

**Písemka č. 2, 14.5.2025, 13:10 – Řešení**

1. (8 bodů) Najděte obecné řešení rovnice

$$y''' + y'' + 4y' + 4y = x(e^{2x} + 8)$$

Charakteristický polynom je  $\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda + 4$  a jeho kořeny  $-1, 2i, -2i$  nás vedou na fundamentální systém  $\boxed{\{e^{-x}, \cos 2x, \sin 2x\}}$ .

Pravá strana rovnice se dá napsat  $xe^{2x} + 8x$  a je tedy součtem dvou speciálních pravých stran, proto i hledané partikulární řešení bude součtem příslušných dvou part. řešení. Pro pravou stranu  $xe^{2x}$  není číslo  $2 + 0i$  kořenem char. polynomu a proto hledáme part. řešení ve tvaru  $y_1 = (ax + b)e^{2x}$ . Postupným zderivováním a dosazením dostaneme rovnici

$$(24cx + 20c + 24d)e^{2x} = xe^{2x},$$

takže

$$c = \frac{1}{24}, \quad d = \frac{-5}{144}, \quad \boxed{y_1(x) = \left(\frac{1}{24}x - \frac{5}{144}\right)e^{2x}}.$$

Dále pro pravou stranu  $8x$  číslo  $0 + 0i$  také není kořenem char. polynomu a proto hledáme part. řešení ve tvaru  $y_2(x) = cx + d$ . Zderivováním a dosazením dostáváme rovnici

$$4kx + 4(k + l) = 8x$$

a tedy

$$k = 2, \quad l = -2, \quad \boxed{y_2(x) = 2x - 2}.$$

Obecné řešení je tedy

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x + \left(\frac{1}{24}x - \frac{5}{144}\right)e^{2x} + 2x - 2}, \quad c_i \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}.$$

**2.** (8 bodů) Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady, všechny kroky řádně zdůvodněte:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{[\frac{n}{2}]} \frac{\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}}{\ln n}.$$

(Symbol  $[x]$  označuje celou část reálného čísla  $x$ , tj. největší celé číslo, které je menší nebo rovné  $x$ .)

Nejprve si všimneme, že členy řady se dají napsat ve tvaru součinu  $c_n = a_n b_n$ , kde

$$a_n = (-1)^{[\frac{n}{2}]}, \quad b_n = \frac{\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}}{\ln n}$$

přičemž  $a_n$  by mohlo mít omezené částečné součty a  $b_n$  by mohlo konvergovat monotonně k nule, takže Dirichletovo kritérium nám tak může zajistit konvergenci. Pojdme však obě podmínky ukázat. Nejprve si napíšeme posloupnost  $a_n = (-1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, \dots)$ , takže její částečné součty jsou jistě omezené (mezi  $-2$  a  $0$ ). Dále lze upravit člen  $b_n$  na

$$b_n = \frac{1}{(\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1}) \ln n},$$

což má zřejmě limitu 0 a to monotonně, což lze zdůvodnit např. tak, že  $\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1}$  je zřejmě rostoucí poslounost,  $\ln n$  také, jejich převrácené hodnoty jsou tudíž klesající a kladné a součin takových je tedy zase klesající. Vše je ověřeno a podle Dirichleta tedy řada konverguje.

Nyní má smysl vyšetřovat, zda je tato konvergence absolutní či nikoli. Řada absolutních členů je vlastně

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1}) \ln n}.$$

Rádi bychom nyní zjednodušili člen s odmocninami, převedli jej na něco známého. Řady s nezápornými členy stačí porovnávat pomocí (limitního) srovnávacího kritéria, a snadno vidíme, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1}}{n} = 2$ , čili nenulové konečné číslo. Proto je konvergence řady  $\sum b_n$  ekvivalentní konvergenci řady  $\sum \frac{1}{n \ln n}$ . Na tu se hodí (pouze) integrální kritérium, podle něhož je její konvergence ekvivalentní konvergenci Newtonova integrálu, konkrétně

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = [\ln(\ln(x))]_1^{+\infty} = +\infty,$$

takže tato řada diverguje, a tedy řada ze zadání konverguje neabsolutně.

Lukáš Krump, 20.5.2025