

Domácí úkol č. 2, Termín odevzdání: 12.11.2025.

1. (1 bod) Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti

$$f_n(x) = \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n}$$

- (a) na $(0, \varepsilon)$
- (b) na $(\varepsilon, +\infty)$

2. (1 bod) Uvažujme posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \langle n^2 - n, n^2 + n \rangle \\ 0 & \text{pro } x \notin \langle n^2 - n, n^2 + n \rangle \end{cases}$$

a dále posloupnost funkcí $g_n(x) = n^\alpha f_n(x)$, vše pro $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupností $f_n(x), g_n(x)$ na $\mathbb{R}$ v závislosti na parametru α .

Pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) dx?$$

3. (1 bod) Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n-2}{n+2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \cdot e^{-nx}$$

v $\mathbb{R}$.

4. (1 bod) Uvažujme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3 x}{1 + n^4 x^2}$$

pro $x \in \mathbb{R}_+$. Rozhodněte o platnosti tvrzení:

- (a) Řada konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}_+$
- (b) Řada konverguje stejnoměrně na $(0, 1)$
- (c) Řada konverguje stejnoměrně na $\langle 1, \infty \rangle$
- (d) Řada konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}_+$