

Domácí úkol č. 1, Termín odevzdání: 31.10.2025.

Všechny kroky řádně zdůvodněte.

1. (1 bod) Spočtete první a druhý Gâteauxův diferenciál funkcionálu

$$F(y) = \int_0^1 x^2 \sin \pi y + (y')^3 + y'' y''' + y e^{-(y'')^2} dx$$

na $C^3(\langle 0, 1 \rangle)$. Možno použít zrychlený výpočet bez užití limit.

2. (1 bod) Vyšetřete extrémův funkcionálu

$$F(y) = \int_0^1 (y')^4 - 6(y')^2 dx$$

na množině

$$M = \{y \in C^1(\langle 0, 1 \rangle); y(0) = 0, y(1) = A\}$$

pro nějaké číslo $A \in \mathbb{R}, |A| \neq 1$.

3. (1 bod) Nalezněte extrémův funkcionálu

$$F(y) = \int_1^2 x(y')^4 - 2y(y')^3 dx$$

na množině

$$M = \{y \in C^1(\langle 1, 2 \rangle); y(1) = 0, y(2) = 1\}.$$

Co lze říci o příslušné Hessově matici?

4. (1 bod) Nalezněte minimum funkcionálu

$$F(y) = \int_0^1 (y')^2 dx$$

na množině

$$M = \{y \in C^1(\langle 0, 1 \rangle); y(0) = 1, y(1) = 6\}$$

s vazbou

$$\int_0^1 y dx = 3.$$