

Domácí úkol č. 5 – Řešení

1. (1 bod) Je dána funkce

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}.$$

Spočtěte všechny její parciální derivace 2. řádu a zjistěte, ve kterých bodech definičního oboru funkce jsou smíšené derivace záměnné.

Snadno určíme $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; xy \neq 1\}$ a také parciální derivace

$$\partial_x f(x, y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \cdot \frac{1(1-xy) - (x+y)(-y)}{(1-xy)^2} = \frac{1+y^2}{1+x^2+y^2+x^2y^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

a záměnnou proměnných

$$\partial_y f(x, y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

Někteří jste neprovedli poslední krácení, čímž jste si zkomplikovali další výpočty. Dále pak snadno

$$\begin{aligned}\partial_{xx} f(x, y) &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \\ \partial_{xy} f(x, y) &= \partial_{yx} f(x, y) = 0 \\ \partial_{yy} f(x, y) &= \frac{-2y}{(1+y^2)^2}\end{aligned}$$

v každém bodě D_f a tedy vidíme, že smíšené druhé derivace jsou záměnné.

2. (1 bod) Funkci

$$f(x, y) = \exp\left(\frac{-1}{x^2 + y^2}\right)$$

dodefinujte v bodě $[0, 0]$ spojitě a rozhodněte, zda má vzniklá funkce v bodě $[0, 0]$ totální diferenciál.

Nejprve zjistíme limitu funkce v $[0, 0]$. Zřejmě lze počítat „ze všech směrů naráz“, tj. použitím polárních souřadnic nahradit $x^2 + y^2 = r^2$ a potom podle VOLSF

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \exp\left(\frac{-1}{x^2 + y^2}\right) = \lim_{r \rightarrow 0+} \exp\left(\frac{-1}{r^2}\right) = 0,$$

touto hodnotou tedy dodefinujeme funkci v počátku spojitě.

Jak nyní postupovat dál? Snadno spočteme parciální derivace (p.d.) všude mimo počátek:

$$\partial_x f(x, y) = \frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} \exp\left(\frac{-1}{x^2 + y^2}\right), \quad \partial_y f(x, y) = \frac{2y}{(x^2 + y^2)^2} \exp\left(\frac{-1}{x^2 + y^2}\right)$$

ovšem pro existenci totálního diferenciálu v počátku bychom museli ukázat, že p.d. jsou spojité v nějakém okolí počátku. Tady mnoho z vás udělalo chybu: nestačí totiž dokázat spojitost p.d. na prstencovém okolí počátku, musí to být na okolí **včetně počátku**, takže by bylo potřeba najít p.d. v počátku, ty zde ovšem nemůžou být vyjádřeny výše uvedenými vztahy (nejdou v počátku definovány), nýbrž spočteny z definice. Stejně tak nestačí zjistit spojitost p.d. po osách – musí opět jít o spojitost „ze všech stran“.

Tuto cestu někteří z vás zkoušeli, ale ukážeme si jinou: bude snazší najít kandidáta na totální diferenciál (t.d.) v počátku a dokázat, že se skutečně o t.d. jedná. Tímto kandidátem je gradient funkce v počátku, pro jehož určení musíme (stejně jako v předchozím odstavci) spočítat z definice parciální derivace v nule (použijeme škálovací limity):

$$\partial_x f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\exp\left(\frac{-1}{t^2 + 0^2}\right)}{t} = 0, \quad \text{podobně } \partial_y f(0, 0) = 0.$$

Kandidátem na p.d. je tedy zobrazení dané gradientem $(0, 0)$. Abychom dokázali, že se jedná o t.d. v počátku, počítáme limitu

$$\lim_{[h_1, h_2] \rightarrow [0, 0]} \frac{\exp\left(\frac{-1}{h_1^2 + h_2^2}\right) - 0 - (0, 0) \cdot (h_1, h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

opět díky škálovacím limitám. Toto dokazuje, že $df(0, 0) = (0, 0)$ je skutečně totálním diferenciálem v počátku.

3. (1 bod) Řešte rovnici ve tvaru totálního diferenciálu

$$(y^2 - y)dx + xydy = 0$$

Ověříme podmínku, zda je rovnice ve tvaru totálního diferenciálu, ale ta není splněna:

$$\partial_y M = 2y - 1 \neq \partial_x N = y.$$

Proto musíme najít vhodný integrační faktor μ . Pokud jej zkusíme hledat jako funkci proměnné x , dostaneme něco dost složitého. Lépe vyjde pokus s integračním faktorem $\mu = \mu(y)$. Podmínka $\partial_y(M\mu) = \partial_x(N\mu)$ vede na diferenciální rovnici se separovanými proměnnými

$$(y^2 - y)\mu'(y) = (1 - y)\mu(y)$$

a jako její řešení můžeme vzít $\mu(y) = \frac{1}{y}$. Přenásobením zadané rovnice tímto faktorem vzniká rovnice ve tvaru tot.dif. $(y-1)dx + xdy = 0$. Integrací najdeme potenciál $U(x, y) =$

$xy - x + c(y) = xy + d(x)$, proto volíme $c(y) = 0, d(x) = -x$ a dostáváme implicitní tvar řešení

$$U(x, y) = xy - x = C.$$

Z něj lze odvodit explicitní tvar

$$y = 1 + \frac{C}{x}, \quad x \neq 0.$$

4. (1 bod) Vyšetřete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = e^{x^2+y^2}(4x + 4y + 17)$$

Napřed potřebujeme určit stacionární body, proto si napíšeme parciální derivace zadané funkce a položíme je rovné nule:

$$\partial_x f = e^{x^2+y^2}(2x(4x + 4y + 17) + 4) = 0$$

$$\partial_y f = e^{x^2+y^2}(2y(4x + 4y + 17) + 4) = 0,$$

Exponenciála je nenulová, proto se soustava redukuje na

$$2x(4x + 4y + 17) + 4 = 0 \tag{1}$$

$$2y(4x + 4y + 17) + 4 = 0. \tag{2}$$

V tuto chvíli by nám moc nepomohlo roznásobování, lepší je rovnice od sebe odečíst, čímž dostáváme

$$2(x - y)(4x + 4y + 17) = 0.$$

Druhá závorka nemůže být rovna nule (po dosazení do některé z předchozích rovnic by to vedlo ke sporu $4 = 0$), proto je $y = x$, což dosadíme třeba do rovnice (1), a to nás dovede ke kvadratické rovnici

$$8x^2 + 17x + 2 = 0,$$

která má kořeny $-2, -\frac{1}{8}$, takže stacionární body zadané funkce jsou $A = [-2, -2], B = [-\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}]$.

Dále si spočítáme všechny druhé parciální derivace:

$$\partial_{xx} f = e^{x^2+y^2}(2x(2x(4x + 4y + 17) + 4) + 16x + 8y + 34)$$

$$\partial_{yy} f = e^{x^2+y^2}(2y(2x(4x + 4y + 17) + 4) + 16y + 8x + 34)$$

$$\partial_{xy} f = e^{x^2+y^2}(2y(2x(4x + 4y + 17) + 4) + 8x)$$

Do příslušných Hessianých matic dosadíme oba stacionární body (využíváme přitom, že ve stac. bodech je $2x(4x + 4y + 17) + 4 = 2y(4x + 4y + 17) + 4 = 0$):

$$H_f(A) = e^8 \begin{pmatrix} -14 & -16 \\ -16 & -14 \end{pmatrix},$$

ta má signaturu $(1, 1, 0)$, je tedy indefinitní a bod A je sedlový bod.

$$H_f(B) = e^{\frac{1}{32}} \begin{pmatrix} 31 & -1 \\ -1 & 31 \end{pmatrix},$$

ta má signaturu $(2, 0, 0)$, je tedy pozitivně definitní a bod B je lokální minimum. Závěrem dosadíme oba body do funkce a dostáváme $f(A) = e^8 \doteq 2981$, $f(B) = 16e^{\frac{1}{32}} \doteq 16,51$ (číselné hodnoty uvádím jen pro zajímavost).

Lukáš Krump, 25.5.2025