

Metrické prostory

Stefan Banach a jedna z jeho vět

1. Metodou postupných aproximací nalezněte řešení rovnice $y' = ay$, $y(0) = \kappa$. Ověřte na základě Banachovy věty, že metoda postupných aproximací na vhodném prostoru konverguje.
2. Metodou postupných aproximací nalezněte přibližné řešení rovnice $2x + \sin x = 1$. Ověřte na základě Banachovy věty, že metoda postupných aproximací na vhodném prostoru konverguje.
3. Metodou postupných aproximací nalezněte přibližné řešení rovnice

$$y(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 s y(s) ds + x.$$

Ověřte na základě Banachovy věty, že metoda postupných aproximací na vhodném prostoru konverguje. Srovnajte toto řešení s přesným řešením, které lze hledat ve tvaru $y(x) = \alpha x^2 + x$.

4. Dokažte: pro každé $0 \leq a \leq 1$ konverguje posloupnost

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}(x_n^2 - a), \quad x_0 = 0$$

k hodnotě \sqrt{a} (iterační metoda výpočtu odmocniny).

Funkce více proměnných

Limita a spojitost funkcí více proměnných

Spočtete následující limity

5. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}$

6. $\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow \infty} \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2}$

$$7. \lim_{\|(x,y)\| \rightarrow \infty} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}$$

$$8. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,a)} \frac{\sin xy}{x}$$

$$9. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^6 + y^6}{x^2 - y^2}$$

$$10. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

11. Ukaŕte, ŕe pro funkci

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$$

platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = 0,$$

ale

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

neexistuje.

12. Ukaŕte, ŕe pro funkci

$$f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$$

limity

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) \text{ a } \lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y))$$

neexistují, ale

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), x \cdot y \neq 0} f(x, y) = 0.$$