

Domácí úkol č. 4 – Řešení

Na úvod několik poznámek:

1) Pozor na pravopis jména Leibniz, píše se bez t .

2) Vyjasňeme si zde vztahy mezi absolutní konvergencí, neabsolutní konvergencí a konvergencí „bez přívlastku“. Každá řada buď konverguje nebo nekonverguje. Pokud se jedná o řadu s nezápornými členy, toto rozlišení stačí. Samozřejmě se dá říci, že taková řada konverguje absolutně, ale protože je to totéž jako že konverguje „bez přívlastku“, je pojem absolutní konvergence u takových řad zbytečný. Když napíšete, že řada s nezápornými členy konverguje absolutně, není to vyloženo chyba, jen je tam zbytečné slovo navíc.

Pokud se naopak jedná o řadu, která nemá členy nezáporné (střídá znaménka), je naopak rozlišení absolutní a neabsolutní konvergence podstatné. Mohli bychom tyto pojmy definovat velmi důkladně takto:

řada $\sum a_n$ konverguje absolutně, pokud konverguje $\sum a_n$ a také $\sum |a_n|$,

řada $\sum a_n$ konverguje neabsolutně, pokud konverguje $\sum a_n$, ale $\sum |a_n|$ nikoli.

Jelikož ale platí implikace „ $\sum |a_n|$ konverguje $\implies \sum a_n$ konverguje“, je výše uvedená definice absolutní konvergence zbytečně kostrbatá a stačí tedy říci, že $\sum a_n$ konverguje absolutně, pokud konverguje $\sum |a_n|$. U neabsolutní konvergence se už takové zjednodušení udělat nedá.

Pokud tedy máme řadu s obecnými členy (střídají se znaménka), obvykle podle příslušných kritérií (Leibniz, Dirichlet, Abel) rozhodneme, zda řada konverguje, a teprve pokud ano, tak v dalším kroku ještě určíme, zda je tato konvergence absolutní, tj. vezmeme ze členů řady absolutní hodnoty a použijeme kritéria pro konvergenci řad s nezápornými členy (nutná podmínka, srovnávací, odmocninové, podílové, integrální). Pokud naopak řada nekonverguje, nemůže ani konvergovat absolutně (ani neabsolutně).

U řad s parametrem, tedy i u mocninných řad, se toto všechno samozřejmě musí provést v závislosti na tom parametru.

Mimochodem, nazývat Leibnizovo, Dirichletovo a Abelovo kritérium „kritérii neabsolutní konvergence“ je zavádějící. Tato kritéria nám pomůžou rozhodnout, zda řada s obecnými členy konverguje nebo ne, ale o tom, zda se jedná o konvergenci absolutní nebo neabsolutní, musíme pak rozhodnout jinak.

3) U Leibnizova, Dirichletova a Abelova kritéria je podstatná podmínka monotonie jedné z posloupností v součinu. Tuto je potřeba ověřit, což se dá různými způsoby, v závislosti na konkrétním zadání. Když to není vidět přímo z tvaru členů, pomůže převést posloupnost na funkci a dokazovat její monotonii derivováním. I když se vám to třeba nepodaří, je potřeba, abyste věděli, že se ta monotonie musí ověřit. Proto jsem

strhával více bodů, když jste ji vůbec neověřovali (nezmínili), než když jste věděli, že se ověřit má, ale nešlo vám to.

Podobně podmínka omezených částečných součtů (u Dirichleta, OČS) se musí ověřovat; defaultně to víme pro posloupnosti $(-1)^n$, $\sin nx$ pro všechna reálná x a $\cos nx$ pro $x \neq 2k\pi$. Proto také posloupnost e^{inx} má OČS pro $x \neq 2k\pi$. Pro ostatní posloupnosti to musíme zjistit nějak jinak, většinou je to vidět z jejich jednoduchého tvaru.

V příkladech **1.** a **2.** vyšetřete konvergenci řady (případně i absolutní/neabsolutní), všechny kroky postupu řádně zdůvodněte.

1. (1 bod)

$$\sum_{n=10}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln \ln \ln n}$$

Řada zřejmě střídá znaménka, proto nejprve použijeme některé z kritérií pro řady s obecnými členy. Ale které? Může nás napadnout „nejjednodušší“ Leibnizovo, jelikož tam máme přímo $(-1)^n$. K tomu však bude potřeba ukázat, že $\frac{\sqrt[n]{n}}{\ln \ln \ln n}$ jde monotónně k nule. Nulová limita se ukáže snadno ($\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$, $\ln \ln \ln n \rightarrow \infty$), ale monotonie je zde těžší. Někteří z vás ji dokázali zjistit, ale je výrazně jednodušší podívat se na celý problém jinak a postupovat ve dvou krocích: nejprve pomocí Leibnizova kritéria snadno zjistíme, že $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln \ln \ln n}$ konverguje (protože $\frac{1}{\ln \ln \ln n}$ jde monotónně k nule, limita i monotonie je zde zřejmá – jmenovatel je trojitě složení rostoucího logaritmu). Druhým krokem je použití Abelova kritéria, neboť posloupnost $\sqrt[n]{n}$ je omezená a monotónní, což lze zjistit derivováním, funkce $x^{1/x}$ klesá od e do ∞ . Závěrem tedy naše řada konverguje.

Nyní má smysl zjišťovat, zda je tato konvergence absolutní, tedy zda konverguje řada

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln \ln \ln n}.$$

Zde stačí srovnávací kritérium: zřejmě $\sqrt[n]{n} > 1$ a $\frac{1}{\ln \ln \ln n} > \frac{1}{n}$, takže řada absolutních hodnot diverguje.

Proto řada ze zadání konverguje neabsolutně.

2. (1 bod)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos \frac{\pi n^2}{n+1}$$

Opět řada s obecnými členy. Potřebovali bychom tudíž použít Dirichleta nebo Abela, vidíme, že $\frac{1}{\ln^2 n}$ jde monotónně k nule, takže by nám podle Dirichleta stačilo, aby $\sum \cos \frac{\pi n^2}{n+1}$ měla omezené částečné součty. Jak to ale zjistit, když se nejedná o žádnou z defaultních řad s touto vlastností? Tady pozor, někteří z vás udělali chybu prohlášením, že tato řada omezené částečné součty má, protože se jedná o cosinus s argumentem různým od $2k\pi$.

Ale to je nesmysl, ta defaultní řada je přece $\sum \cos nx$, kde x je pevné číslo, a ne výraz závislý na n . Náš případ tedy takto zdůvodnit nemůžeme.

Můžeme si ale všimnout, že výraz $\frac{\pi n^2}{n+1}$ se pro rostoucí n bude čím dál méně lišit od πn , a $\cos \pi n$ už omezené částečné součty má. Abychom tohoto dokázali využít, rozložíme si

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi n^2}{n+1} &= \cos \left(\pi n - \pi \frac{n}{n+1} \right) = \\ &= \cos(\pi n) \cos \left(\pi \frac{n}{n+1} \right) + \sin(\pi n) \sin \left(\pi \frac{n}{n+1} \right) = \\ &= (-1)^n \cos \left(\pi \frac{n}{n+1} \right),\end{aligned}$$

protože $\cos(\pi n) = (-1)^n$ a $\sin(\pi n) = 0$.

Máme tedy řadu upravenou na tvar

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^2 n} \cos \left(\pi \frac{n}{n+1} \right)$$

a pro něj už můžeme použít běžná kritéria: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^2 n}$ konverguje dle Leibnize, a $\cos \left(\pi \frac{n}{n+1} \right)$ je omezená (zřejmě) a monotónní (protože $\pi \frac{n}{n+1}$ jde monotónně zleva k π), takže pan Abel nám zaručí konvergenci celé řady.

Co se týče absolutní konvergence, stačí porovnat $\frac{1}{\ln^2 n} > \frac{1}{n}$ a protože $|\cos \left(\pi \frac{n}{n+1} \right)|$ jde k 1, má tato posloupnost (pro skoro všechna n) hodnotu větší než například $\frac{1}{2}$. Tedy pro skoro všechna n je $|a_n| > \frac{1}{2n}$ a proto naše zadaná řada konverguje neabsolutně.

3. (1 bod) V $\mathbb{C}$ vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci mocninné řady, všechny kroky řádně zdůvodněte:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^n \left(\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right)^p, \quad p \in \mathbb{R}$$

Nápověda: pomůže vám vzorové řešení úlohy 20 ze sady 2/6 a úlohy 6 ze sady 2/7.

Díky výrazům s faktoriály se pro výpočet poloměru konvergence mocninné řady nabízí použít výraz s podílem, tedy

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left(\frac{2^{n+1} ((n+1)!)^2 (2n+1)!}{(2n+3)! 2^n (n!)^2} \right)^p = \left(\frac{2(n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} \right)^p \rightarrow \frac{1}{2^p}$$

a tedy $\boxed{R = 2^p}$, pro $|z| < 2^p$ řada konverguje absolutně a pro $|z| > 2^p$ diverguje. Zbývá vyšetřit chování na hraniční kružnici $|z| = 2^p$. Absolutní konvergence odpovídá dosazení

$z = -2^p$, jde o řadu

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{np} \left(\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right)^p &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!} \right)^p = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n!!)^2}{(2n+1)!} \right)^p = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n!!}{(2n+1)!!} \right)^p. \end{aligned}$$

Přitom jsme použili vztahy $2^n n! = (2n)!!$ a $(2n+1)! = (2n)!!(2n+1)!!$. Z předchozích cvičení (Sada 2/7, Př. 6) víme, že výraz $\frac{2n!!}{(2n+1)!!}$ konverguje monotonně k nule a přitom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \frac{2n!!}{(2n+1)!!} < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}},$$

proto tato řada: $\begin{cases} \text{pro } p \leq 0 \text{ diverguje (není splněna nutná podmínka konvergence),} \\ \text{pro } p \in (0, 2) \text{ diverguje (srovnáním s divergentní řadou } \sum \frac{1}{(2n+1)^{p/2}}), \\ \text{pro } p \in (2, +\infty) \text{ konverguje (srovnáním s konvergentní řadou } \sum \frac{2^{p/2}}{(2n+1)^{p/2}}). \end{cases}$

Pro ostatní body na kružnici, tj. $z = 2^p e^{i\varphi}$, $\varphi \neq \pi$, pak řada $\begin{cases} \text{pro } p \leq 0 \text{ diverguje (není splněna nutná podmínka konvergence),} \\ \text{pro } p \in \mathbb{R}_+ \text{ konverguje dle Dirichletova kritéria, } ((-1)^n e^{in\varphi} \text{ má omezené částečné součty),} \\ \text{a sice neabsolutně pro } p \in (0, 2) \text{ a absolutně pro } p \in (2, +\infty). \end{cases}$

4. (1 bod) Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$$

- (a) pomocí sečtení řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(n+1)}$ s derivováním/integrováním člen po členu a také
 (b) pomocí známého součtu řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

(a) Položíme postupně

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(n+1)} \\
 g(x) &= x \cdot f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n(n+1)} \\
 g'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} \\
 g''(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n = \frac{-1}{x+1}, \quad x \in (-1, 1) \\
 g'(x) &= \int \frac{-1}{x+1} dx = -\ln(x+1) + c, \quad \text{dosazením dopočteme } c = 0, \\
 g(x) &= \int -\ln(x+1) dx = (x+1)(1 - \ln(x+1)) + c, \quad \text{dopočteme } c = -1, \text{ tedy} \\
 g(x) &= (x+1)(1 - \ln(x+1)) - 1 \text{ pro } x \in (-1, 1).
 \end{aligned}$$

Hledáme hodnotu $f(1)$ a tedy $g(1)$, jedná se však o hraniční hodnotu argumentu (řada pro g konverguje na $(-1, 1)$), proto musíme použít Abelovu větu. Snadno ověříme (třeba pomocí Leibnize nebo srovnáním s $\sum \frac{1}{n^2}$ - zde dokonce vidíme absolutní konvergenci), že zadaná řada konverguje pro $x = 1$, a proto získáme hodnotu $g(1)$ dosazením $x = 1$ do $g(x)$, a z ní ihned i hledanou hodnotu

$$f(1) = \frac{g(1)}{1} = \boxed{1 - 2 \ln 2}.$$

(b) Stejného výsledku se dopočítáme, když si rozložíme

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

a tudíž je naše řada rovna

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^n}{n+1} = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 1 - 2 \ln 2.$$

Nejčastější chybou bylo, když jste v metodě (a) neuvedli použití Abelovy věty a ověření jejích předpokladů - zajímá nás totiž součet v bodě na hranici oboru konvergence a pak to bez Abelovy věty nejde. Uvědomte si, že i v metodě (b) pro součet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$ musíme Abelovu větu použít.

Lukáš Krump, 13.5.2025