}{r}}.
\end{aligned}
$$

Proto Fubiniho věta (Věta 15.11.2) dává

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |f \star g|^r(x) \, \mathrm{d}x &\le \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{r-p} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^{r-q} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^p |g(y)|^q \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{r-p} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^{r-q} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^p \, \mathrm{d}x |g(y)|^q \, \mathrm{d}y \\
&= \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{r} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^{r}.
\end{aligned}
$$

21.2 Fourierova transformace na Schwartzově prostoru

Skalární součin prvků $x, \xi \in \mathbb{R}^N$ v tomto oddíle budeme značit (x, ξ).

Definice 21.2.1 (Fourierova transformace na Schwartzově prostoru)**.** Nechť $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Pak *(přímou) Fourierovou transformací* funkce f nazýváme funkci $\xi \in \mathbb{R}^N \mapsto \mathcal{F}(f)(\xi)$ zadanou předpisem

$$\mathcal{F}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)} \, \mathrm{d}x$$

a *inverzní (zpětnou) Fourierovou transformací* funkce f nazýváme funkci $\xi \in \mathbb{R}^N \mapsto \mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)$ zadanou předpisem

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(x,\xi)} \, \mathrm{d}x.$$

Poznámka 21.2.2. (i) Protože $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset L^1(\mathbb{R}^N)$ a $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)} = \cos(2\pi(x,\xi)) - \mathrm{i}\sin(2\pi(x,\xi))$, platí $\mathcal{F}(f)(\xi) \in \mathbb{C}$ pro všechna $\xi \in \mathbb{R}^N$. Podobně je všude definovaná funkce $\mathcal{F}^{-1}(f)$.
(ii) V literatuře se často také používá značení $\hat{f} := \mathcal{F}(f)$ a $\check{f} := \mathcal{F}^{-1}(f)$.
(iii) V literatuře se Fourierova transformace zavádí i jinými předpisy. Často se například používají vzorce

$$\mathcal{F}(f)(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x,\xi)} \, \mathrm{d}x$$

a

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x,\xi)} \, \mathrm{d}x.$$

Získáme tím samozřejmě odlišné funkce od funkcí z naší definice. Nicméně takto zavedená Fourierova transformace má podobné vlastnosti jako ta naše (níže si kupříkladu odvodíme vzorce popisující chování Fourierovy transformace k parciální derivaci a konvoluci, „druhá“ Fourierova transformace má podobné vzorce lišící se jen v konstantách). Naše definice se ukáže být výhodná zejména v souvislosti s Fourierovou transformací Diracovy distribuce, k čemuž se dostaneme v příštím semestru.

Příklad 21.2.3. Připomeňme, že aplikací Cauchyovy věty se dá spočítat pro libovolné $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (máme $N = 1$)

$$\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-\lambda x^2})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \mathrm{e}^{-\frac{\pi^2 \xi^2}{\lambda}}.$$

Speciálně $\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-\pi x^2})(\xi) = \mathrm{e}^{-\pi^2 \xi^2}$. Díky Fubiniho větě (Věta 15.11.2) navíc z prvního výsledku plyne pro libovolné $N \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-\lambda |x|^2})(\xi) = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{\frac{N}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{\pi^2 |\xi|^2}{\lambda}}.$$

Snadno se dají dokázat následující vlastnosti Fourierovy transformace.

Lemma 21.2.4 (O základních vztazích pro Fourierovu transformaci)**.** *Nechť $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Pak platí (od druhé do čtvrté části je integrační proměnnou x)*
(i) $\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) = \mathcal{F}(f)(-\xi)$, $\overline{\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)} = \mathcal{F}(\overline{f})(\xi)$, $\mathcal{F}^{-1}(\overline{f})(\xi) = \overline{\mathcal{F}(f)(\xi)}$
(ii) $\mathcal{F}(f(x-z))(\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(z,\xi)}\mathcal{F}(f(x))(\xi)$ *pro všechna* $z \in \mathbb{R}^N$
(iii) $\mathcal{F}(f(x))(\xi-\eta) = \mathcal{F}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(x,\eta)}f(x))(\xi)$ *pro všechna* $\eta \in \mathbb{R}^N$
(iv) $\mathcal{F}(f(\varepsilon x))(\xi) = |\varepsilon|^{-N}\mathcal{F}(f(x))(\frac{\xi}{\varepsilon})$ *pro všechna* $\varepsilon \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Cvičení 21.2.5. Proveďte důkaz Lemmatu 21.2.4.

Příklad 21.2.6. (i) Podle první části předchozí věty a předchozího příkladu máme pro libovolné $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathrm{e}^{-\lambda|x|^2})(\xi) = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{\frac{N}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2|\xi|^2}{\lambda}} \qquad \text{pro všechna } N \in \mathbb{N}.$$

(ii) Podle druhé části pro všechna $\xi \in \mathbb{R}$ platí

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\xi}\mathrm{e}^{-\pi\xi^2} = \mathcal{F}(\mathrm{e}^{-\pi(x+1)^2})(\xi).$$

Zároveň nám první část předchozí věty umožňuje odvozovat vlastnosti inverzní Fourierovy transformace od vlastností Fourierovy transformace přímé. Toho budeme často využívat a věnovat se v důkazech jen přímé Fourierově transformaci.

Fourierova transformace také zachovává některé symetrie.

Lemma 21.2.7 (O zachování parity při Fourierově transformaci)**.** *Nechť $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ a $j \in \{1,\dots,N\}$. Je-li f sudá v proměnné x_j, pak je $\mathcal{F}(f)$ sudá v proměnné ξ_j. Analogicky pro lichost v proměnné x_j. Speciálně v případě $N=1$ máme*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \begin{cases} 2\int_0^\infty \cos(2\pi x\xi)f(x)\,\mathrm{d}x & \textit{pro } f \textit{ sudou} \\ -2\mathrm{i}\int_0^\infty \sin(2\pi x\xi)f(x)\,\mathrm{d}x & \textit{pro } f \textit{ lichou.} \end{cases}$$

Důkaz. Pro jednoduchost značení předpokládejme, že $j=1$. Pak máme

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}}\Big(\int_{\mathbb{R}} f(x_1,\dots,x_N)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi x_1\xi_1}\,\mathrm{d}x_1\Big)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x_2\xi_2+\dots+x_N\xi_N)}\,\mathrm{d}x_2\dots\mathrm{d}x_N.\end{aligned}$$

Povšimněme si ještě, že

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}} f(x_1,\dots,x_N)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi x_1\xi_1}\,\mathrm{d}x_1 \\ &\quad= \int_{\mathbb{R}} f(x_1,\dots,x_N)(\cos(2\pi x_1\xi_1) - \mathrm{i}\sin(2\pi x_1\xi_1))\,\mathrm{d}x_1 \\ &\quad= \int_0^\infty (f(x_1,\dots,x_N) + f(-x_1,\dots,x_N))\cos(2\pi x_1\xi_1)\,\mathrm{d}x_1 \\ &\qquad\qquad - \mathrm{i}\int_0^\infty (f(x_1,\dots,x_N) - f(-x_1,\dots,x_N))\sin(2\pi x_1\xi_1)\,\mathrm{d}x_1.\end{aligned}$$

Ze získané formule jsou vidět všechna dokazovaná tvrzení. □

Lemma 21.2.8 (O zachování radiální symetrie při Fourierově transformaci)**.** *Nechť $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ je radiálně symetrická. Pak i $\mathcal{F}(f)$ je radiálně symetrická. Speciálně v případě $N = 3$ při zápisu $f(x) = g(|x|)$ máme pro každé $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{2}{|\xi|} \int_0^\infty g(\varrho)\varrho \sin(2\pi\varrho|\xi|)\,\mathrm{d}\varrho.$$

Důkaz. Nechť $\xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Pak existuje taková regulární ortogonální matice $\mathbb{A}$, že

$$\widetilde{\xi} := (0, \dots, 0, |\xi|) = \mathbb{A}\xi.$$

Zároveň také máme $\xi = \mathbb{A}^{-1}\widetilde{\xi} = \mathbb{A}^\top\widetilde{\xi}$. Pak

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} g(|x|)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\mathbb{A}^\top\widetilde{\xi})}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} g(|\mathbb{A}x|)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(\mathbb{A}x,\widetilde{\xi})}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} g(|y|)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(y,\widetilde{\xi})}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} g(|y|)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi y_N|\xi|}\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Odtud je vidět, že hodnota $\mathcal{F}(f)(\xi)$ závisí pouze na $|\xi|$.

Pokud $N = 3$, zápis $\mathcal{F}(f)(\xi)$ obdržený výše můžeme dále upravovat za pomoci sférických souřadnic $y_1 = \varrho\sin\eta\cos\psi$, $y_2 = \varrho\sin\eta\sin\psi$, $y_3 = \varrho\cos\eta$, $\eta \in (0, \pi)$, $\psi \in (0, 2\pi)$, $\varrho \in (0, \infty)$ a pak ještě provést substituci $t = \cos\eta$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^3} g(|y|)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi y_3|\xi|}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^\pi\int_0^\infty g(\varrho)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\varrho\cos\eta|\xi|}\varrho^2\sin\eta\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\psi \\
&= 2\pi\int_0^\infty g(\varrho)\varrho^2\Big(\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\varrho t|\xi|}\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}\varrho = 2\pi\int_0^\infty g(\varrho)\varrho^2\Big[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\varrho t|\xi|}}{-\mathrm{i}2\pi\varrho|\xi|}\Big]_{-1}^1\,\mathrm{d}\varrho \\
&= 2\pi\int_0^\infty g(\varrho)\varrho^2\frac{\sin(2\pi\varrho|\xi|)}{\pi\varrho|\xi|}\,\mathrm{d}\varrho = \frac{2}{|\xi|}\int_0^\infty g(\varrho)\varrho\sin(2\pi\varrho|\xi|)\,\mathrm{d}\varrho.
\end{aligned}$$

□

Poznámka 21.2.9. Pro $N = 1$ je radiální symetrie totéž co sudost (a máme i zjednodušené vyjádření Fourierovy transformace). Pro $N \in \mathbb{N} \setminus \{1, 3\}$ je také možné formuli získanou v první půlce předchozího důkazu ještě upravovat, ale nikdy nevyjde tak jednoduchý vzorec jako pro $N = 3$. K tomuto tématu se ještě vrátíme v dalším semestru.

Věta 21.2.10 (O základních vlastnostech Fourierovy transformace)**.** *Nechť $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ a $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$. Pak platí*
(i) $\mathcal{F}(D^\alpha f)(\xi) = (\mathrm{i}2\pi\xi)^\alpha\mathcal{F}(f)(\xi)$, $\mathcal{F}^{-1}(D^\alpha f)(\xi) = (-\mathrm{i}2\pi\xi)^\alpha\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)$
(ii) $D^\alpha(\mathcal{F}(f)(\xi)) = \mathcal{F}((-\mathrm{i}2\pi x)^\alpha f(x))(\xi)$, $D^\alpha(\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)) = \mathcal{F}^{-1}((\mathrm{i}2\pi x)^\alpha f(x))(\xi)$
(iii) $\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}|\mathcal{F}(f)(\xi)| \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$, $\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}|\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)| \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$

(iv) $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{F}^{-1}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$
(v) $\int_{\mathbb{R}^N} f\mathcal{F}(g)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}(f)g\,\mathrm{d}x$, $\int_{\mathbb{R}^N} f\mathcal{F}^{-1}(g)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}^{-1}(f)g\,\mathrm{d}x$
(vi) $\mathcal{F}(f\star g)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi)\mathcal{F}(g)(\xi)$, $\mathcal{F}^{-1}(f\star g)(\xi) = \mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)\mathcal{F}^{-1}(g)(\xi)$.

Důkaz. Dokažme první část věty. Nejprve si uvědomme, že $D^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, a proto má levá strana první rovnosti smysl. Budeme integrovat per partes, přičemž hraniční členy vymizí díky poklesu na okolí nekonečna z definice Schwartzova prostoru. Dostáváme

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(D^\alpha f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^N} D^\alpha f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)}\,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)D^\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)}\,\mathrm{d}x\\ &= (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)}(-\mathrm{i}2\pi\xi)^\alpha\,\mathrm{d}x = (\mathrm{i}2\pi\xi)^\alpha\mathcal{F}(f)(\xi).\end{aligned}$$

Druhá rovnost se dokáže analogicky.

Druhá část se získá z Věty o derivaci integrálu podle parametru (Věta 15.10.3). Majoranty parciálních derivací původního integrandu mají tvar $|f(x)|(2\pi)^{|\alpha|}|x|^\alpha$ a jejich příslušnost do $L^1(\mathbb{R}^N)$ plyne z definice Schwartzova prostoru. Analogicky pro inverzní Fourierovu transformaci.

Při důkazu třetí části věty stačí používat jednoduché odhady typu

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}(f)(\xi)| &= \Big|\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)}\,\mathrm{d}x\Big| \le \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)}|\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

Dokažme čtvrtou část. Podle druhé části máme $\mathcal{F}(f) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Dále podle první a druhé části máme pro libovolná $\alpha, \beta \in (\mathbb{N}\cup\{0\})^N$

$$\xi^\alpha D^\beta\mathcal{F}(f)(\xi) = \xi^\alpha\mathcal{F}((-\mathrm{i}2\pi x)^\beta f(x))(\xi) = (\mathrm{i}2\pi)^{|\beta|-|\alpha|}(-1)^{|\beta|}\mathcal{F}(D^\alpha(x^\beta f))(\xi).$$

Nyní si povšimněme, že $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ implikuje $D^\alpha(x^\beta f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Proto díky třetí části je pravá strana poslední rovnosti omezená. Protože $\alpha, \beta \in (\mathbb{N}\cup\{0\})^N$ byla libovolná, dostali jsme $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Podobně pro inverzní Fourierovu transformaci.

Pátá část plyne z Fubiniho věty (Věta 15.11.2; podobně pro inverzní Fourierovu transformaci)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} f\mathcal{F}(g)\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\Big(\int_{\mathbb{R}^N} g(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(y,x)}\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} g(y)\Big(\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(y,x)}\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^N} g\mathcal{F}(f)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Dokažme šestou část. Nejprve si povšimněme, že podle druhé části Věty o vlastnostech konvoluce (Věta 21.1.9) máme $f\star g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, a proto je Fourierova transformace $\mathcal{F}(f \star g)$ dobře definovaná. Dále máme díky Fubiniho větě (Věta 15.11.2)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f \star g)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(y,\xi)} g(y) \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x-y,\xi)} f(x-y)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y \\ &= \mathcal{F}(f)(\xi)\mathcal{F}(g)(\xi).\end{aligned}$$

Podobně pro inverzní Fourierovu transformaci. □

Poznámka 21.2.11. Právě předchozí věta je důvodem, proč je Fourierova transformace v literatuře definovaná různými způsoby. Některé definice totiž vedou k tomu, že se v první a druhé části nevyskytuje multiplikativní konstanta 2π. Toto zjednodušení však bývá vyváženo multiplikativní konstantou komplikující vzorce v šesté části.

Poznámka 21.2.12. Povšimněte si, že v páté části předchozí věty nám pro aplikaci Fubiniho věty (Věta 15.11.2) v důkazu stačilo předpokládat, že $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Poznámka 21.2.13. Chování Fourierovy transformace vůči derivaci umožňuje dokázat jiným způsobem vztah z Příkladu 21.2.3. Uvažujme pouze případ $N = 1$. Funkce $f(x) = \mathrm{e}^{-\pi x^2}$ řeší následující úlohu

$$\begin{aligned} y' + 2\pi x y &= 0 \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

Protože $\mathcal{F}(f)(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\pi x^2}\,\mathrm{d}x = 1$, použitím vztahu (i) z předchozí věty vidíme, že $\mathcal{F}(f)$ řeší stejnou rovnici jako f. Díky jednoznačnosti řešení této rovnice musí platit, že $\mathcal{F}(f) = f$.

Nyní si ukážeme, že pojmenování inverzní Fourierovy transformace je skutečně zasloužené.

Věta 21.2.14 (Schwartzova věta)**.** *Fourierova transformace je na prostoru $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ prostá, zobrazuje $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ a inverzním zobrazením k Fourierově transformaci je na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ inverzní Fourierova transformace.*

Důkaz. Nechť $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ a $x \in \mathbb{R}^N$. Pro každé $\varepsilon > 0$ položme

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &:= \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(x,\xi)} \mathrm{e}^{-\varepsilon|\xi|^2} \mathcal{F}(f)(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(x,\xi)} \mathrm{e}^{-\varepsilon|\xi|^2} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(y,\xi)} f(y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Pak podle Lebesgueovy věty o majorizované konvergenci (Věta 15.8.17) s majorantou $|\mathcal{F}(f)|$ (připomeňme $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset L^1(\mathbb{R}^N)$) kombinované s Heineho větou (Věta 5.4.1) platí

$$I_\varepsilon \overset{\varepsilon\to 0+}{\to} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x).$$

Nyní použijeme Fubiniho větu (Věta 15.11.2; její aplikace je oprávněná, neboť $2N$-rozměrný Lebesgueův integrál z výrazu $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(x,\xi)}\mathrm{e}^{-\varepsilon|\xi|^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(y,\xi)}f(y)$ existuje díky tomu, že velikost výrazu je možné odhadnout pomocí $\mathrm{e}^{-\varepsilon|\xi|^2}|f(y)| \in L^1(\mathbb{R}^{2N})$) a pak použijeme substituci $y = z + x$

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\Big(\int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(y-x,\xi)}\mathrm{e}^{-\varepsilon|\xi|^2}\,\mathrm{d}\xi\Big)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f(z+x)\Big(\int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(z,\xi)}\mathrm{e}^{-\varepsilon|\xi|^2}\,\mathrm{d}\xi\Big)\,\mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}^N} f(z+x)\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-\varepsilon|\xi|^2})(z)\,\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Ještě využijeme toho, že $\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-\varepsilon|\xi|^2})(z) = (\frac{\pi}{\varepsilon})^{\frac{N}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2|z|^2}{\varepsilon}}$ (podle Příkladu 21.2.3), a provedeme substituci $\eta = \frac{z\pi}{\sqrt{\varepsilon}}$

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^N} f(z+x)\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-\varepsilon|\xi|^2})(z)\,\mathrm{d}z = \Big(\frac{\pi}{\varepsilon}\Big)^{\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} f(z+x)\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2|z|^2}{\varepsilon}}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{\pi^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} f\Big(x + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\pi}\eta\Big)\mathrm{e}^{-|\eta|^2}\,\mathrm{d}\eta. \end{aligned}$$

Odtud dostáváme

$$I_\varepsilon \overset{\varepsilon\to 0+}{\to} \frac{1}{\pi^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\mathrm{e}^{-|\eta|^2}\,\mathrm{d}\eta = f(x)$$

podle Lebesgueovy věty o majorizované konvergenci (Věta 15.8.17) s majorantou $\mathrm{e}^{-|\eta|^2}\sup_{\mathbb{R}^N}|f|$ (připomeňme $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N)$) kombinované s Heineho větou (Věta 5.4.1). Celkově jsme dostali $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) = f(x)$. Rovnost $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f))(x) = f(x)$ se dokáže podobně. $\square$

Poznámka 21.2.15. Povšimněte si, že pokud bychom se rovnost $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) = f(x)$ pokoušeli dokázat přímo ze vzorce

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} f(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(y-x,\xi)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}y,$$

měli bychom problémy se zdůvodněním oprávněnosti užití Fubiniho věty (Věta 15.11.2; netriviální funkce $(y,\xi) \mapsto |f(y)|$ zcela jistě neleží v $L^1(\mathbb{R}^{2N})$).

Předchozí věta se dá použít k odvození dalších zajímavých vlastností Fourierovy transformace na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Věta 21.2.16 (O vlastnostech Fourierovy transformace na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$)**.** *Nechť $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Pak*
(i) $\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(f) \star \mathcal{F}(g)$ *a* $\mathcal{F}^{-1}(fg) = \mathcal{F}^{-1}(f) \star \mathcal{F}^{-1}(g)$
(ii) $\int_{\mathbb{R}^N} f\overline{g}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}(f)\overline{\mathcal{F}(g)}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}^{-1}(f)\overline{\mathcal{F}^{-1}(g)}\,\mathrm{d}x$, *speciálně pro $f = g$ platí* $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\mathcal{F}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\mathcal{F}^{-1}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$.

Důkaz. Podle šesté části Věty o základních vlastnostech Fourierovy transformace (Věta 21.2.10) a Schwartzovy věty (Věta 21.2.14) máme

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f) \star \mathcal{F}^{-1}(g)) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f))\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(g)) = fg.$$

Odtud

$$\mathcal{F}^{-1}(fg) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f) \star \mathcal{F}^{-1}(g))) = \mathcal{F}^{-1}(f) \star \mathcal{F}^{-1}(g)).$$

Tím je dokázána druhá rovnost z první části věty. První rovnost se dokáže podobně.

Dokažme druhou část věty. Použijeme Schwartzovu větu (Věta 21.2.14), pátou část Věty o základních vlastnostech Fourierovy transformace (Věta 21.2.10) , kterou aplikujeme na dvojici funkcí f a $\mathcal{F}^{-1}(\overline{g})$, a pak ještě využijeme první část Lemmatu o základních vztazích pro Fourierovu transformaci (Lemma 21.2.4). Obdržíme

$$\int_{\mathbb{R}^N} f\overline{g}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} f\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\overline{g}))\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}(f)\mathcal{F}^{-1}(\overline{g})\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}(f)\overline{\mathcal{F}(g)}\,\mathrm{d}x.$$

Podobně se dokáže i druhá rovnost ze druhé části věty. Zbytek důkazu je snadný. □

Poznámka 21.2.17. Prvnímu řádku druhého tvrzení z předchozí věty se říká *Parsevalova rovnost* a druhému řádku *Plancherelova rovnost*.

Doposud jsme si ukázali, že Fourierova transformace má řadu užitečných vlastností, které se nám budou později hodit v aplikacích na řešení parciálních diferenciálních rovnic. Naše teorie má však jednu závažnou slabinu: Schwartzův prostor je pro aplikace příliš malý. My se jej v dalším textu pokusíme nahradit vhodným Lebesgueovým prostorem. Rozumným kandidátem je prostor $L^1(\mathbb{R}^N)$ (připomeňme, že pro $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ má vzorec definující $\mathcal{F}(f)(\xi)$ dobrý smysl). Později však zjistíme, že $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}^N)) \neq L^1(\mathbb{R}^N)$, což je v aplikacích nevýhodné. Druhou možností je vybudovat teorii Fourierovy transformace pro $L^2(\mathbb{R}^N)$, k čemuž nás motivuje Plancherelova rovnost. Zde získáme příznivější výsledky. Připomeňme ještě, že mezi prostory $L^1(\mathbb{R}^N)$ a $L^2(\mathbb{R}^N)$ neplatí žádná množinová inkluze.

21.3 Fourierova transformace na $L^1(\mathbb{R}^N)$

Podle bodu (v) Věty o základních vlastnostech Fourierovy transformace (Věta 21.2.10) je vidět, že Fourierovu transformaci pro funkce z $L^1(\mathbb{R}^N)$ můžeme definovat úplně stejným vztahem jako na Schwartzově prostoru. Máme tedy

$$\mathcal{F}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)}\,\mathrm{d}x$$

a

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(x,\xi)}\,\mathrm{d}x.$$

Bohužel, na tomto prostoru není pravda, že jej Fourierova transformace zobrazuje na sebe. Dokonce ani Fourierův obraz integrovatelné funkce nemusí být integrovatelné. Ukažme si to v následujícím příkladě.

Příklad 21.3.1. Nechť $-\infty < a < b < \infty$ a $f(x) = \chi_{[a,b]}$. Pak

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi x\xi}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} b-a & \text{pro } \xi = 0 \\ \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\xi a}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\xi b}}{\mathrm{i}2\pi\xi} & \text{pro } \xi \neq 0. \end{cases}$$

Ve speciálním případě $-a = b > 0$ pak máme

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \begin{cases} 2b & \text{pro } \xi = 0 \\ \frac{\sin(2\pi\xi b)}{\pi\xi} & \text{pro } \xi \neq 0. \end{cases}$$

Snadno se dá ověřit, že získaná funkce nepatří do $L^1(\mathbb{R})$.

Díky předchozímu příkladu nemůže platit analogie Schwartzovy věty (Věta 21.2.14) na $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Zabývejme se nyní otázkou, které z výsledků, jež jsme získali pro Schwartzův prostor, se dají přenést do $L^1(\mathbb{R}^N)$. Překontrolováním důkazů se snadno ověří, že zůstávají v platnosti Lemma o základních vztazích pro Fourierovu transformaci (Lemma 21.2.4), Lemma o zachování parity při Fourierově transformaci (Lemma 21.2.7) a Lemma o zachování radiální symetrie při Fourierově transformaci (Lemma 21.2.8). Větu o základních vlastnostech Fourierovy transformace (Věta 21.2.10) musíme lehce přeformulovat (a vynecháváme klasifikaci obrazu Fourierovy transformace ze čtvrté části původní věty; důkaz první části věty je obtížný, pro ostatní části je možné postupovat velmi podobně jako v případě Schwartzova prostoru).

Věta 21.3.2 (O základních vlastnostech Fourierovy transformace na $L^1(\mathbb{R}^N)$)**.** *Nechť $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ a $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$. Pak platí*
(i) *jestliže $f \in C^{|\alpha|}(\mathbb{R}^N)$ a $D^\beta f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ pro všechna $\beta \leq \alpha$, pak*

$$\mathcal{F}(D^\alpha f)(\xi) = (\mathrm{i}2\pi\xi)^\alpha \mathcal{F}(f)(\xi) \qquad a \qquad \mathcal{F}^{-1}(D^\alpha f)(\xi) = (-\mathrm{i}2\pi\xi)^\alpha \mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)$$

(ii) *jestliže $x^\alpha f(x) \in L^1(\mathbb{R}^N)$, pak*

$$D^\alpha(\mathcal{F}(f)(\xi)) = \mathcal{F}((-\mathrm{i}2\pi x)^\alpha f(x))(\xi) \ \ a \ \ D^\alpha(\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)) = \mathcal{F}^{-1}((\mathrm{i}2\pi x)^\alpha f(x))(\xi)$$

(iii) $\int_{\mathbb{R}^N} f\mathcal{F}(g)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}(f)g\,\mathrm{d}x$, $\int_{\mathbb{R}^N} f\mathcal{F}^{-1}(g)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}^{-1}(f)g\,\mathrm{d}x$
(iv) $\mathcal{F}(f \star g)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi)\mathcal{F}(g)(\xi)$, $\mathcal{F}^{-1}(f \star g)(\xi) = \mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)\mathcal{F}^{-1}(g)(\xi)$.

Důkaz. Jak jsme již uvedli, stačí dokázat pouze část (i). Zřejmě stačí uvažovat $\alpha = (1, 0, \ldots, 0)$, obecný případ pak dostaneme indukcí. Budeme pracovat jen s $N \geq 2$ (zjednodušení důkazu pro případ $N = 1$ přenecháváme čtenáři jako cvičení). Máme

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{R\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \Big(\int_{-R}^{R} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)}\,\mathrm{d}x_1\Big)\,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_N. \end{aligned}$$

Poslední rovnost je důsledkem Fubiniho věty (Věta 15.11.2) a Lebesgueovy věty o majorizované konvergenci (Věta 15.8.17), přičemž majorantou je funkce $|\frac{\partial f}{\partial x_1}|$.

Opět díky Lebesgueově větě o majorizované konvergenci můžeme prohodit limitu a integrál přes $\mathbb{R}^{N-1}$. Zřejmě pro všechna $(x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$ máme

$$\int_{-R}^{R} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)} \,\mathrm{d}x_1 = [f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)}]_{-R}^{R} + 2\pi\mathrm{i}\xi_1 \int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)} \,\mathrm{d}x_1.$$

Není těžké si uvědomit, že

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \Big(\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)} \,\mathrm{d}x_1 \Big) \,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_N = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)} \,\mathrm{d}x.$$

Stačí tedy už jen ukázat, že

$$\lim_{R\to\pm\infty} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |f(R, x_2, \ldots, x_N)| \,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_N = 0.$$

Zřejmě existuje $\widetilde{x}_1 \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |f(\widetilde{x}_1, x_2, \ldots, x_N)| \,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_N < +\infty.$$

Potom pro všechna $R > |\widetilde{x}_1|$ máme

$$f(R, x_2, \ldots, x_N) = f(\widetilde{x}_1, x_2, \ldots, x_N) + \int_{\widetilde{x}_1}^{R} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_N) \,\mathrm{d}x_1,$$

tedy

$$|f(R, x_2, \ldots, x_N)| \le |f(\widetilde{x}_1, x_2, \ldots, x_N)| + \int_{\widetilde{x}_1}^{R} \Big| \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_N)}{\partial x_1} \Big| \,\mathrm{d}x_1.$$

Proto pro všechna $R > |\widetilde{x}_1|$ platí

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |f(R, x_2, \ldots, x_N)| \,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_N \\
&\le \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |f(\widetilde{x}_1, x_2, \ldots, x_N)| \,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_N + \Big\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big\|_{L^1((\tilde{x}_1, R)\times\mathbb{R}^{N-1})} < \infty.
\end{aligned}$$

Velmi podobným způsobem se dá navíc pro $R_2 > R_1 > |\widetilde{x}_1|$ odvodit odhad

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |f(R_2, x_2, \ldots, x_N) - f(R_1, x_2, \ldots, x_N)| \,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_N& \\
\le \Big\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big\|_{L^1((R_1, R_2)\times\mathbb{R}^{N-1})}&.
\end{aligned}$$

Ten nám okamžitě dává Bolzano–Cauchyovu podmínku pro limitu (používáme předpoklad $\frac{\partial f}{\partial x_1} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ a Lebesgueovu větu o majorizované konvergenci, tedy Větu 15.8.17)

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |f(R, x_2, \ldots, x_N)| \,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_N \in \mathbb{R}.$$

Nyní si už jen stačí uvědomit, že díky předpokladu $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tato limita nemůže být nenulová (stačí použít Fubiniho větu, tedy Větu 15.11.2, na funkci $|f|$).

Analogicky dostaneme, že

$$\lim_{R \to -\infty} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |f(R, x_2, \dots, x_N)| \, \mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_N = 0.$$

Tím je důkaz dokončen. □

Cvičení 21.3.3. Dokažte podobně zbylé části z předchozí věty.

Další vlastnosti nám dává následující věta.

Věta 21.3.4 (O vlastnostech Fourierovy transformace na $L^1(\mathbb{R}^N)$)**.** *Zobrazení $\mathcal{F}$ a $\mathcal{F}^{-1}$ jsou spojitá lineární zobrazení z $L^1(\mathbb{R}^N)$ do $C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ a pro každou funkci $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ platí*
(i) $\|\mathcal{F}(f)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$, $\|\mathcal{F}^{-1}(f)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$
(ii) $\lim_{|\xi| \to +\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) = \lim_{|\xi| \to +\infty} \mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) = 0$
(iii) *$\mathcal{F}(f)$ a $\mathcal{F}^{-1}(f)$ jsou stejnoměrně spojité na $\mathbb{R}^N$.*

Důkaz. Spojitost $\mathcal{F}(f)$ a $\mathcal{F}^{-1}(f)$ je důsledkem Věty o spojitosti integrálu podle parametru (Věta 15.10.1), kde za majorantu bereme funkci $|f|$. Příslušnost do $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ a nerovnosti v části (i) plynou z odhadů typu

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(f)(\xi)| &= \Big| \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)} \, \mathrm{d}x \Big| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)}| \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)| \, \mathrm{d}x = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

Vlastnosti uvedené ve (ii) mají podle Schwartzovy věty (Věta 21.2.14) funkce z $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Díky hustotě $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ v $L^1(\mathbb{R}^N)$ dokážeme pro každé $\varepsilon > 0$ najít $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ takové, že $\|f - g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$. Nutně pak existuje $R > 0$ takové, že pro všechna $\xi \in \mathbb{R}^N$ splňující $|\xi| > R$ platí

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(f)(\xi)| &= |\mathcal{F}(f - g)(\xi) + \mathcal{F}(g)(\xi)| \leq |\mathcal{F}(f - g)(\xi)| + |\mathcal{F}(g)(\xi)| \\ &\leq \|f - g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + |\mathcal{F}(g)(\xi)| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Analogicky dokážeme, že $\lim_{|\xi| \to +\infty} \mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) = 0$.

Podobně se dokáže i část (iii), neboť podle Schwartzovy věty (Věta 21.2.14) pro $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ máme $\mathcal{F}(g) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, což je stejnoměrně spojitá funkce (skutečně, k zadanému $\varepsilon > 0$ existuje $R > 0$ takové, že $|\mathcal{F}(g)| < \varepsilon$ na $\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)$, a zároveň je $\mathcal{F}(g)$ spojitá na $\overline{B}_{2R}(0)$, tedy stejnoměrně spojitá na $\overline{B}_{2R}(0)$). □

Nyní se budeme zabývat otázkou, nakolik je $\mathcal{F}^{-1}$ inverzním zobrazením k $\mathcal{F}$ na $L^1(\mathbb{R}^N)$. Podle Příkladu 21.3.1 na $L^1(\mathbb{R}^N)$ nemůžeme získat výsledek srovnatelný se Schwartzovou větou (Věta 21.2.14) na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Lze však získat uvedený typ tvrzení pro jistou podmnožinu $L^1(\mathbb{R}^N)$. Nejprve si odvodíme jeden pomocný výsledek, který zobecňuje Fundamentální lemma variačního počtu (Lemma 13.3.3).

Lemma 21.3.5. *Nechť $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ a pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ platí*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f\varphi \,\mathrm{d}x = 0.$$

Pak $f = 0$ skoro všude na $\mathbb{R}^N$.

Důkaz. Uvažujme konvoluční zhlazení funkce

$$f_k(x) := (f \star \omega_k)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \omega_k(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Připomeňme, že $\omega_k(x) := k^N\omega(kx)$, kde $\omega \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ je regularizátor. Podle předpokladu pak platí

$$f_k \equiv 0 \qquad \text{na } \mathbb{R}^N.$$

Zároveň podle Věty o vlastnostech zhlazení funkce (Věta 16.5.6) máme $f_k \to f$ skoro všude na $\mathbb{R}^N$, z čehož plyne dokazovaná vlastnost. □

Věta 21.3.6 (O inverzi na $L^1(\mathbb{R}^N)$)**.** *Nechť $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ a $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Pak $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f$ skoro všude na $\mathbb{R}^N$. Speciálně pokud $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ a $\mathcal{F}(f) \equiv 0$ na $\mathbb{R}^N$, pak $f = 0$ skoro všude na $\mathbb{R}^N$.*

Důkaz. Protože $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R}^N)$, je funkce $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))$ dobře definovaná na $\mathbb{R}^N$ a podle Věty o vlastnostech Fourierovy transformace na $L^1(\mathbb{R}^N)$ (Věta 21.3.4) platí $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Zafixujme nyní $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Pak

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))\varphi\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}(f)\mathcal{F}^{-1}(\varphi)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} f\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\varphi))\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} f\varphi\,\mathrm{d}x$$

Poslední rovnost plyne ze Schwartzovy věty (Věta 21.2.14), ostatní rovnosti využívají rovnosti z páté části Věty o základních vlastnostech Fourierovy transformace (Věta 21.2.10) a Poznámku 21.2.12. Proto

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) - f)\varphi\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

Odtud díky Lemmatu 21.3.5 dostáváme dokazované tvrzení. □

Poslední větu je možné v jednodimenzionálním případě zesílit.

Věta 21.3.7 (O bodové rovnosti pro Fourierovu transformaci)**.** *Nechť $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}$ a platí*
(i) *existují vlastní limity $f(x_0+)$ a $f(x_0-)$*
(ii) *existují taková čísla $\alpha \in (0,1]$ a $\delta, M > 0$, že*

$$|f(x) - f(x_0+)| \le M|x-x_0|^\alpha \qquad \textit{pro } x \in (x_0, x_0+\delta)$$
$$|f(x) - f(x_0-)| \le M|x-x_0|^\alpha \qquad \textit{pro } x \in (x_0-\delta, x_0).$$

Pak

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0+) + f(x_0-))$$

s konvencí, že integrál v definici $\mathcal{F}^{-1}$ chápeme jako

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \,\mathrm{d}\xi := \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \dots \,\mathrm{d}\xi.$$

Důkaz. Důkaz provedeme tak, že zadanou funkci f rozložíme na tři funkce s vhodnými vlastnostmi a výsledek dokážeme pro tyto funkce jednotlivě. Pro funkci f pak výsledek bude plynout z linearity integrálů vyskytujících se na levé straně dokazované rovnosti.

Krok 1: rozklad funkce f
Definujme

$$f_1(x) := \frac{1}{2}(f(x_0+) + f(x_0-))\mathrm{e}^{-(x-x_0)^2},$$

$$f_2(x) := \frac{1}{2}(f(x_0+) - f(x_0-))\,\mathrm{sign}(x - x_0)\mathrm{e}^{-(x-x_0)^2}$$

a

$$f_3(x) := f(x) - f_1(x) - f_2(x).$$

Povšimněme si ještě, že zápis třetí funkce je možné zjednodušit na $f_3(x) = f(x) - g(x)$, kde

$$g(x) := \begin{cases} f(x_0+)\mathrm{e}^{-(x-x_0)^2} & \text{pro } x > x_0 \\ 0 & \text{pro } x = x_0 \\ f(x_0-)\mathrm{e}^{-(x-x_0)^2} & \text{pro } x < x_0. \end{cases}$$

Krok 2: Důkaz pro funkci f_1
Pro první funkci máme $f_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Můžeme proto na ni použít Schwartzovu větu (Věta 21.2.14) a dostáváme

$$\begin{aligned} f_1(x_0) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f_1))(x_0) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi x_0\xi} \Big(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi y\xi} f_1(y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}\xi \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi x_0\xi} \Big(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi y\xi} f_1(y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}\xi, \end{aligned}$$

kde poslední rovnost plyne z Lebesgueovy věty o majorizované konvergenci (Věta 15.8.17), s majorantou $\xi \mapsto |\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi y\xi} f_1(y)\,\mathrm{d}y|$, jejíž příslušnost do $L^1(\mathbb{R})$ plyne z toho, že funkce $\xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi y\xi} f_1(y)\,\mathrm{d}y = \mathcal{F}(f_1)(\xi)$ patří do $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Krok 3: Důkaz pro funkci f_2
Pro každé $n > 0$ počítejme (korektnost použitých úprav zdůvodníme pod výpočtem)

$$\begin{aligned} I_n(f_2) :&= \int_{-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi x_0\xi} \Big(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi y\xi} f_2(y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}} f_2(y) \Big(\int_{-n}^{n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(y-x_0)\xi}\,\mathrm{d}\xi \Big)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_2(y) \Big[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(y-x_0)\xi}}{-\mathrm{i}2\pi(y-x_0)} \Big]_{-n}^{n}\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} f_2(y) \frac{\sin(2\pi n(y-x_0))}{\pi(y-x_0)}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_2(t+x_0) \frac{\sin(2\pi nt)}{\pi t}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Fubiniho větu (Věta 15.11.2) na prvním řádku jsme byli oprávněni použít díky tomu, že

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi x_0\xi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi y\xi}f_2(y)| = |f_2(y)|$$

a funkce $(y,\xi) \mapsto f_2(y)$ patří do $L^1(\mathbb{R}\times(-n,n))$.

Dosadíme-li do získaného vzorce předpis pro funkci f_2, dostáváme

$$\begin{aligned} I_n(f_2) &= \frac{1}{2}(f(x_0+) - f(x_0-))\Big(-\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-t^2}\frac{\sin(2\pi nt)}{\pi t}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\frac{\sin(2\pi nt)}{\pi t}\,\mathrm{d}y\Big) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Na druhou stranu máme

$$\frac{1}{2}(f_2(x_0+) + f_2(x_0-)) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}(f(x_0+) - f(x_0-)) - \frac{1}{2}(f(x_0+) - f(x_0-))\Big) = 0.$$

Proto i pro funkci f_2 platí požadovaná rovnost.

Krok 4: Důkaz pro funkci f_3

Nejprve si povšimněme, že platí

$$f_3(x_0+) = f_3(x_0-) = 0$$

a navíc, protože funkce $x \mapsto \mathrm{e}^{-(x-x_0)^2}$ je lipschitzovská na $\mathbb{R}$, i pro funkci f_3 platí podmínka (ii) ze znění věty (změní se však parametry M a δ), která zde má speciální tvar

$$|f_3(x)| \le M|x-x_0|^\alpha \qquad \text{pro } x \in (x_0-\delta, x_0+\delta).$$

I tentokrát pracujeme s funkcí z $L^1(\mathbb{R})$, a proto můžeme psát

$$I_n(f_3) := \int_{-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi x_0\xi}\Big(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi y\xi} f_3(y)\,\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}} f_3(t+x_0)\frac{\sin(2\pi nt)}{\pi t}\,\mathrm{d}t.$$

Integrál napravo nyní rozdělíme na dvě části. Předně díky vlastnostem funkce f_3 uvedeným výše můžeme k zadanému $\varepsilon > 0$ nalézt $\widetilde{\delta} \in (0,\delta)$ tak malé, že platí

$$\begin{aligned} \Big|\int_{-\widetilde{\delta}}^{\widetilde{\delta}} f_3(t+x_0)\frac{\sin(2\pi nt)}{\pi t}\,\mathrm{d}t\Big| &\le \int_{-\widetilde{\delta}}^{\widetilde{\delta}} |f_3(t+x_0)|\frac{1}{\pi|t|}\,\mathrm{d}t \\ &\le \int_{-\widetilde{\delta}}^{\widetilde{\delta}} \frac{M}{\pi}|t|^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t = \frac{2M}{\pi}\frac{\widetilde{\delta}^\alpha}{\alpha} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Definujme nyní funkci

$$h(t) := \frac{f_3(t+x_0)}{\pi t}\chi_{\mathbb{R}\setminus(-\widetilde{\delta},\widetilde{\delta})}.$$

Pak zřejmě $h \in L^1(\mathbb{R})$. Povšimněme si ještě, že máme

$$\mathcal{F}(h)(n) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi yn}h(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \big(\cos(2\pi yn) - \mathrm{i}\sin(2\pi yn)\big)h(y)\,\mathrm{d}y.$$

Odtud

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}\setminus(-\widetilde{\delta},\widetilde{\delta})} f_3(t+x_0)\frac{\sin(2\pi nt)}{\pi t}\,\mathrm{d}t &= \int_{\mathbb{R}} \sin(2\pi tn)h(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\operatorname{Im}(\mathcal{F}(\operatorname{Re} h)(\xi)) - \mathrm{i}\operatorname{Im}(\mathcal{F}(\operatorname{Im} h)(\xi)).\end{aligned}$$

Proto díky druhé části Věty o vlastnostech Fourierovy transformace na $L^1(\mathbb{R}^N)$ (Věta 21.3.4) dostáváme

$$\int_{\mathbb{R}\setminus(-\widetilde{\delta},\widetilde{\delta})} f_3(t+x_0)\frac{\sin(2\pi nt)}{\pi t}\,\mathrm{d}t \overset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Celkově máme

$$\lim_{n\to+\infty} I_n(f_3) = 0 = \frac{1}{2}(f_3(x_0+) + f_3(x_0-)).$$

Tím je důkaz dokončen. □

21.4 Fourierova transformace na $L^2(\mathbb{R}^N)$

Tentokrát konstrukci založíme na Plancherelově rovnosti, kterou nám pro funkce z $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ poskytuje Věta o vlastnostech Fourierovy transformace na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ (Věta 21.2.16), a na hustotě funkcí z $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ v $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Stačí totiž pro každou funkci $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ vzít posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ takovou, že $f_n \to f$ v $L^2(\mathbb{R}^N)$. Díky Plancherelově rovnosti

$$\|f_m - f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\mathcal{F}(f_m - f_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\mathcal{F}(f_m) - \mathcal{F}(f_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

pak cauchyovskost posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ v $L^2(\mathbb{R}^N)$ implikuje cauchyovskost posloupnosti $\{\mathcal{F}(f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ v $L^2(\mathbb{R}^N)$. Díky tomu existuje funkce $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ taková, že

$$\mathcal{F}(f_n) \to g \qquad \text{v } L^2(\mathbb{R}^N).$$

Ukažme ještě, že funkce g nezávisí na volbě aproximující posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Nechť $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ je druhá taková posloupnost. Jako výše dostaneme, že existuje $\widetilde{g} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ taková, že $\mathcal{F}(h_n) \to \widetilde{g}$ v $L^2(\mathbb{R}^N)$. Nyní stačí stejný proces aplikovat ještě na posloupnost

$$f_1, h_1, f_2, h_2, f_3, h_3, \ldots$$

a využít jednoznačnost limity.

Díky předchozí konstrukci je korektní následující definice Fourierovy transformace na $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Definice 21.4.1 (Fourierova transformace na $L^2(\mathbb{R}^N)$)**.** Nechť $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Pak Fourierovu transformaci funkce f definujeme jako

$$\mathcal{F}(f) := \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}(f_n),$$

kde $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ je libovolná posloupnost splňující $f_n \to f$ v $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Doposud jsme si představili tři přístupy k Fourierově transformaci. Z úvah uvedených před definicí je jasně vidět, že pro funkce z $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ dává naše definice totéž co definice na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Naopak otázka, zda na $L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ definice pro prostor $L^1(\mathbb{R}^N)$ a pro prostor $L^2(\mathbb{R}^N)$ dávají stejnou funkci, je netriviální.

Věta 21.4.2 (O kompatibilitě definic Fourierovy transformace)**.** *Nechť funkce $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$. Pak definice Fourierovy transformace pro prostor $L^1(\mathbb{R}^N)$ a pro prostor $L^2(\mathbb{R}^N)$ dávají stejnou funkci.*

Důkaz. Důkaz rozdělíme do dvou kroků. Nejprve ukažme, že pro každou funkci $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ existuje taková posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, že

$$f_n \to f \quad \text{v } L^1(\mathbb{R}^N) \qquad \text{a} \qquad f_n \to f \quad \text{v } L^2(\mathbb{R}^N).$$

Opět využijeme konvoluční zhlazování. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme

$$f_n := (f\chi_{B_n(0)}) \star \omega_n.$$

Pak díky Větě o vlastnostech zhlazení funkce (Věta 16.5.6) pro obě $p \in \{1,2\}$ máme

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} &= \|(f\chi_{B_n(0)}) \star \omega_n - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&\le \|(f\chi_{B_n(0)} - f) \star \omega_n + f \star \omega_n - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&\le \|f\chi_{B_n(0)} - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|f \star \omega_n - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \overset{n\to\infty}{\to} 0
\end{aligned}$$

(vlastnost $\|f\chi_{B_n(0)} - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ nám dává Lebesgueova věta o majorizované konvergenci, tedy Věta 15.8.17). Proto má posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ všechny požadované vlastnosti.

Nyní přistupme k hlavnímu kroku důkazu. Budeme pracovat s právě zkonstruovanou posloupností, přičemž začneme od definice Fourierovy transformace v $L^2(\mathbb{R}^N)$ (Definice 21.4.1) a po úpravě použijeme první část Věty o vlastnostech Fourierovy transformace na $L^1(\mathbb{R}^N)$ (Věta 21.3.4). Pro všechna $\xi \in \mathbb{R}^N$ dostáváme

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_n(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)}\,\mathrm{d}x \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (f_n(x) - f(x)) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)}\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)}\,\mathrm{d}x \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)}\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

což jsme chtěli ukázat. □

Poznámka 21.4.3. Analogie ke všemu, co bylo dosud uvedeno o Fourierově transformaci na $L^2(\mathbb{R}^N)$, samozřejmě platí i pro inverzní Fourierovu transformaci.

Nyní si ukážeme, že Fourierova transformace má na prostoru $L^2(\mathbb{R}^N)$ několik příjemných vlastností, které na prostoru $L^1(\mathbb{R}^N)$ neměla.

Věta 21.4.4 (O vlastnostech Fourierovy transformace na $L^2(\mathbb{R}^N)$)**.** *Přímá i inverzní Fourierova transformace jsou prostá spojitá lineární zobrazení prostoru $L^2(\mathbb{R}^N)$ na $L^2(\mathbb{R}^N)$, která jsou navzájem inverzní. Tato zobrazení navíc zachovávají skalární součin, speciálně platí Plancherelova rovnost*

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\mathcal{F}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\mathcal{F}^{-1}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Důkaz. Připomeňme, že podle Věty o vlastnostech Fourierovy transformace na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ (Věta 21.2.10) máme zachování skalárního součinu (potažmo Plancherelovu rovnost) při Fourierově transformaci a inverzní Fourierově transformaci pro funkce z $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Díky spojitosti skalárního součinu odtud dostáváme stejné vlastnosti i v obecném případě, neboť pro $\{f_n\}_{n=1}^\infty, \{g_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, kde $f_n \to f$ v $L^2(\mathbb{R}^N)$ a $g_n \to g$ v $L^2(\mathbb{R}^N)$, máme

$$(f, g) \leftarrow (f_n, g_n) = (\mathcal{F}(f_n), \mathcal{F}(g_n)) \to (\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g)).$$

Linearita Fourierovy transformace plyne z linearity limitního procesu v její definici. Prostota plyne z linearity a Plancherelovy rovnosti, neboť

$$\|\mathcal{F}(f) - \mathcal{F}(g)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\mathcal{F}(f - g)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|f - g\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Spojitost plyne ze stejného odhadu aplikovaného na funkce f_n, f, kde $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset L^2(\mathbb{R}^N)$ a $f_n \to f$ v $L^2(\mathbb{R}^N)$. Analogicky pro inverzní Fourierovu transformaci.

Dále k zadané funkci $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ sestrojme posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, pro kterou platí $f_n \to f$ v $L^2(\mathbb{R}^N)$. Díky spojitosti přímé a inverzní Fourierovy transformace pak máme

$$\mathcal{F}(f_n) \to \mathcal{F}(f) \quad \text{v } L^2(\mathbb{R}^N) \qquad \text{a} \qquad \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f_n)) \to \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) \quad \text{v } L^2(\mathbb{R}^N).$$

Odtud díky Schwartzově větě (Věta 21.2.14) dostáváme

$$f \leftarrow f_n = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f_n)) \to \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)),$$

tedy $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f$ (rovnost v prostoru $L^2(\mathbb{R}^N)$). Analogicky se dokáže rovnost $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f)) = f$. Navíc zde vidíme, že oborem hodnot obou transformací musí být celé $L^2(\mathbb{R}^N)$. □

Důsledek 21.4.5. *Nechť $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, pak (následující rovnost chápeme ve smyslu rovnosti na $L^2(\mathbb{R}^N)$)*

$$\mathcal{F}(f) = \lim_{R\to\infty} \int_{B_R(0)} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)}\, \mathrm{d}x.$$

Důkaz. Uvažujme posloupnost poloměrů $\{R_n\}_{n=1}^\infty \subset (0, \infty)$ splňující $R_n \to +\infty$ a definujme

$$f_n := f\chi_{B_{R_n}(0)}.$$

Pak $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ a $f_n \to f$ v $L^2(\mathbb{R}^N)$ (podle Lebesgueovy věty o majorizované konvergenci, tedy Věty 15.8.17). Navíc podle Věty o kompatibilitě definic Fourierovy transformace (Věta 21.4.2) máme

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f) &= \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}(f_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_n(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{B_{R_n}(0)} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Protože limita existuje pro každou volbu posloupnosti $\{R_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0,\infty)$ splňující $R_n \to \infty$, dostáváme, že tato limita je pokaždé stejná a platí limita ve spojité proměnné (podle Heineho věty, tedy Věty 5.4.1). □

Poznámka 21.4.6. Vlastnosti Fourierovy transformace uvedené v Lemmatu o základních vztazích pro Fourierovu transformaci (Lemma 21.2.4), Lemmatu o zachování parity při Fourierově transformaci (Lemma 21.2.7) a Lemmatu o zachování radiální symetrie při Fourierově transformaci (Lemma 21.2.8) je možné přenést z $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ na $L^2(\mathbb{R}^N)$ beze změny.

Věta o základních vlastnostech Fourierovy transformace (Věta 21.2.10) se při zobecnění do $L^2(\mathbb{R}^N)$ opět jeví jako problematická. Kupříkladu o konvoluci dvou funkcí z $L^2(\mathbb{R}^N)$ víme jen, že leží v $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, což je prostor, pro jehož prvky obecně nemáme zaručenu existenci Fourierovy transformace.

21.5 Aplikace Fourierovy transformace

Nyní si ukážeme, jak se dá Fourierova transformace používat při řešení diferenciálních rovnic. Součástí těchto řešení je vždy počítání Fourierových transformací funkcí, které ve studovaných rovnicích vystupují. Zde se často využívá teorie spjatá s Reziduovou větou (Věta 20.8.17).

Příklad 21.5.1. Spočítejme $\mathcal{F}(\frac{x}{x^2+1})$. Nejprve si povšimněme, že transformovaná funkce $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ neleží v $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, neleží ani v $L^1(\mathbb{R})$, ale leží v $L^2(\mathbb{R})$. Podle výše uvedeného důsledku máme

$$\mathcal{F}\Big(\frac{x}{x^2+1}\Big)(\xi) = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x}{x^2+1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi x\xi}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pro } \xi \in \mathbb{R}.$$

Jedná se o integrál typu, který jsme si představili v aplikacích Reziduové věty (Věta 20.8.17) jako $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x} R(x)\,\mathrm{d}x$ s řešením ve tvaru

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x} R(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i} \sum_{\{j\in\{1,\dots,k\}:\ \operatorname{Im} a_j>0\}} \operatorname{Res}_{a_j} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z} R(z) & \text{pro } \alpha > 0 \\ -2\pi\mathrm{i} \sum_{\{j\in\{1,\dots,k\}:\ \operatorname{Im} a_j<0\}} \operatorname{Res}_{a_j} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z} R(z) & \text{pro } \alpha < 0, \end{cases}$$

kde body $\{a_1,\dots,a_k\} \subset \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0\}$ jsou všechny kořeny polynomu ve jmenovateli. V našem případě proto máme pro $\xi < 0$

$$\mathcal{F}\Big(\frac{x}{x^2+1}\Big)(\xi) = 2\pi\mathrm{i} \operatorname{Res}_{\mathrm{i}} \frac{z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi z\xi}}{z^2+1} = 2\pi\mathrm{i} \frac{z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi z\xi}}{(z^2+1)'}\Big|_{z=\mathrm{i}} = \pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{2\pi\xi}$$

a pro $\xi > 0$ (šlo by také využít lichost funkce f)

$$\mathcal{F}\Big(\frac{x}{x^2+1}\Big)(\xi) = -2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{-\mathrm{i}}\,\frac{z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi z\xi}}{z^2+1} = -2\pi\mathrm{i}\frac{z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi z\xi}}{(z^2+1)'}|_{z=-\mathrm{i}} = -\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{-2\pi\xi}.$$

Celkově (triviálně máme $\mathcal{F}(\frac{x}{x^2+1})(0) = 0$)

$$\mathcal{F}\Big(\frac{x}{x^2+1}\Big)(\xi) = -\pi\mathrm{i}\,\mathrm{sign}\,\xi\mathrm{e}^{-2\pi|\xi|} \qquad \text{pro všechna } \xi \in \mathbb{R}.$$

Příklad 21.5.2. Hledejme řešení diferenciální rovnice

$$y'' - y = \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Předpokládejme, že existuje funkce $y \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, která uvedenou rovnici splňuje. Pak podle Věty o základních vlastnostech Fourierovy transformace (Věta 21.2.10) máme

$$(2\pi\mathrm{i}\xi)^2\mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(y) = \mathcal{F}(y'' - y) = \mathcal{F}(\mathrm{e}^{-x^2}).$$

Proto

$$\mathcal{F}(y) = -\frac{\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-x^2})}{1+(2\pi\xi)^2} = -\frac{\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\pi^2\xi^2}}{1+(2\pi\xi)^2}$$

(druhou rovnost nám dává Příklad 21.2.3; tento výsledek nebudeme dále používat, máme jej jen pro kontrolu, že nám vyšla funkce ze Schwartzova prostoru). Odtud a z Věty o základních vlastnostech Fourierovy transformace na $L^1(\mathbb{R}^N)$ (Věta 21.3.2; tuto větu používáme kvůli tomu, že jedna z funkcí v konvoluci neleží ve Schwartzově prostoru) dostáváme

$$y = -\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-x^2})}{1+(2\pi\xi)^2}\Big) = -\mathrm{e}^{-x^2} \star \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{1}{1+(2\pi\xi)^2}\Big).$$

Spočítejme proto ještě

$$\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{1}{1+(2\pi\xi)^2}\Big) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(2\pi\xi)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\xi x}\,\mathrm{d}\xi.$$

Opět se jedná o integrál typu $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}R(x)\,\mathrm{d}x$. Proto dostáváme pro $x > 0$

$$\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{1}{1+(2\pi\xi)^2}\Big) = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{\frac{\mathrm{i}}{2\pi}}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi zx}}{1+(2\pi z)^2} = 2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi zx}}{8\pi^2 z}|_{z=\frac{\mathrm{i}}{2\pi}} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

K prodloužení tentokrát použijme sudost a spojitost obrazu při inverzní Fourierově transformaci. Dostáváme

$$\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{1}{1+(2\pi\xi)^2}\Big) = \frac{\mathrm{e}^{-|x|}}{2} \qquad \text{na } \mathbb{R}.$$

Celkově máme

$$y(x) = -\mathrm{e}^{-x^2} \star \frac{\mathrm{e}^{-|x|}}{2} = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-|x-t|}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Poznámka 21.5.3. Naše omezení se na hledání řešení ze Schwartzova prostoru sehrálo podobnou roli jako volba počáteční podmínky, neboť znamená

$$0 = \lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to-\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} y'(x) = \lim_{x\to-\infty} y'(x) = \dots .$$

Ještě jasněji je vidět, že některá řešení není možné pomocí Fourierovy transformace nalézt, pokud bychom pracovali s diferenciální rovnicí

$$y'' + y = \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Pak bychom totiž sledováním postupu uvedeného výše došli ke vzorci

$$\mathcal{F}(y) = \frac{\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-x^2})}{1-(2\pi\xi)^2} = \frac{\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\pi^2\xi^2}}{1-(2\pi\xi)^2}.$$

Funkce úplně napravo není spojitá, proto není Fourierovým obrazem žádné funkce z $L^1(\mathbb{R})$. Dokonce ani neleží v $L^2(\mathbb{R})$, a proto není ani obrazem žádné funkce z $L^2(\mathbb{R})$. Na druhou stranu Věta o globální existenci a jednoznačnosti pro rovnici n-tého řádu (Věta 8.5.1) nám říká, že pro každou počáteční podmínku existuje řešení uvedené rovnice na $\mathbb{R}$.

Někomu se může zdát výsledek ve tvaru konvoluce dvou funkcí jako poněkud neuspokojivý. Musíme se však smířit s tím, že řešení některých komplikovanějších úloh má podstatně jednodušší zápis pomocí konvoluce než pomocí skládání a aritmetických operací s elementárními funkcemi. Někdy se řešení dokonce pomocí skládání a aritmetických operací s elementárními funkcemi nedá vyjádřit vůbec.

Příklad 21.5.4. Hledejme řešení počáteční úlohy

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 && \text{na } (0,T)\times\mathbb{R}^N \\ u(0,x) &= u_0(x) && \text{na } \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

Tentokrát budeme provádět Fourierovu transformaci pouze v prostorové proměnné x (vždy pro pevné $t \in [0,T]$). Pro jednoduchost pišme $\mathcal{F}(u) =: U$ a $\mathcal{F}(u_0) =: U_0$. Otázku, zda opravdu můžeme prohodit derivaci podle času a integrál (tedy Fourierovu transformaci) odložíme na konec příkladu. Pak máme

$$\begin{aligned} U_t(t,\xi) + 4\pi^2|\xi|^2 U(t,\xi) &= 0 \\ U(0,\xi) &= U_0(\xi). \end{aligned}$$

Pro každé $\xi \in \mathbb{R}^N$ jsme dostali lineární diferenciální rovnici prvního řádu s jednoznačným řešením

$$U(t,\xi) = U_0(\xi)\mathrm{e}^{-4\pi^2|\xi|^2 t}.$$

Odtud a z Příkladu 21.2.3 dostáváme

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \mathcal{F}^{-1}(U(t,\xi))(x) = \mathcal{F}^{-1}(U_0(\xi)\mathrm{e}^{-4\pi^2|\xi|^2 t})(x) \\ &= \mathcal{F}^{-1}(U_0(\xi))(x) \star \mathcal{F}^{-1}(\mathrm{e}^{-4\pi^2|\xi|^2 t})(x) = u_0(x) \star \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}} \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Nyní se vrátíme k otázce, zda byl postup oprávněný. Protože máme, že řešení $u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}(U(t,\xi))(x)$, stačí ověřit, že takto definované zobrazení $t \mapsto u(t,x)$ je diferencovatelné pro každé $t > 0$, splňuje naši rovnici a $\lim_{t\to 0_+} u(t,x) = u_0(x)$. Otázka diferencovatelnosti podle časové proměnné je pro libovolné $t > 0$ pro $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ (nebo i $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$) přímým důsledkem Věty o derivaci integrálu podle parametru (Věta 15.10.3), protože pro libovolné $t \geq t_0 > 0$ je (pro případ $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$)

$$\Big|\frac{\partial}{\partial t}\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(x,\xi)}\mathrm{e}^{-4\pi^2|\xi|^2 t}U_0(\xi)\Big)\Big| \leq |U_0(\xi)| 4\pi^2|\xi|^2\mathrm{e}^{-4\pi^2|\xi|^2 t_0},$$

přičemž funkce na pravé straně je integrovatelná. Ostatní předpoklady uvedené věty jsou zřejmě splněny. Pro $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ je třeba ještě použít Hölderovu nerovnost. Proto dostáváme, že

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\partial}{\partial t}U(t,\xi)\Big)(x),$$

a tedy

$$\mathcal{F}\Big(\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)\Big)(\xi) = \frac{\partial}{\partial t}U(t,\xi) = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}(u(t,x))(\xi).$$

Z vlastností konvoluce přímo plyne, že funkce $u(t,x)$ je diferencovatelná (libovolného řádu) podle proměnné x pro $t > 0$ a platí

$$\Delta u(t,x) = u_0(x) \star \Delta \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

tedy

$$\mathcal{F}(\Delta u(t,x))(\xi) = -4\pi^2|\xi|^2\mathcal{F}(u(t,x))(\xi).$$

Proto

$$\Delta u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}(-4\pi^2|\xi|^2\mathcal{F}(u(t,x))(\xi))(x) = \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\partial}{\partial t}U(t,\xi)\Big)(x) = \frac{\partial}{\partial t}u(t,x).$$

Tedy za výše uvedených podmínek na počáteční podmínku u_0 funkce u řeší naši původní rovnici.

O něco těžší je ukázat splnění počáteční podmínky. Můžeme se pokusit použít Větu o spojitosti integrálu závislého na parametru (Věta 15.10.1). Opět jediná těžší podmínka, kterou musíme ověřit, je

$$\Big|\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(x,\xi)}U_0(\xi)\Big| \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

To je zřejmé například pro $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ nebo za předpokladu, že $U_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Použitím Věty o integrálech závislých na parametru pro zobecněný Lebesgueův integrál (Věta 15.13.4) by stačilo předpokládat, že $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$, ověření podmínek této věty je ale technicky komplikovanější a navíc není možné větu použít přímo. Dostali jsme tedy

$$\lim_{t\to 0_+} u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}(\lim_{t\to 0_+} U(t,\xi))(x) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(u_0)(\xi))(x) = u_0(x).$$

Samozřejmě lze i diferencovatelnost pro $t > 0$ a spojitost pro $t = 0$ ověřit přímým výpočtem pro funkci u, to ponecháváme případným zájemcům jako cvičení. V příštím díle skript si pak ukážeme, že podmínky na funkci u_0 se dají podstatně zeslabit.

Literatura

[AmEs An] AMMAN, H. a ESCHER, J.: *Analysis I,II,III.* Birkhäuser Verlag, Basel, 2005.

[Ap MA] APOSTOL, T.M.: *Mathematical Analysis.* Narosa Publishing House, New Delhi, 1997 (16. reprint).

[BaSt TeMno] BALCAR, B. a ŠTĚPÁNEK, P.: *Teorie množin.* Academia, Praha, 2005 (2. vydání).

[BrSaSo MeKo] BRDIČKA, M., SAMEK, L. a SOPKO B.: *Mechanika kontinua.* Academia, Praha, 2000.

[Ca] CARLESON, L.: *On convergence and growth of partial sums of Fourier series*, Acta Mathematica, 116 (1): 135–157 (1966).

[Ce] ČERNÝ, I.: *Analýza v komplexním oboru*, Academia, Praha, 1983.

[De] DĚMIDOVIČ, B.P.: *Sbírka a cvičení z matematické analýzy.* Fragment, Praha, 2003.

[Di An] DIEDONNÉ, J.: *Foundation of Modern Analysis.* Academic Press, New York–London, 1960.

[Ja DPI] JARNÍK, V.: *Diferenciální počet I.* Academia, Praha, 1976 (3. vydání).

[Ja DPII] JARNÍK, V.: *Diferenciální počet II.* Academia, Praha, 1976 (3. vydání).

[Ja IPI] JARNÍK, V.: *Integrální počet I.* Academia, Praha, 1976 (3. vydání).

[Ja IPII] JARNÍK, V.: *Integrální počet II.* Academia, Praha, 1976 (3. vydání).

[Ko MA I] KOPÁČEK, J.: *Matematická analýza pro fyziky I.* Matfyzpress, Praha, 2002.

[Ko MA II] KOPÁČEK, J.: *Matematická analýza pro fyziky II.* Matfyzpress, Praha, 2002.

[Ko MA III] KOPÁČEK, J.: *Matematická analýza pro fyziky III.* Matfyzpress, Praha, 2003.

[Ko MA IV] KOPÁČEK, J.: *Matematická analýza pro fyziky IV.* Matfyzpress, Praha, 2003.

[Ci MA V] ČIHÁK, P. a kol. : *Matematická analýza pro fyziky V.* Matfyzpress, Praha, 2001.

[Ko Pr I] KOPÁČEK, J. a kol.: *Příklady z matematiky pro fyziky I.* Matfyzpress, Praha, 2002.

[Ko Pr II] KOPÁČEK, J. a kol.: *Příklady z matematiky pro fyziky II.* Matfyzpress, Praha, 2003.

[Ko Pr III] KOPÁČEK, J. a kol.: *Příklady z matematiky pro fyziky III.* Matfyzpress, Praha, 2003.

[Ko Pr IV] KOPÁČEK, J. a kol.: *Příklady z matematiky pro fyziky IV.* Matfyzpress, Praha, 2003.

[Ko Pr V] KOPÁČEK, J. a kol.: *Příklady z matematiky pro fyziky V.* Matfyzpress, Praha, 2003.

[La] LACEY, M.T.: *Carleson's theorem: proof, complements, variations*, Publicacions Matemàtiques, 48 (2): 251–307 (2004).

[Ru] RUDIN, W.: *Analýza v reálném a komplexním oboru*, Academia, Praha, 2003.

[SaZy] SACHS, S., ZYGMUND, A: *Analytic Functions*, Monografie Matematyczne, sv. 28, Warszawa, 1952.

[StSa AnI] STEIN, E.M. a SHAKARCHI, R.: *Fourier analysis. An introduction.* Princeton Lecture Notes in Analysis I, Princeton University Press, Princeton, New York, 2003.

[StSa AnII] STEIN, E.M. a SHAKARCHI, R.: *Complex analysis.* Princeton Lecture Notes in Analysis II, Princeton University Press, Princeton, New York, 2003.

[StSa AnIII] STEIN, E.M. a SHAKARCHI, R.: *Real analysis. Measure theory, integration and Hilbert spaces.* Princeton Lecture Notes in Analysis III, Princeton University Press, Princeton, New York, 2005.

Příloha A

Významní matematici 4

Tato příloha obsahuje základní informace o některých matematicích a fyzicích, jejichž výsledky se týkají čtvrtého dílu skript. Pro čtenářovu pohodlnost jsme ponechali i ta jména, která se týkají pouze předchozích tří dílů.

Niels Henryk Abel (1802 Frindöe, ostrov Finnøy–1829 Arendal)

Vystudoval univerzitu v Oslo, poté díky finanční podpoře jednoho z profesorů mohl pobývat v Kodani. Vládní stipendium mu později umožnilo strávit dva roky v Berlíně, Freiburgu a Paříži, finanční problémy ho ale donutily vrátit se zpět. Nakazil se tuberkulózou a zemřel dva dny předtím, než přišel dopis oznamující získání profesorského místa v Berlíně. Věnoval se řešení algebraických rovnic (dokázal, že rovnice vyšších než čtvrtého stupně nelze řešit přesně pomocí algebraických operací), objevil teorii grup a věnoval se eliptickým integrálům. Jeho jméno je také spojeno s kritériem pro neabsolutně konvergentní řady a integrály. Je po něm také pojmenována nejprestižnější matematická cena (Abelova cena).

Aristoteles ze Stageiry (384 př.n.l. Stageira–322 př.n.l. Chalkida)

Aristoteles je považován za zakladatele logiky jako vědy. Navázal především na svého učitele Platóna a jeho učitele Sokrata. Studoval v Platónově Akademii, později tam i vyučoval. Filip Makedonský ho povolal na svůj dvůr, aby se stal vychovatelem Alexandra Makedonského. Po Filipově smrti pak v Aténách založil vlastní filozofickou školu. Pokusil se obsáhnout celé tehdejší vědecké poznání a k tomu potřeboval mít přesně formulováno, jak správně uvažovat. Hlavním dílem je *Organon*, česky Nástroj.

Cesare Arzelà (1847 Santo Stefano di Magra–1912 Santo Stefano di Magra)

Studoval na Scuola Normale Superiore v Pise. Po dokončení studií učil na střední škole, ale vrátil se zpět do Pisy a pokračoval ve studiích. Působil krátce na Instituto Tecnico ve Florencii, na univerzitě v Palermu a v roce 1880 se přestěhoval do Bologně, kde působil po zbytek své kariéry. Je známý především svým zobecněním Ascoliho věty týkající se vztahu stejné spojitosti a stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí.

Giulio Ascoli (1843 Terst–1896 Milán)

Studoval na Scuola Normale Superiore v Pise. Poté působil celý život v Miláně. Věnoval se teorii reálných funkcí a Fourierovým řadám, zavedl pojem stejné spojitosti a byl autorem první verze tzv. Arzelà–Ascoliho věty týkající se stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí, kterou později zobecnil C. Arzelà.

Stefan Banach (1892 Krakov–1945 Lvov)

Nejslavnější polský matematik, vůdčí osobnost lvovské matematické školy, zakladatel funkcionální analýzy. Matka po jeho narození zmizela, otec ho příliš nepodporoval. Vychovával ho nejprve babička, poté Franciszka Płowa. Studoval na technice ve Lvově, teprve po setkání s H. Steinhausem se zaměřil na matematiku. Jeho doktorská práce obsahovala definici úplného normovaného prostoru, který se díky Fréchetovi nazývá prostorem Banachovým. Poté působil na univerzitě ve Lvově. Za sovětské okupace si díky dobrým vztahům se sovětskými matematiky zachoval své místo, za německé okupace byl vězněn a poté se živil mimo jiné krmením vší svou vlastní krví v německém výzkumném ústavu. Po skončení války se vrátil na univerzitu, setkal se se Sobolevem, ale brzy umírá na rakovinu plic. Jeho hlavním přínosem bylo systematické vybudování funkcionální analýzy. Kromě Banachových prostorů jsou po něm pojmenovány Banachovy algebry, Hahn–Banachova věta, Banach–Steinhausova věta, Banach–Alaogluova věta, Banach–Tarského věta či Banachova věta o pevném bodu.

Jacob Bernoulli (1655 Basilej–1705 Basilej)

Byl vynikajícím matematikem, profesorem na basilejské univerzitě, členem francouzské Královské akademie věd a berlínské Pruské akademie věd. Pocházel z rodiny bohatého obchodníka, proti vůli otce se místo teologie věnoval matematice a fyzice. Studoval infinitezimální počet z Leibnizova článku a později se Leibnize zastával ve sporu s Newtonem. Byl také učitelem svého mladšího bratra Johanna (a také svého synovce Nikolause), ale později se s ním rozešel a na vědeckém poli vedli četné spory. Věnoval se nekonečným řadám, diferenciálním rovnicím (je mimo jiné autorem metody separace proměnných a nalezl způsob řešení tzv. Bernoulliho rovnice), při studiu spojitého úročení dospěl k číslu e, formuloval důkaz pomocí matematické indukce, rozvinul variační počet (problém brachystochrony a izoperimetrický problém) a je pokládán za jednoho ze zakladatelů teorie pravděpodobnosti a statistiky.

Johann Bernoulli (1667 Basilej–1740 Basilej)

Mladší bratr Jacoba, též jeho žák, ale později se s ním rozešel a vedl s ním četné vědecké spory. V Paříži se seznámil s markýzem de l'Hospitalem, kterého vyučoval Leibnizově pojetí diferenciálního počtu a který ve své knize publikoval Johannovy výsledky; mimo jiné i slavné tzv. l'Hospitalovo pravidlo. Nastoupil na místo profesora matematiky do Groningenu a po bratrově smrti pak na jeho místo do Basileje. Ve sporu s Newtonem podporoval Leibnize, což ale vedlo k odmítání všech Newtonových myšlenek. Stal se členem akademií v Paříži, Berlíně, Londýně, Petrohradě a Bologni. Byl učitelem mladého Eulera. Věnoval se diferenciálním rovnicím, variačnímu počtu, ale i praktickým problémům jako je matematický popis pohybu plachetnic či optika. Napsal jednu z prvních učebnic hydrodynamiky, současně se svým synem Danielem, na kterého ale žárlil a i s ním se dostal do sporu.

Felix Bernstein (1878 Halle–1956 Curych)

Německý matematik židovského původu. Působil na univerzitě v Göttingenu, po nástupu Hitlera k moci emigroval do USA. Po 2. světové válce se vrátil do Evropy, žil v Římě a Freiburgu. Jeho hlavním výsledkem je tzv. Cantor–Bernsteinova věta (též nazývána Schröder–Bernsteinova věta) z teorie množin. Věnoval se i matematickým základům genetiky.

Friedrich Wilhelm Bessel (1784 Minden–1846 Königsberg)

Německý astronom a matematik. Po absolvování gymnázia začal pracovat ve firmě zabývající se zahraničním obchodem, ve volné čase se ale věnoval astronomií a upozornil na sebe díky zpřesnění výpočtu dráhy Halleyovy komety. Získal místo na observatoři v Lilienthalu, později pak v Königsbergu. Díky doporučení Gausse mu byl udělen čestný doktorát z univerzity v Göttingenu a stal se i profesorem astronomie. Jako první změřil roční paralaxu hvězdy (61 Cygni), což umožnilo určit její vzdálenost od Slunce. V matematice je jeho jméno spojeno s diferenciální rovnicí a jejím řešením (Besselovy rovnice a funkce), ke kterým dospěl při studiu gravitačního problému více těles. Jeho měření pomohla nalézt planetu Neptun, věnoval se také geodézii (referenční elipsoid, dnes nazývaný Besselův).

Jacques Philippe Marie Binet (1786 Rennes–1856 Paříž)

Francouzský matematik, fyzik a astronom. Věnoval se teorii čísel a maticovému počtu. Vystudoval École Polytechnique, kde posléze i působil. Dále vyučoval na Collége de France. Byl zvolen rytířem čestné legie a byl členem francouzské akademie vět. Kromě Cauchy–Binetovy formule našel explicitní vyjádření n-tého členu Fibonacciho řady.

Bernard Bolzano (1781 Praha–1848 Praha)

Český, ale německy mluvící matematik. Jeho otec pocházel z Itálie, matka byla Němka. Studoval soukromě matematiku a filozofii, na pražské univerzitě vystudoval teologii. Neuspěl ve snaze získat profesorskou pozici po Vydrovi, poté byl vysvěcen na kněze a na pražské univerzitě přednášel filozofii náboženství a byl univerzitním kazatelem v kostele Nejsvětějšího Salvátora. Pro své radikální názory byl v roce 1819 suspendován a odešel z Prahy. Zůstal však členem Královské české společnosti nauk, pro kterou pracoval i jako sekretář. Byl filozofem i matematikem současně, zabýval se problémy základů matematiky (logiky i matematické analýzy). Dokázal mnohé výsledky, které se dnes učí v základních kurzech analýzy, sestrojil dokonce spojitou funkci, která nemá derivaci v žádném bodě. Jako jeden z prvních si uvědomil, že všechny výsledky je třeba dokazovat a ne je brát jako zřejmé. Bohužel, kvůli problémům s publikováním jeho výsledky nebyly v matematické komunitě příliš známé a byly oceněny až po roce 1930, kdy byly vydány pod názvem *Functionenlehre*. Svou posmrtně vydanou prací *Paradoxien des Unendlichen* ovlivnil mimo jiné G. Cantora.

Émile Borel (1871 Saint-Affrique–1956 Paříž)

Francouzský matematik a politik, jeden ze zakladatelů teorie míry. Vystudoval na École Normale Supérieure v Paříži, jeho učitelem byl G. Darboux. Tři roky působil v Lille, poté na École Normale Supérieure a od roku 1909 se stal profesorem na pařížské Sorbonně. V letech 1924–1936 byl poslancem francouzského parlamentu a 1925–1940 ministrem námořnictva. V době vichistického režimu byl vězněn, poté se zapojil do hnutí odporu proti německé okupaci. Spolu s Henri Lebesguem je zakladatelem teorie míry, věnoval se její aplikaci v teorii pravděpodobnosti. Přispěl také k teorii her a věnoval se propojení geometrie a obecné teorie relativity. Jeho jméno je spojeno s borelovskými mírami, borelovskými množinami či borelovskými σ-algebrami.

Haïm Brezis (1944 Riom-ès-Montagnes–

Francouzský matematik, známý svými pracemi i učebnicemi funkcionální analýzy a parciálních diferenciálních rovnic. Vystudoval na pařížské Sorbonně pod vedením známého matematika Gustava Choqueta. Působí na Univerzitě Pierra a Marie Curie (známa jako Paris 6) a jako hostující profesor na Rutgersově univerzitě v USA.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 Petrohrad–1918 Halle)

Německý matematik a logik. Studoval v Curychu a Berlíně, působil na univerzitě v Halle. Věnoval se základům teorie množin, jako první si uvědomil, že je třeba rozlišovat mezi různými nekonečnými množinami. Ukázal, že nekonečné podmnožiny přirozených čísel jsou spočetné, ale reálná čísla jsou nespočetná. Zavedl pojmy kardinální a ordinální čísla, formuloval hypotézu kontinua, představil tzv. Cantorovo diskontinuum. Kvůli tomuto pojetí matematiky se dostal do ostrého sporu s L. Kroneckerem. Věnoval se také matematické analýze, například reprezentaci funkcí pomocí trigonometrických řad. Poslední léta jeho života byla poznamenána duševní chorobou.

Constantin Carathéodory (1873 Berlín–1950 Mnichov)

Německý matematik řeckého původu, jeho otec působil na tureckých ambasádách v Evropě a Constantin se narodil za jeho pobytu v Německu. Matematice se začal věnovat v Belgii, později dokončil studia v Německu, doktorát obhájil na univerzitě v Göttingenu. Chvíli zde i pracoval, později pak působil v Bonnu, Hanoveru, Vratislavi (Breslau)a Berlíně. Přijal nabídku řecké vlády a odešel učit do Atén, současně organizoval otevření univerzity ve Smyrně. Kvůli řecké okupaci města se mu univerzita otevřít nepodařila (zachránil ale univerzitní knihovnu) a později odešel do Mnichova, kde, kromě občasných návštěv USA, působil až do důchodu. Během Hitlerovy vlády se choval oportunisticky a udržoval kontakty s nacistickými pohlaváry. Významných výsledků dosáhl v teorii míry, teorii variačního počtu a parciálních diferenciálních rovnic, teorii funkcí reálné i komplexní proměnné i teorii obyčejných diferenciálních rovnic. Na mnichovské univerzitě je po něm pojmenována největší přednášková místnost.

Lennart Carleson (1928 Stockholm–)

Švédský matematik, věnoval se harmonické analýze. Po studiích v Uppsale strávil rok na univerzitě v Harvardu, po návratu domů nastoupil na univerzitu v Uppsale, kde působil po zbytek své aktivní kariéry. Pracoval také jako ředitel Mittag-Lefflerova institutu ve Stockholmu, v letech 1978–1982 byl prezidentem Mezinárodní matematické unie a v roce 2006 obdržel prestižní Abelovu cenu. Je znám zejména důkazem skoro všude konference Fourierových řad kvadraticky integrovatelných funkcí a teorií Carlesonových měr.

Felice Casorati (1835 Pavia–1890 Casteggio)

Italský matematik, studoval inženýrství a architekturu v Pavii, po cestách po Evropě se začal věnovat matematice. Působil v Pavii a Miláně, je znám svými výsledky v v teorii funkcí komplexní proměnné (Casorati–Weierstrassova věta) a v teorii diferenčních rovnic (Casoratiho matice, analog Wroǹského matice).

Augustin Louis Cauchy (1789 Paříž–1857 Sceaux)

Jeden z nejvýznamnějších matematiků všech dob. Je autorem téměř 800 matematických článků, které se věnovaly různým oblastem matematiky a fyziky: mechanice kontinua, optice, teorii čísel, matematické analýze. Studoval na Ècole Polytechnique a na Ècole des Ponts et Chaussées. V knize *Cours d'Analyse* se mu podařilo rigorózně zformulovat základy matematické analýzy funkcí jedné reálné proměnné. Působil ale na pařížské polytechnice a spíše prakticky orientovaní studenti nebyli z takové výuky nadšeni. Navíc byl Cauchy poměrně konfliktní typ a i kvůli svému náboženskému zaměření musel nakonec místo opustit. Poté měl velké problémy sehnat místo, o to více se však věnoval vědecké práci. Zabýval se především funkcemi komplexní proměnné, kde dokázal mnohé fundamentální výsledky (Cauchyova věta pro křivkový integrál holomorfní funkce a příbuzné výsledky). Významné jsou též jeho práce z teorie parciálních diferenciálních rovnic (Cauchy–Kovalevské věta).

Ernesto Cesàro (1859 Neapol–1906 Torre Annunziata)

Studoval matematiku na École des Mines v Liège. Po návratu do Itálie působil nejprve v Palermu a poté na univerzitě v Neapoli. Věnoval se především geometrii (je po něm pojmenován popis křivek nezávislý na souřadném systému). S jeho jménem se pojí také sčítání řad pomocí limity aritmetických průměrů částečných součtů. Zahynul tragicky při záchraně syna, který se topil v moři.

Pafnutij Lvovič Čebyšev (1821 Okatov, Kalužská gubernie–1894 Petrohrad)

Významný ruský matematik, zakladatel petrohradské matematické školy. Pocházel ze šlechtické rodiny, nejprve byl vyučován doma. Poté, co se rodiče přestěhovali do Moskvy, nastoupil na univerzitu a studoval matematiku. I přes finanční problémy rodiny dostudoval. Odstěhoval se do Petrohradu, kde obhájil doktorát a nastoupil na místní univerzitu, kde pracoval po většinu svého života. Kromě toho vyučoval i v Carském Selu (dnes Puškin) praktickou mechaniku. Jeho výsledky se týkají pravděpodobnosti, statistiky, teorie čísel, aproximace funkcí a mechaniky. S jeho jménem se pojí slavná Čebyševova nerovnost a Čebyševovy polynomy. Mezi jeho studenty patřili například A. Lyapunov a A. Markov.

Jean Baptiste le Rond d'Alembert (1717 Paříž–1783 Paříž)

Francouzský matematik, fyzik, mechanik, hudební teoretik a filozof, redaktor slavné Encyklopedie. Byl nemanželským synem markýzy de Tencin a dělostřeleckého důstojníka Louis-Camus Destouches. Matka ho po narození odložila na schody kostela Saint-Jean le Rond, odkud pochází jeho jméno. Jméno d'Alembert přijal teprve později. Jeho otec ho finančně podporoval na studiích. Studoval v Paříži právo, ale vynikal především v matematice. Proslavil se dílem *Traité de dynamique* z roku 1743, které se věnovalo zákonům pohybu. Vyřešil jednorozměrnou vlnovou rovnici (řešící operátor nese jeho jméno, stejně jako diferenciální operátor z vlnové rovnice). Pracoval také na otázkách konvergence číselných řad (podílové, nebo-li d'Alembertovo kritérium). Věnoval se také teorii hudby. Od roku 1740 až do roztržky s D. Diderotem v roce 1757 působil jako jeden z editorů slavné Encyklopedie. Redigoval více než tisíc hesel. Byl členem francouzské, pruské a čestným členem Americké akademie umění a věd. Pruskou akademii věd odmítl po Eulerově odchodu do Petrohradu vést, pruský král mu ale vyplácel důchod. Odmítl se také stát vychovatelem dětí ruské carevny Kateřiny.

Jean-Gaston Darboux (1842 Nîmes–1917 Paříž)

Významný francouzský matematik, profesor pařížské Sorbonny. Věnoval se především diferenciální geometrii, matematické analýze a teorii diferenciálních rovnic. Ja autorem ekvivalentního přístupu k definici Riemannova integrálu. Byl Poincarého životopiscem a uspořádal dílo J. Fouriera. Byl také vynikajícím učitelem a mezi jeho studenty patřili například É. Borel, É. Cartan či É. Picard.

Richard Dedekind (1831 Braunschweig–1916 Braunschweig)

Německý matematik, působil na univerzitě v Göttingenu, ETH v Curychu, ale většinu času strávil na univerzitě v rodném Braunschweigu. Je známým především díky konstrukci reálných čísel pomocí tzv. Dedekindových řezů, přispěl ale také k teorii množin a algebře. Přátelil se s G. Cantorem a podporoval ho ve sporu s L. Kroneckerem.

René Descartes (1596 La Haye, dnes Descartes–1650 Stockholm)

Francouzský matematik, fyzik a filozof. Je autorem analytické geometrie, čímž přispěl k propojení algebry a geometrie. Zavedl označení proměnných x, y a z a z latinského překladu jeho jména (Cartesius) pochází název kartézské souřadné soustavy. Byl ale především filozofem a bývá dokonce nazýván „otcem moderní filozofie".

Ulisse Dini (1845 Pisa–1918 Pisa)

Italský matematik, absolvoval Scuola Normale Superiore v Pise, krátce pobýval v Paříži. Působil na univerzitě v Pise, kde byl i dva roky rektorem. Poté byl zvolen senátorem v italském parlamentu. V roce 1908 se stal ředitelem Scuola Normale Superiore, kde působil až do své smrti. Je známý především svými výsledky v teorii reálných funkcí (několik vět týkajících se vlastností konvergentních řad nese jeho jméno). V Itálii nese jeho jméno i věta o implicitní funkci.

Paul Adrien Maurice Dirac (1902 Bristol–1984 Tallahassee, FL)

Britský fyzik, věnoval se především kvantové teorii, za kterou dostal v roce 1933 Nobelovu cenu. Vystudoval matematiku v Cambridgi, kde také většinu života jako profesor matematiky působil. V roce 1969 se přestěhoval do USA, kde působil jako profesor fyziky v Miami a později v Tallahassee. Jeho jméno nese Diracova distribuce, rovnice popisující elektron (částici se spinem 1/2) a Fermiho–Diracovo rozdělení. Předpověděl též existenci pozitronu.

Evgenii Borisovič Dynkin (1924 Leningrad–2014 Ithaca, NY)

Ruský a americký matematik židovského původu. Jeho rodina byl a v roce 1935 odeslána do exilu, jeho otec zemřel v Gulagu. Vystudoval na moskevské univerzitě, kde ho výrazně podporoval A.N. Kolmogorov. Pod jeho vedením též obhájil doktorát a působil jako jeho asistent na moskevské univerzitě. V roce 1976 emigroval do USA, kde působil na Cornellově univerzitě. Věnoval se především algebře (významných výsledků dosáhl v teorii Lieových algeber) a teorii pravděpodobnosti. Jeho přednášku na Světovém kongresu matematiků ve Stockholmu v roce 1962 přednášel A.N. Kolmogorov, Dynkin až do své emigrace nesměl nikdy vycestoval na Západ.

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 Düren–1859 Göttingen)

Německý matematik, jeho předkové pocházeli z Belgie, proto měl francouzsky znějící jméno. Vystudoval v Paříži, poté působil ve Vratislavi (tehdejší Breslau), Berlíně a Göttingenu. Jeho manželka byla sestrou hudebního skladatele F. Mendelssohna-Bartholdyho. Jeho jméno je spjato s mnoha oblastmi matematiky, kterým se věnoval. Především šlo o teorii čísel, v analýze patřil mezi první, kteří přesně definovali pojem funkce, a Dirichetova funkce byla první „exotická“ funkce, která byla matematiky přijata. Dále se věnoval konvergenci Fourierových řad (Dirichletovo jádro), parciálním diferenciálním rovnicím (Dirichletova okrajová podmínka), jeho jméno se objevuje spolu s Abelovým u konvergenčního kritéria neabsolutně konvergentních řad a integrálů. Významných výsledků dosáhl i v matematické fyzice a teorii pravděpodobnosti.

Paul David Gustav du Bois-Reymond (1831 Berlín–1889 Freiburg)

Německý matematik, jeho bratr Emil byl slavným lékařem a fyziologem. Vystudoval v Curychu a Königsbergu, poté učil na střední škole. Teprve později nastoupil do Heidelbergu a poté působil ve Freiburgu, Tübingenu a Berlíně. Věnoval se teorii funkcí, Fourierovým řadám a dokázal zjemnění fundamentálního lemmatu variačního počtu, se kterým se pojí jeho jméno. Publikoval příklad spojité, nikde nediferencovatelné funkce. Objevil myšlenku důkazu známého jako Cantorův diagonální argument. Rozvíjel také teorii infinitezimálně malých veličin.

Leonhard Paul Euler (1707 Basilej–1783 Petrohrad)

Švýcarský matematik, jeden z nejvýznamnějších matematiků všech dob. Napsal téměř 900 publikací a učebnic. Jeho nejdůležitější výsledky se týkají diferenciálních rovnic (metoda variace konstant, Eulerova rovnice aj.) a teorie grafů (problém königsbergských mostů), ale i mechaniky (Eulerovy rovnice ideální tekutiny). Zavedl také pojem imaginární číslo a komplexní exponenciálu, zavedl Γ-funkci a věnoval se také problematice variačního počtu. Vystudoval na basilejské univerzitě, kde na něj měl velký vliv Johann Bernoulli. Působil v Petrohradu, v Berlíně a poté opět v Petrohradu, kde je i pohřben.

Pierre Fatou (1878 Lorient–1929 Pornichet)

Francouzský matematik a astronom. Vystudoval na École Normale et Supérieure v Paříži, po dokončení studií začal pracovat na pařížské hvězdárně, kde působil po celý život. Byl především ovlivněn H. Lebesguem a jeho novou definicí integrálu, věnoval se ale také vlastnostem analytických funkcí, zkonstruoval jako první množinu, která se dnes nazývá „Juliova“ množina a souvisí s iteracemi holomorfních funkcí. S jeho jménem se též pojí Fatouovo lemma z teorie Lebesgueova integrálu. Rigorózně matematicky také dokázal některá tvrzení z nebeské mechaniky.

Lipót (Leopold) Fejér (1880 Pécs–1959 Budapešť)

Maďarský matematik židovského původu, jeho rodné jméno bylo Leopold Weisz, změnil si ho kolem roku 1900 jako doklad podpory maďarského národa. Studoval na univerzitách v Budapešti a Berlíně, působil v Kluži (dnes Rumunsko) a především v Budapešti. Byl hlavním představitelem maďarské školy analýzy ve své době, mezi jeho žáky byli slavní matematici John von Neumann, Paul Erdös či George Pólya. Věnoval se harmonické analýze, především Fourierovým řadám. Dokázal, že Fourierova řada funkce $(C,1)$-konverguje k hodnotě funkce v každém jejím bodě spojitosti. Další jeho slavné výsledky se týkají funkcí komplexní proměnné.

Ernst Sigismund Fischer (1875 Vídeň–1954 Kolín nad Rýnem)

Matematik rakouského původu, po studiích ve Vídni, Curychu, Berlíně a Göttingenu působil 9 let v Brně na německé „Technische Hochschule“, poté odešel do Erlangenu, kde pracoval s Emmy Noether. V roce 1920 získal místo na kolínské univerzitě, kde působil až do penze. Současně s Frigyesem Riszem dokázal větu (dnes nazývanou Riesz–Fischerovou) o souvislosti ℓ^2 posloupnosti a L^2-funkce, což v konečném důsledku vedlo k zavedení Hilbertových prostorů. Většina jeho výsledků se ale týká algebry (teorie determinantů, abelovské grupy aj.)

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 Auxerre–1830 Paříž)

Francouzský matematik a fyzik. V devíti letech osiřel, na studiích ho podporoval auxerrský biskup. Váhal mezi kariérou kněze či vědce, ale v roce 1793 se přiklonil na stranu revoluce. V období teroru byl uvězněn, po Robespierrově popravě a následných politických změnách byl osvobozen. Poté mohl studoval na nově vytvořené École Normale et Superieure (mezi učiteli byli Joseph-Louis Lagrange, Pierre-Simon Laplace či Gaspard Monge). Po studiích působil na Collège de France a na École Polytechnique. Účastnil se Napolenonova tažení do Egypta, v Egyptě zakládal vědecké instituce a účastnil se archeologických vykopávek. Po návratu do Francie ho Napoleon jmenoval prefektem v Isère (Grenoble). Zde také sepsal svá nejdůležitější díla. V roce 1822 byl zvolen sekretářem matematické sekce Akademie věd. Jeho dílo se týkalo především studia vedení tepla (Fourierův zákon vedení tepla, objevil skleníkový efekt) a souvisejícího matematického aparátu (Fourierovy řady, i když se mylně domníval, že pro každou spojitou funkci k ní její řada konverguje bodově), je po něm pojmenována Fourierova transformace, položil základy tomu, co se dnes nazývá dimenzionální analýza. Věnoval se také teorii hledání reálných kořenů polynomů (tento problém později v úplnosti rozřešil Jacques Charles François Sturm). Jeho jméno je mezi 72 osobnostmi zapsanými na Eiffelově věži v Paříži.

Maurice René Fréchet (1878 Maligny–1973 Paříž)

Francouzský matematik, žák Hadamardův. Vystudoval v Paříži, působil na různých francouzských univerzitách (Besançon, Nantes, Poitiers, Strasbourg) až nakonec zakotvil v Paříži. Věnoval se teorii metrických prostorů, které zavedl, topologii, statistice a funkcionální analýze. S jeho jménem se pojí totální diferenciál zobrazení nad Banachovými prostory.

Augustin-Jean Fresnel (1788 Broglie–1827 Ville d'Avray)

Francouzský fyzik a stavební inženýr. Vystudoval na École Polytechnique, poté pokračoval na École Nationale des Ponts et Chaussées. Je známý především svými výsledky v optice, které vedly k úplnému přijetí vlnové teorii světla. Při studiu difrakce používal tzv. Fresnelovy integrály. Jeho jméno je mezi 72 osobnostmi zapsanými na Eiffelově věži v Paříži.

Guido Fubini (1879 Benátky–1943 New York)

Italský matematik, známý především svou větou z teorie integrálů ve více dimenzích. Studoval v Pise na Scuola Normale Superiore, poté působil v Catanii, Janově a Turíně. Věnoval se diferenciální geometrii a holomorfním funkcím. Během první světové války se zaměřil na praktičtější problémy a těm se věnoval i po zbytek svého života. Kvůli svému židovskému původu i přes zdravotní problémy odešel v roce 1939 do USA, kde působil na univerzitě v Princetonu, ale nedlouho po svém odchodu zemřel.

Galileo Galilei (1564 Pisa–1642 Arcetri)

Toskánský astronom a fyzik. Studoval v Pise, z finančních důvodů studia nedokončil. Později ale působil na univerzitě v Pise a v Padově. Od roku 1610 byl na základě církevního procesu, který se týkal heliocentrického modelu, odsouzen k domácímu vězení, ve kterém zůstal až do konce života. Věnoval se astronomii, díky zdokonalení dalekohledu objevil 4 Jupiterovy měsíce, studoval sluneční skvrny a povrch měsíce. Věnoval se problémům kinematiky, studoval volný pád. Formuloval též několik problémů, které podnítily rozvoj variačního počtu.

René Eugène Gateaux (1889 Vitry-le-François–1914 Rouvroy)

Francouzský matematik. Studoval v Reims a poté na École Normale Supérieure. Po dokončení studia učil na střední škole, začal se ale věnovat doktorátu. Získal stipendium a pobýval jeden rok v Římě, kde pracoval s V. Volterrou. Na začátku první světové války narukoval do armády a poměrně brzy byl zabit. Díky J. Hadamardovi obdržel po smrti prestižní cenu Prix Francoeur. Věnoval se nekonečnědimenzionální integraci, na jeho výsledky navázal N. Wiener při své práci o Brownově pohybu. Jeho jméno je spojeno se směrovou derivací zobrazení mezi Banachovými prostory.

Johann Carl Friedrich Gauss (1777 Braunschweig–1855 Göttingen)

Významný německý matematik, fyzik a astronom, ředitel göttingenské hvězdárny. Vystudoval na univerzitě v Göttingenu. Věnoval se magnetismu, vynalezl magnetometr. Dokázal základní větu algebry, je považován za zakladatele teorie čísel, je autorem tzv. normálního (Gaussova) rozdělení, věnoval se i diferenciální geometrii a zabýval se myšlenkou neeukleidovských geometrií.

Josiah Willard Gibbs (1839 New Haven, CT–1903 New Haven, CT)

Americký matematik, teoretický fyzik a chemik. Vystudoval na Yaleově univerzitě, procestoval Evropu, kde se setkal s předními vědci té doby, včetně matematiků. Po návratu do USA působil celý po zbytek života na Yaleově univerzitě. Jeho nejvýznamnější výsledky se týkají termodynamiky a statistické fyziky. V matematice se pojí jeho jméno se špatnými konvergenčními vlastnostmi Fourierových řad kolem bodu nespojitosti funkce. Tento jev vysvětlil. Je také autorem vektorové analýzy (nezávisle na Oliverovi Heavisideovi).

Kurt Gödel (1906 Brno–1978 Princeton)

Rakouský matematik a fyzik. Studoval fyziku a matematiku na vídeňské univerzitě, kde po doktorátu působil. Zde také publikoval své dvě hlavní věty o neúplnosti. Po anšlusu Rakouska se automaticky stal německým občanem, před nacismem uprchl do USA, kde působil na Institutu pokročilých studií v Princetonu. Zde se věnoval mimo jiné i obecné teorii relativity. V závěru života se věnoval filozofii.

Jørgen Pedersen Gram (1850 Nustrup–1916 Kodaň)

Dánský matematik, po studiích v Kodani nastoupil do pojišťovací společnosti a v tomto oboru působil po celý život. V roce 1884 založil vlastní společnost, kterou vedl až do roku 1910. Matematice se věnoval spíše jako koníčku, i přesto je jeho jméno spojeno s Gramovou maticí či Gram–Schmidtovým ortogonalizačním procesem (i když ten pochází již od Laplace a používal ho i Cauchy). Kromě toho napsal zajímavé práce o lesnictví, ale v dánštině, takže zůstaly nepovšimnuty.

George Green (1793 Sneinton, Nottingham–1840 Sneinton)

Anglický matematický fyzik, autor spisku „An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism“, kde formuloval v téměř dnešním znění Greenovu větu a zavedl Greenovy funkce. Ač bez formálního vzdělání (do školy chodil pouze rok a pracoval u otce, který byl pekař a vlastnil větrný mlýn), tato esej vzbudila zaslouženou pozornost. Teprve na jejím základě absolvoval studia na univerzitě v Cambridgi.

Thomas Hakon Gronwall (1877 Dylta bruk–1932 New York)

Studoval v Uppsale a Stockholmu, poté opustil Švédsko a přes Německo odešel později do USA. Zpočátku pracoval v různých ocelárnách jako inženýr, teprve po desetiletém pobytu se vrátil k matematice. Nejprve působil v Princetonu, později pak na katedře fyziky na Columbia University v New Yorku. Patnáct let byl editorem prestižního časopisu Annals of Mathematics, kde také publikoval podstatnou část svých matematických prací. S jeho jménem se pojí Gronwallova nerovnost, používaná v teorii diferenciálních rovnic. Věnoval se ale také teorii Fourierových řad, teorii čísel, teorii funkcí komplexní proměnné a matematické fyzice.

William Rowan Hamilton (1805 Dublin–1865 Dublin)

Irský matematik, známý především objevem kvaternionů. Byl typem zázračného dítěte, v dětství uměl několik cizích jazyků. Později dal přednost matematice, ale často psal i poezii. Studoval na Trinity College v Dublinu, po dokončení doktorátu působil na Trinity College jako Královský irský astronom, i když se věnoval prakticky jen matematice. Kromě kvaternionů se věnoval přeformulování newtonovské mechaniky (dnes je známá jako hamiltonovská mechanika), optice i teorii elektromagnetismu. Jeho matematické výsledky hrály velkou roli v matematické formulaci kvantové teorie. Jeho jméno se také pojí s Cayley–Hamiltonovou větou.

Felix Hausdorff (1868 Breslau, dnes Wroclaw–1942 Bonn)

Německý matematik židovského původu. Studoval v Lipsku, působil v Lipsku, Greifswaldu a Bonnu. Věnoval se topologii, teorii míry, funkcionální analýze a teorii množin. Zobecnil Carathéodoryho myšlenku definice dimenze na neceločíselné hodnoty, dokázal, že Cantorovo diskontinuum má neceločíselnou dimenzi. Na základě norimberských zákonů byl penzionován, ale nadále se věnoval vědě, i když v Německu nesměl publikovat. Poté, co se dozvěděl, že má být transportován do koncentračního tábora v Polsku, se svojí ženou a švagrovou spáchal sebevraždu.

Heinrich Eduard Heine (1821 Berlín–1881 Halle)

Studoval na univerzitách v Göttingenu a Berlíně. Působil v Königsbergu, Bonnu a Halle. Věnoval se matematické analýze, zejména speciálním funkcím. Známá je také jeho věta dávající do souvislosti limitu funkce a posloupností a jeho alternativní definice spojitosti.

Charles Hermite (1822 Dieuze–1901 Paříž)

Francouzský matematik, studoval na École Polytechnique, ale kvůli tělesnému postižení nemohl studia dokončit jako řádný student. Dokončil je až v době, kdy byl již známý ve světě svými výsledky. Působil na École Polytechnique, École Normale Superieure a na Sorbonně. Jeho nejslavnějším žákem byl Henri Poincaré. Věnoval se teorii invariantů, řešitelnosti rovnic pátého stupně pomocí eliptických funkcí a jako první publikoval důkaz transcendentálnosti čísla e. Jeho jméno se také pojí s třídou ortogonálních polynomů.

Hérón Alexandrijský (Méchanikos) (10 n.l.–70 n.l.)

Řecký matematik a fyzik, působil v Múseiu v Alexandrii. Popsal iterační metodu určování druhé a třetí odmocniny. Jeho jméno je také spojeno se vzorcem na výpočet obsahu trojúhelníku (Hérónův vzorec), i když je pravděpodobné, že vzorec znal již Archimédés a Hérón ho pouze uvedl ve své knize *Metrika*. Ještě významnější jsou jeho vynálezy, například sestrojil pravděpodobně první parní stroj.

Ludwig Otto Hesse (1811 Königsberg–1874 Mnichov)

Vystudoval na univerzitě v Königsbergu, učil na střední škole a později pod vedením C. Jacobiho obhájil doktorát. Působil pak v Königsbergu, Heidelbergu a Mnichově. Věnoval se teorii algebraických funkcí, algebraických invariantů a variačnímu počtu, kde rozšířil Jacobiho výsledky. Jeho jméno je spojeno s maticí druhých derivací funkce více proměnných.

David Hilbert (1862 Wehlau, dnes Zamensk–1943 Göttingen)

Jeden z nejslavnějších matematiků všech dob. Vystudoval matematiku v Königsbergu, působil zde na počátku své kariéry, poté odešel do Göttingenu, kde pracoval na univerzitě až do své smrti. V Königsbergu se spřátelil s Hermannem Minkowskim. Jejich přátelství se odráželo také v matematické práci obou velikánů matematiky. Hilbert se věnoval algebře, funkcionální analýze (zavedl úplné nekonečně dimenzionální prostory se skalárním součinem, dnes nazývané Hilbertovy prostory), teorii čísel, ale také fyzice (obecné teorii relativity a matematické formulaci kvantové mechaniky). Na Mezinárodním matematickém kongresu v Paříži v roce 1900 ve své přednášce představil 23 zajímavých otevřených problémů, z nichž jsou některé otevřené dodnes. Ve dvacátých letech se snažil o formulování matematiky na pevných a úplných logických základech, což bylo kvůli Gödelovým výsledkům o neúplnosti odsouzeno k nezdaru. Mezi jeho studenty (měl téměř sedmdesát doktorandů) patřili například později světoznámí matematici F. Bernstein, H. Weyl, R. Courant či H. Steinhaus.

Otto Hölder (1859 Stuttgart–1937 Lipsko)

Německý matematik, studoval ve Stuttgartu a Berlíně, doktorát obhájil na univerzitě v Tübingenu. Působil v Tübingenu, Královci (Königsbergu) a od roku 1899 až do penzionování v Lipsku. Jeho jméno se pojí s Hölderovou nerovností, hölderovskou spojitostí a Hölderovými prostory funkcí. Dále se věnoval teorii grup. V roce 1933 podepsal „Bekenntnis der Professoren an den deutschen Universitäten und Hochschulen zu Adolf Hitler“.

Guillaume Feançois Antoine, Marquis de l'Hospital (1661 Paříž–1704 Paříž)

Francouzský matematik, markýz. Kvůli problémům se zrakem opustil vojenskou kariéru a věnoval se matematice, ke které měl zvláštní nadání. Jeho osobním učitelem byl Johann Bernoulli, který později souhlasil, že za roční poplatek 300 zlatých může l'Hospital publikovat Bernoulliho výsledky ve své knize *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, která se stala první učebnicí diferenciálního počtu na světě. Mimo jiné v ní bylo uvedeno tzv. l'Hospitalovo pravidlo. Po markýzově smrti začal Bernoulli bojovat za to, aby byl uznán za autora tohoto pravidla, což se dnes přijímá jako velmi pravděpodobné.

Christiaan Huygens (1629 Haag–1695 Haag)

Nizozemský fyzik, astronom mechanik a matematik. Studoval v Leidenu a Bredě. Velkou část života prožil v Paříži, stýkal se s nejslavnějšími vědci své doby (Descartes, Leibniz, Newton aj.). Díky zdokonalení dalekohledu objevil první Saturnův měsíc a Saturnovy prstence, sestrojil kyvadlové hodiny bez tlumení, věřil ve vlnový charakter světla (Huygensův princip). V matematice se především věnoval otázkám pohybu rotujících těles.

Carl Gustav Jacob Jacobi (1804 Postupim–1851 Berlín)

Německý matematik židovského původu. Studoval v Berlíně, kde také zahájil svou kariéru. Později se přesunul do Königsbergu, kde působil 15 let. Po zhroucení z přepracování a návštěvě Itálie se přestěhoval do Berlína, kde žil jako královský penzista. Zemřel na neštovice. Věnoval se teorii čísel a jako první ji studoval pomocí eliptických funkcí. Věnoval se také analytické mechanice, variačnímu počtu a diferenciálním rovnicím. S jeho jménem se pojí Jacobiho determinant, Hamilton–Jacobiho rovnice, či Jacobiho rovnice ve variačním počtu. Znovu zavedl také značení ∂ pro parciální derivaci.

Vojtěch Jarník (1897 Praha–1970 Praha)

Významný český matematik, studoval na Univerzitě Karlově, působil krátce na brněnské technice, poté nastoupil na Univerzitu Karlovu a s výjimkou pobytu na Univerzitě v Göttingenu (pracoval u E. Landaua) zde zůstal až do odchodu do penze v roce 1967. V roce 1952 byl jmenován akademikem. Věnoval se především teorii čísel. V české matematické komunitě se trvale zapsal svými učebnicemi diferenciálního a integrálního počtu. Byl také vynikající přednášející.

Dmitrij Fjodorovič Jegorov (1869 Moskva–1931 Kazaň)

Významný ruský a sovětský matematik, jehož jméno je spojeno s větou z teorie Lebesgueova integrálu. kromě analýzy se věnoval diferenciální geometrii (ovlivnil významně J.G. Darbouxe) a integrálním rovnicím. Vystudoval na moskevské univerzitě, po studiích pobýval v Paříži a Göttingenu. Působil na moskevské univerzitě a učil také na dvou gymnáziích. V roce 1923 byl zvolen prezidentem Moskevské matematické společnosti, když se ale postavil v roce 1929 na obranu ruské ortodoxní církve proti komunistické moci, byl zbaven práva učit. Byl zavřen do vězení, kde držel protestní hladovku, na jejíž následky později zemřel. Mezi jeho nejvýznamnější studenty patřil N. Luzin.

Johan Ludwig William Valdemar Jensen (1859 Nakskov–1925 Kodaň)

Dánský matematik, pracoval jako inženýr u kodaňské telefonní společnosti a matematice se věnoval ve svém volném čase. Je známý díky (Jensenově) nerovnosti pro konvexní funkce reálné proměnné a několika výsledkům v komplexní analýze (Jensenova formule a nerovnost).

Marie Ennemond Camille Jordan (1838 Lyon–1922 Paříž)

Francouzský matematik, studoval na École polytechnique, kde také později, spolu s Collège de France, působil. Přispěl do mnoha matematických oborů, topologie, algebry, teorie funkcí komplexní proměnné i teorie reálných funkcí. Vybudoval koncept míry, který byl předchůdcem Lebesgueovy míry (Jordanova míra) a s jeho jménem se pojí Jordanova věta o křivkách (dělení roviny na dvě části).

Leopold Kronecker (1823 Liegnitz (dnes Legnica)–1891 Berlín)

Německý matematik a logik. Představitel finitismu, uznával jen to, co se dá dokázat konečným počtem kroků pomocí přirozených čísel, odmítal důkaz sporem. Proto odmítal používat iracionální čísla, ta transcendentální dokonce dle něj vůbec neexistovala. Odmítal také pojem limity, nepřijal Weiestrassovu konstrukci spojité nikde nediferencovatelné funkce. Pocházel z bohaté židovské rodiny, jeho obchodní aktivity mu umožnili věnovat se matematice jako koníčku. Vystudoval v Berlíně, kde také po celý život působil. Věnoval se teorii čísel, eliptickým funkcím a vyšší algebře. Po odchodu svého učitele Kummera do důchodu nastoupil na jeho místo na berlínskou univerzitu. Zemřel pár měsíců po smrti své ženy. S jeho jménem se pojí několik vět v různých oblastech matematiky, ale také například Kroneckerovo delta.

Joseph-Louis Lagrange, comte de l'Empire (1736 Turín–1813 Paříž)

Francouzský matematik a fyzik italského původu. Vystudoval univerzitu v Turíně a na tamní univerzitě také působil. Na doporučení Eulera byl pozván do Berlína, kde působil 20 let. Na pozvání Ludvíka XVI. se přemístil do Paříže. Po francouzské revoluci přednášel na nově založených školách (École Normale Supérieur a École Polytechnique). Pohřben byl v Paříži v Panthéonu. Věnoval se především variačnímu počtu (Euler–Lagrangeovy rovnice) a je považován za jednoho z jejích zakladatelů. Jeho jméno nesou i Lagrangeovy multiplikátory (vázané extrémy funkcionálů). Dále se věnoval algebře (řešení polynomiálních rovnic vyšších stupňů), teorii čísel a nebeské mechanice.

Edmond Laguerre (1834 Bar-le-Duc–1886 Bar-le-Duc)

Francouzský matematik, i přes chatrné zdraví vystudoval École Polytechnique, kde později také působil. Přednášel i na Collège de France. Věnoval se analýze a geometrii, jeho jméno se pojí s jednou třídou ortogonálních polynomů. Článek, ve kterém tyto polynomy představil, také obsahuje jeden z prvních konvergentních nekonečných zlomků.

Pierre-Simon, marquis de Laplace (1749 Beaumont-en-Auge–1827 Paříž)

Jeden z největších vědců všech dob, francouzský matematik, fyzik, filozof a politik. Vystudoval na univerzitě v Caen, v devatenácti letech odešel do Paříže, kde zpočátku podporoval J.-L. Lagrange. Podporoval nejprve Napoleona, který ho dokonce nakrátko věnoval ministrem vnitra, poté senátorem a udělil mu hraběcí titul. Po nástupu Bourbonů na trůn podporoval krále a získal titul markýze. Kvůli těmto a dalším politickým krokům ztratil v akademii věd všechny přátele. V matematice nese jeho jméno Laplaceův operátor, Laplaceova transformace, ale nejvíce je hodnoceno jeho pojetí teorie pravděpodobnosti, kde výrazně předběhl svou dobu. Ve fyzice se věnoval nebeské mechanice (studoval stability sluneční soustavy), zabýval se povrchovým napětím i termodynamikou plynů. Vyslovil také jako první hypotézu o existenci černých děr. Jeho jméno je mezi 72 osobnostmi zapsanými na Eiffelově věži v Paříži.

Pierre Alphonse Laurent (1813 Paříž–1854 Paříž)

Francouzský inženýr, matematice se věnoval jen ve volném čase. Vystudoval École Polytechnique, poté se věnoval vojenské kariéře. Po návratu z Alžírska pracoval jako inženýr v přístavu Le Havre. Je znám svým výsledkem zobecňujícím pojem Taylorových řad (Laurentova řada), který byl ale publikován až po jeho smrti.

Henri Léon Lebesgue (1875 Beauvais–1941 Paříž)

Francouzský matematik, tvůrce teorie míry a integrálu. Studoval na École Normale Supérieure, poté učil na střední škole v Nancy. Na základě článku, ve kterém zobecnil Riemannovo pojetí integrálu, získal doktorát na univerzitě v Paříži. Působil na pařížské Sorbonně a na Collège de France, ale i na jiných školách. Kromě teorie míry a integrálu se dále věnoval Fourierově analýze, kde využil svou teorii integrálu k důkazu mnohých otevřených problémů. Posledních dvacet let života se věnoval spíše výuce a elementární geometrii.

Adrien-Marie Legendre (1752 Paříž–1833 Paříž)

Pocházel ze zámožné rodiny, studoval na pařížské univerzitě. Poté působil na École Militaire a od roku 1795 na École Normale Supérieure. Byl členem francouzské akademie věd, rok před smrtí se stal také čestným členem americké akademie věd. O svůj majetek přišel při francouzské revoluci. Z finančních problémů mu pomohl sňatek v roce 1793. V roce 1824 odmítl volit vládního kandidáta do Národního shromáždění a přišel o penzi. Zemřel v chudobě. Věnoval se eliptickým funkcím, jeho práce byla základem pro práci Abelovu. Zformuloval poprvé metodu nejmenších čtverců, kterou používal na výpočet drah komet. Zavedl Γ- a B-funkce, studoval teorii čísel i variační počet. S jeho jménem se pojí Legendreova transformace či Legendreovy polynomy.

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 Lipsko–1716 Hannover)

Německý filozof, matematik, fyzik a teolog, považovaný za posledního opravdu univerzálního vědce. Studoval v Lipsku a Jeně. Odmítl profesorské místo, aby mohl být nezávislý, a pracoval jako diplomat a knihovník. Zasloužil se o zřízení první německé společnosti věd v Prusku, která se později přejmenovala na Královskou akademii věd. Jeho zásadním matematickým výsledkem je zavedení diferenciálního a integrálního kalkulu, ke kterému dospěl nezávisle ve stejné době jako I. Newton. Na rozdíl od I. Newtona pracoval s infinitezimálně malými veličinami, které později z analýzy odstranil K. Weierstrass; zpět je pak v souvislosti s tak zvanou nestandardní analýzou vrátil ve druhé polovině 20. století A. Robinson. Další jeho matematické výsledky se týkaly například řešení soustav lineárních rovnic (v podstatě zavedl Gaussovu eliminaci), nalezl číselnou řadu, která má součet π, na jeho výsledky o samopodobnosti navázal B. Mandelbrot při výsledcích týkajících se fraktální geometrie. Zkonstruoval také první mechanickou kalkulačku.

Beppo Levi (1875 Turín–1961 Rosario)

Italský a argentinský matematik, věnoval se především teorii míry (Leviho věta, Beppo Leviho definice Sobolevových prostorů) a teorii algebraických křivek a ploch. Studoval v Turíně. Působil na různých italských univerzitách, v roce 1928 získal profesorské místo v Bologni. Kvůli nástupu antisemitismu v Itálii odešel do Argentiny, kde i zemřel.

Elliott Hershel Lieb (1932 Boston–)

Americký matematik a fyzik, vystudoval na MIT a v Birminghamu, působil na různých univerzitách po celém světě, od roku 1975 je profesorem matematiky a fyziky na Princetonu. Věnuje se statistické mechanice, teorii pevných látek a funkcionální analýze.

Ernst Leonard Lindelöf (1870 Helsinki–1946 Helsinki)

Finský matematik, studoval i celý život působil na helsinské univerzitě. Jeho otec byl také matematik. Jeho jméno je spojeno s Picard–Lindelöfovou větou týkající se existence řešení pro obyčejné diferenciální rovnice. Věnoval se dále funkcím komplexní proměnné (Phragmén–Lindelöfův princip) a topologii (Lindelöfovy prostory).

Joseph Liouville (1809 Saint-Omer–1882 Paříž)

Francouzský matematik, jeho výsledky jsou ale důležité i v teoretické fyzice. Vystudoval na École Polytechnique, kde také později působil. Dále byl profesorem na Collège de France a na Sorbonně. Věnoval se mnoha oborům matematiky, teorii čísel (Liouvilleova funkce, Liouvilleova čísla), funkcím komplexní proměnné (Liuovilleova věta), teorii diferenciálních rovnic (Strum–Liouvilleova teorie), hamiltonovské mechanice (Liouvilleova věta). Jednou ze základních rovnic statistické fyziky je Liouvilleova rovnice. V letech 1848–1849 byl také poslancem francouzského Národního shromáždění. Založil dodnes fungující slavný matematický časopis *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées.*

Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832 Königsberg–1903 Bonn)

Německý matematik, studoval v Königsbergu, doktorát dokončil pod vedením L. Dirichleta v Berlíně. Působil v Berlíně, Vratislavi (Breslau), profesorské místo získal v Bonnu. Jeho studentem byl F. Klein. Věnoval se teorii čísel, Besselovým funkcím, Fourierovým řadám, obyčejným i parciálním diferenciálním rovnicím, nezávisle na Cliffordovi objevil Cliffordovu algebru. Jeho jméno je známé v souvislosti s lipschitzovsky spojitými funkcemi.

Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1792 Nižnij Novgorod–1856 Kazaň)

Slavný ruský matematik, zakladatel neeuklidovské geometrie. Vystudoval na univerzitě v Kazani, kde pak celý život působil. Zabýval se především geometrií, zejména otázkou nezávislosti pátého Euklidova postulátu. Toto studium vedlo k objevu tzv. hyperbolické geometrie. Jako první také definoval pojem funkce jako zobrazení mezi dvěma obory reálných čísel. Tuto definici pak zpopularizoval L. Dirichlet. Jeho jméno nese též kondenzační kritérium konvergence číselných řad.

Nikolaj Nikolajevič Luzin (1883 Irkutsk–1950 Moskva)

Ruský a sovětský matematik, věnoval se teorii integrálu (Luzinova věta), deskriptivní teorii množin a teorii řízení. Vystudoval na moskevské univerzitě, pobýval na univerzitě v Göttingenu. Po návratu do Moskvy působil na univerzitě, kde se obklopil mladými studenty. Tato skupina byla nazývána „Luzitania“. V roce 1936 vypukla aféra „Luzin“. Skupina matematiků na moskevské univerzitě byla již počátkem třicátých let obviněna z kontrarevolučních myšlenek (Luzinův učitel Jegorov byl zavřen a brzy poté zemřel). V roce 1936 padlo obvinění na Luzina, nakonec vyústilo v odsouzení z plagiátorství svých studentů, Luzin musel odejít ze svých pracovních pozic, nebyl ale na rozdíl od mnohých jiných známých osob ani popraven ani odeslán do Gulagu.

Robert Hjalmar Mellin (1854 Liminka–1933 Helksinki)

Finský matematik, studoval v Helsinkách a Berlíně. Působil na Technické univerzitě v Helsinkách. Jeho jméno se pojí s Mellinovou transformací. Podporoval používání finštiny místo švédštiny. Velké úsilí věnoval kritice teorie relativity z filozofického pohledu.

Hermann Minkowski (1864 Alexotas, nyní Kaunas–1909 Göttingen)

Německý matematik židovského původu, vyrůstal v Königsbergu, kde studoval na univerzitě. Mezi jeho spolužáky byl i David Hilbert, se kterým se přátelil. Během studia strávil tři semestry v Berlíně. Po studiích působil v Bonnu, Königsbergu, Zürichu a Göttingenu. Věnoval se nejprve kvadratickým formám, poté teorii čísel a geometrii. Nedlouho před svou smrtí si uvědomil, že speciální teorie relativity se dobře formuluje v geometrii, která není eukleidovská. Zemřel náhle na zánět slepého střeva.

Giacinto Morera (1856 Novara–1909 Turín)

Italský matematik, studoval v Turíně, Pavii, Pise, Lipsku a Berlíně. Poté působil v Janově a Turíně. Jeho jméno je spojeno s větou z komplexní analýzy, dále se věnoval teorii elasticity.

Eliakim Hastings Moore (1862 Marietta, OH–1932 Chicago, IL)

Americký matematik, vystudoval na univerzitě v Yale, poté pobýval v Berlíně. Po návratu do USA působil na své alma mater a na Northwestern University, po otevření University of Chicago 1892 se stal vedoucím katedry matematiky a pozici si udržel až do své smrti. Věnoval se algebře, geometrii i základům matematické analýzy. Jeho jméno se mimo jiné pojí s Moore–Osgoodovou větou.

Isaac Newton (1642 Woolsthorpe by Colsterworth–1727 Londýn)

Anglický fyzik, matematik, filozof a alchymista a teolog. Vystudoval na univerzitě v Cambridgi. V době, kdy byla uzavřena kvůli moru, na domácím statku přišel na teorii gravitace a vytvořil diferenciální počet. Jeho hlavní výsledky byly shrnuty v knize *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* vydané v roce 1687. Newtonovo jméno je také spojeno s numerickou metodou řešení nelineárních rovnic. Dále zobecnil binomickou větu na obecný (reálný) exponent. Jeho přínos fyzice je také obrovský, kromě teorie gravitace formuloval zákony mechaniky a věnoval se optice. Newton patřil nepochybně mezi ty vědce, kteří posunuli rozvoj vědy o největší krok kupředu.

William Fogg Osgood (1864 Boston, MA–1943 Belmont, MA)

Americký matematik, vystudoval univerzitu v Harvardu, poté odešel do Německa. Dva roky pracoval u F. Kleina v Göttingenu, poté odešel do Erlangenu, kde obhájil doktorát. Po návratu do USA působil na Harvardu, kde v letech 1918–1922 vedl katedru matematiky. Po odchodu do důchodu učil dva roky na Národní univerzitě v Pekingu. Věnoval se především funkcím komplexní proměnné a variačnímu počtu, jeho jméno se pojí s Moore–Osgoodovou větou.

Michail Vasiljevič Ostrogradskij (1801 Pašenivka, dnes Ukrajina–1862 Poltava, dnes Ukrajina)

Ruský matematik a fyzik ukrajinského původu, bohužel značně nedoceněný. Studoval na univerzitě v Charkově, ale studia nedokončil, protože jeho učitel byl kvůli ateismu vyhozen z univerzity a Ostrogradskij odmítl opakovat zkoušky. Studia dokončil v Paříži na Sorbonně. Zde se také setkal a pracoval s nejlepšími matematiky té doby. Po návratu do Ruska přesídlil do Petrohradu, kde působil na vojenské škole a byl také zvolen do akademikem. Věnoval se matematické analýze, podal první ucelený důkaz Věty o divergenci (dokonce dříve než Gauss, který navíc dokázal jen speciální případ) a nezávisle ne Greenovi dokázal i Greenovu větu. S jeho jménem se též pojí tzv. Ostrogradského metoda integrace racionálních funkcí. Věnoval se i variačnímu počtu a obyčejným diferenciálním rovnicím jakož i mechanice a termodynamice.

Marc-Antoine Parseval des Chênes (1755 Rosières aux Salines–1836 Paříž)

Francouzský matematik. Jako přesvědčený royalista byl uvězněn po francouzské revoluci. Později propuštěn, psal ale básně proti Napoleonovi a musel uprchnout z Francie. Později se mohl vrátit do Paříže. Za celý život napsal pouze 5 matematických prací, z nichž druhá obsahovala výsledek, který je speciálním případem toho, co se dnes v teorii Fourierových řad nazývá Parsevalovou rovností.

Giuseppe Peano (1858 Spinetta–1932 Turín)

Italský matematik, zakladatel matematické logiky a teorie množin. Jeho dílo *Formulario Mathematico* výrazně ovlivnilo B. Russella a A. Whiteheada při psaní *Principia Mathematica*. Většinu svého profesního života (včetně studií) strávil na univerzitě v Turíně. Jeho jméno je spjato s axiomy přirozených čísel, s křivkou vyplňující čtverec, s existenční větou pro obyčejné diferenciální rovnice, se tvarem zbytku pro Taylorův rozvoj a se tvarem zbytku pro numerické kvadraturní vzorce.

Charles Émile Picard (1856 Paříž–1941 Paříž)

Významný francouzský matematik, jeho jméno nesou věty z teorie funkcí komplexní proměnné i existenční věta pro obyčejné diferenciální rovnice. Vystudoval na École Normale Supérieure, byl nejlepším studentem ve svém ročníku. Kromě krátkého pobytu v Toulouse učil celý svůj život na různých pařížských univerzitách. Byl také členem Francouzské akademie věd.

Michel Plancherel (1885 Bussy, Fribourg–1967 Curych)

Švýcarský matematik, vystudoval na univerzitě ve Fribourgu (jeho školitelem byl český matematik Matyáš Lerch), dále pak pokračoval na univerzitách v Göttingenu a Paříži. Působil na univerzitě ve Fribourgu. Pracoval především v harmonické analýze (Plancherelova rovnost), dále pak v teorii parciálních diferenciálních rovnic a ergodické teorii.

Jules Henri Poincaré (1854 Nancy–1912 Paříž)

Významný francouzský matematik a fyzik, je považován za zakladatele algebraické topologie a teorie funkcí více komplexních proměnných, přispěl ale i do mnoha dalších oborů. Studoval na École Polytechnique a na École des Mines, doktorát obhájil na Sorbonně. Poté krátce působil na univerzitě v Caen, ale zanedlouho dostal nabídku ze Sorbonny, kde působil po zbytek svého života. Ve 32 letech byl zvolen do Francouzské akademie věd a v roce 1906 se stal jejím prezidentem. Věnoval se kvalitativní teorii diferenciálních rovnic, algebraické geometrii, teorii čísel. Zhruba ve stejné době jako Einstein dospěl k jisté verzi speciální teorie relativity, studoval elektromagnetismus a nebeskou mechaniku. Je autorem Poincarého hypotézy, která jako jediná ze sedmi úloh pro další milénium byla vyřešena (G. Perelmanem).

Joseph Ludwig Raabe (1801 Brody–1859 Curych)

Vystudoval na vídeňské polytechnice, působil v Curychu. Jeho jméno je známé díky kritériu konvergence číselných řad.

Jacopo Francesco Riccati (1676 Benátky–1754 Treviso)

Benátský matematik a právník. Studoval v Brescii a Padově. Díky majetku se mohl věnovat matematice jako koníčku, odmítl nabídky z Petrohradu, Vídně i Padovy. Jeho jméno je spojeno s názvem obyčejné diferenciální rovnice, jejichž řešení se věnoval.

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 Breselenz–1866 Selasca)

Studoval v Göttingenu a Berlíně, působil v Göttingenu. Přispěl k mnoha oblastem matematiky. Je autorem neeukleidovské geometrie (tzv. Riemannova geometrie), výrazně ovlivnil komplexní analýzu (Cauchy–Riemannovy podmínky, Riemannova věta o konformním zobrazení), reálnou analýzu (Riemannův integrál), ale i teorii čísel (slavná Riemannova hypotéza). Zemřel poměrně mladý na tuberkulózu.

Frigyes Riesz (1880 Györ–1956 Budapešť)

Maďarský matematik, vystudoval na univerzitě v Budapešti, poté pokračoval v Göttingenu a Curychu. Působil na univerzitě v Kluži, později v Szegedu a Budapešti. Patří mezi zakladatele funkcionální analýzy, jeho jméno je spojeno s Riesz–Fischerovou větou. Jeho výsledky byly fundamentální pro matematické základy kvantové mechaniky. Zavedl také pojem slabé konvergence. Dále se zabýval ergodickou teorií. Jeho mladší bratr Marcel Riesz byl též světoznámým matematikem.

Michel Rolle (1652 Ambert–1719 Paříž)

Francouzský matematik, jeho jméno je spojeno s větou o střední hodnotě. Zpočátku vystupoval jako kritik infinitezimálního počtu, později jej přijal. Ve své knize *Traité d'Algèbre* poprvé v Evropě představil Gaussův eliminační algoritmus, zavedl označení $\sqrt[n]{\ }$ pro n-tou odmocninu a představil Eulerův algoritmus pro nalezení největšího společného dělitele dvou polynomů. Pracoval na Akademii věd jako „Pensionnaire Géometre".

Arthur Sard (1909 New York–1980 Basilej)

Americký matematik, věnoval se diferenciální topologii. S jeho jménem se pojí Sardova věta, týkající se míry množiny kritických hodnot hladké funkce. Vystudoval na Harvardu, působil na několika amerických i evropských univerzitách.

Erhard Schmidt (1876 Dorpat, dnes Tort, Estonsko–1959 Berlín)

Německý matematik, jeho školitelem byl v Göttingenu David Hilbert. Dále působil v Bonnu, Curychu, Erlangenu a Breslau (Vratislav), v roce 1917 získal profesorské místo v Berlíně. Díky němu se v Berlíně začala rozvíjet aplikovaná matematika. Podporoval nástup fašismu v Německu, za hitlerovského Německa patřil sice mezi prominenty, avšak jeho chování nebylo kritizován ani ze strany židovských matematiků, kteří válku přežili. Jeho jméno se pojí s Gram–Schmidtovou ortogonalizací (i když ji mnohem dříve používal Pierre-Simon Laplace) a spolu s Davidem Hilbertem přispěli k základům funkcionální analýzy (Hilbert–Schmidtovy operátory, Hilbert–Schmidtova věta).

Laurent-Moïse Schwartz (1915 Paříž–2002 Paříž)

Francouzský matematik židovského původu, autor teorie distribucí, za kterou získal v roce 1950 Fieldsovu medaili. Vystudoval na École Polytechnique, kde se také seznámil se svou ženou, dcerou slavného matematika Paula Lévyho. Jako přesvědčený trockista a žid se musel během druhé světové války ukrývat, po jejím skončení působil na univerzitách v Grenoblu, Nancy a na Sorbonně, poté působil 30 let na École Polytechnique. Byl také politicky aktivní, bojoval proti válce v Alžírsku, protestoval proti okupaci Maďarska v roce 1956.

Karl Hermann Amandus Schwarz (1843 Hermsdorf, dnes Jerzmanowa–1921 Berlín)

Německý matematik, za manželku měl dceru jiného slavného matematika Kummera (oponent jeho doktorské práce). Vystudoval v Berlíně, působil v Halle, Curychu, Göttingenu a v Berlíně. Věnoval se převážně komplexní analýze, jeho jméno je také spjato se slavnou nerovností, dnes nazývanou Cauchy–Schwarzovou.

Thomas Stieltjes (1856 Zwolle–1894 Toulouse)

Holandský matematik. Studoval na polytechnice v Delft, ale studium nedokončil. Teprve korespondence s Hermitem v době, kdy působil jako asistent na observatoři v Leidenu, ho opět přivedla k matematice. Získal čestný doktorát na univerzitě v Leidenu, teprve poté obhájil doktorát v Paříži a dostal profesorské místo v Toulouse. Věnoval se teorii čísel a nekonečným zlomkům, slavným se stal díky zobecnění Riemannova integrálu (Riemann–Stieltjesův integrál).

James Stirling (1692 Garden–1770 Edinburgh)

Skotský matematik. Studoval v Oxfordu, ale z politických důvodů nemohl studia dokončit a odešel do Benátek, kde se věnoval matematice. V roce 1725 se za pomoci Isaaca Newtona vrátil do Londýna, kde se věnoval nadále matematice. Sepsal zde knihu *Methodus differentialis, sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum*, která mimo jiné obsahuje slavný Stirlingův vzorec. S jeho jménem se dále pojí Stirlingova čísla či Stirlingovy permutace. Dokázal také správnost Newtonovy klasifikace kubických křivek.

George Gabriel Stokes (1819 Skreen–1903 Cambridge)

Irsko-anglický fyzik a matematik. Vystudoval na univerzitě v Cambridge, kde také po zbytek života působil. Věnoval se hydrodynamice (Navier–Stokesovy rovnice nesou jeho jméno, i když byl až čtvrtý, kdo je odvodil), dále optice, kde vysvětlil fluorescenci a studoval polarizaci světla, dále studoval vztah mezi chemickým složením a optickými vlastnostmi látek. V matematice nese jeho jméno Stokesova věta (udávající vztah mezi plošným integrálem a křivkovým integrálem přes okraj této křivky) a zobecněná Stokesova věta z teorie integrace diferenciálních forem.

James Joseph Sylvester (1814 Londýn–1897 Londýn)

Anglický matematik židovského původu. Studoval v Londýně a Cambridgi, kvůli svému původu ale nemohl studia dokončit. Krátce působil v USA, pak se vrátil do Londýna a věnoval se pojišťovnictví. K matematice se vrátil po roce 1855, kdy se stal profesorem matematiky na Královské vojenské akademii ve Woolwichi. Byl druhým prezidentem Londýnské matematické společnosti, byl zvolen i do francouzské Královské akademie věd. V roce 1877 přijal místo na Univerzitě Johna Hopkinse v Baltimore, kde založil první americký matematický časopis. Později nastoupil do Oxfordu a poslední roky života strávil v Londýně. Věnoval se především lineární algebře (Sylvestrovo kritérium), spolu s Cayleym je považován za zakladatele teorie invariantů. Výrazně přispěl i do teorie čísel a eliptických funkcí.

Alfred Tarski (1901 Varšava–1983 Berkeley, CA)

Polsko-americký matematik a logik. Původní jméno Teitelbaum si změnil patrně z důvodu, aby zastřel svůj židovský původ. Matematiku vystudoval ve Varšavě, kde také později působil. Shodou okolností se mu podařilo odjet těsně před německo-ruskou okupací Polska do USA, kde zůstal po zbytek života; působil na univerzitě v Berkeley. Jeho výsledky se týkaly především algebry, geometrie a logiky. Známý je především Banach–Tarského paradox, kdy na základě axiomu výběru lze „zdvojit kouli“.

Brook Taylor (1685 Edmonton–1731 Londýn)

Anglický matematik, člen a později sekretář Královské vědecké společnosti. Místo infinitezimálně malých veličin pracoval s konečnými veličinami, což je základem slavné Taylorově věty a Taylorových rozvojů. Byl také členem komise, která rozhodovala o prvenství Newtona či Leibnize při vytvoření diferenciálního počtu.

Heinrich Franz Friedrich Tietze (1880 Schleinz–1950 Mnichov)

Rakouský matematik, známý svou větou o rozšíření funkcí z topologického prostoru do reálných funkcí. Studoval ve Vídni, působil v Brně, Erlangenu a Mnichově.

Alexandre-Théophile Vandermonde (1735 Paříž–1796 Paříž)

Francouzský hudebník, chemik a matematik. Byl houslistou, matematice se věnoval až později. S jeho jménem se pojí jeden determinant, zdá se ale, že to je spíše omylem. Byl členem Královské akademie věd, učil na École Normale Supérieure. Věnoval se kombinatorice a teorii determinantů.

François Viète (1540 Fontenay-le-Comte–1603 Paříž)

Francouzský matematik, autor algebraické notace, která se prakticky používá dodnes. Působil na francouzském dvoře jako poradce, věnoval se šifrování a prolomil tajný španělský kód.

Giuseppe Vitali (1875 Ravenna–1932 Bologna)

Italský matematik, známý svými výsledky v matematické analýze. Studoval v Bologni a Pise. Působil na různých univerzitách v Itálii (Parma, Modena, Padova), až nakonec získal profesorské místo v Bologni. Je znám svým příkladem neměřitelné podmnožiny reálných čísel, Vitaliho pokrývací větou či zobecněním Lebesgueovy věty o konvergenci (Vitaliho věta o konvergenci). Na konci života měl vážné zdravotní problémy, zemřel cestou z přednášky.

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 Ostenfelde–1897 Berlín)

Německý matematik, měl velký vliv na formování matematické analýzy. Studoval na univerzitě v Bonnu (právo, finance a ekonomii), kvůli lásce k matematice studia nedokončil a vystudoval univerzitu v Münsteru. Poté několik let učil na střední škole, ale po publikování výsledků o abelovských funkcích obdržel čestný doktorát na univerzitě v Königsbergu a získal místo na univerzitě ve Vratislavi (Breslau).

Poté působil na Gewerbeinstitutu (dnes Technická univerzita Berlín) a na Univerzitě Friedricha-Wilhelma (dnes Univerzita Humboldtova) v Berlíně. Zavedl tzv. ε-δ gymnastiku v definicích limit funkcí a spojitosti, čímž zmodernizoval výklad základů analýzy. Dokázal mnoho vět, které se dnes přednáší v základních kurzech analýzy funkcí jedné reálné proměnné (například větu o nabývání extrému spojitou funkcí na omezených uzavřených intervalech). Dále studoval stejnoměrnou konvergenci posloupností funkcí, analytické prodloužení funkcí i variační počet. Zkonstruoval také funkci, která je na celé reálné ose spojitá, ale není diferencovatelná v žádném bodě.

Jozéf-Maria Hoëné de Wroński (1776 Wolsztyn–1853 Neuilly-sur-Seine)

Polský filozof, matematik a fyzik, právník a ekonom. Jeho rodiče byli českého původu, i když žili v Polsku. Jako voják se zúčastnil Kościuszkova povstání, poté studoval na různých univerzitách v Německu a v Marseille. Působil na hvězdárně v Marseille, kterou musel opustit po publikaci svého díla, které se ukázalo být plné nesmyslů. To platí o mnohých jeho dílech, včetně toho, které obsahovalo determinant, který nese jeho jméno. Dnes je oceňována jeho metafyzika.

William Henry Young (1863 Londýn–1942 Lausanne)

Anglický matematik, pracoval v matematické analýze. Vystudoval v Cambridgi, kde se seznámil se svou budoucí žnou, matematičkou Grace Chisholm (Young). Společně s ní napsal mnoho článků a knih. Působil v Cambridgi, na University of London, v Kalkatě a na welšské universitě v Aberystwyth. Hodně cestoval, během druhé světové války se ocitl v Lausanne, odkud nemohl vycestovat a zemřel odloučen od rodiny. Věnoval se matematické analýze, zejména teorii integrálu (nezávisle na Lebesgueovi přišel s jinak formulovanou, ale prakticky ekvivalentní definicí integrálu), věnoval se fourierovské analýze (především teorii Fourierových řad). V letech 1929–1935 byl prezidentem IMU (International Mathematical Union). S jeho jménem se pojí dvě nerovnosti (jedna pro součin čísel, druhá pro konvoluce), Hausdorff–Youngova nerovnost pro Fourierovu transformaci a věta o záměně pořadí derivování pro hladké funkce.

Max August Zorn (1906 Krefeld–1993 Bloomington)

Německo–americký matematik, věnoval se algebře, teorii grup a numerické analýze. Studoval v Hamburgu, působil v Halle, na univerzitě v Yale, na UCLA a v Bloomingtonu. Je po něm pojmenováno tvrzení ekvivalentní axiomu výběru (Zornovo lemma), které dokázal nezávisle na předchozím důkazu.

Antoni Zygmund (1900 Varšava–1992 Chicago)

Polsko–americký matematik, věnoval se především harmonické analýze. Studoval na univerzitě ve Varšavě, kde poté i působil, stejně jako na varšavské polytechnice. Po deseti letech ve Vilniusu se přestěhoval do USA, kde pracoval na univerzitě v Chicagu. Jeho kniha *Trigonometric series*, ač poprvé vyšla v roce 1935, stále patří mezi klasické knihy harmonické analýzy.

Rejstřík