Matematická analýza pro informatiky, LS 18/19

Příklady na cvičení 10 (3.5.2019) – opravená verze

1. Funkce jsou dány vztahy
$$z = F(x,y) = x^2 - y^2; (x,y) = G(s,t) = (s \cdot \cos t, s \cdot \sin t).$$
Určete parciální derivace $\frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial t}$ (tj. parciální derivace složené funkce $F(G(s,t))$), a to (a) použitím řetízkového pravidla, (b) přímým dosazením a zderivováním.
2. Pro funkci
$$\begin{aligned} f(x,y) &= xy\tfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} && \text{pro}(x,y) \neq (0,0) \\ &= 0 && \text{pro}(x,y) = (0,0) \end{aligned}$$
spočtěte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$, a rozhodněte, ve kterých bodech jsou druhé smíšené parciální derivace záměnné.
3. Ukažte, že rovnice $F(x,y) = x^2 + 2y^2 + y^4 - y^5 = 0$ určuje v nějakém okolí bodu $a = (0,1)$ implicitní funkci $y = \varphi(x)$. Spočtěte první a druhou derivaci funkce φ v bodě 0.

Řešení:

1. $(\frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial t}) = (2s \cdot \cos 2t, -2s^2 \cdot \sin 2t)$
2. V bodech $(x,y) \neq (0,0)$ je
$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\frac{x^4 - y^4 + 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = -x\frac{x^4 - y^4 + 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2},$$
druhé (smíšené) parciální derivace budou sice složitější, ale stále jen funkce podobného typu, tj. racionální lomené se jmenovatelem $(x^2+y^2)^4$, a tedy spojité a tedy záměnné. V bodě $(0,0)$ musíme parciální derivace spočítat zvlášť: funkce je nulová na osách, proto jsou $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Dále pro každý bod na ose y je $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$ (dosadili jsme $x = 0$ do $\partial_x f(x,y)$), proto $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$ a podobně pro každý bod na ose x je $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$, smíšené derivce v počátku tedy nejsou záměnné.
3. $\partial_y F(0,1) = -1 \neq 0$, proto taková funkce φ existuje. Dále spočteme
$$0 = \frac{\partial}{\partial x} F(x, \varphi(x)) = \frac{\partial F}{\partial x} + \partial F \partial y \varphi'(x) \tag{1}$$
a proto
$$\varphi'(0) = -\frac{\partial_x F(0,1)}{\partial_y F(0,1)} = -\frac{2}{-1} = 2.$$
Druhým zderivováním dostáváme
$$0 = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\varphi'(x) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\varphi'(x))^2 + \frac{\partial F}{\partial y}\varphi''(x). \tag{2}$$
Odsud (po dopočtení všech derivací a dosazením bodu a) dostáváme $\varphi''(0) = -14$.

Poznámka 1: v původní verzi tohoto textu a na cvičeních 3.5. jsem špatně spočetl vztah 2, z něhož lze dopočítat druhou parciální derivaci implicitní funkce. Je to poučná chyba: vztah (1) je třeba číst včetně implicitní funkce na místě druhé proměnné, tj.

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x)) \right) \varphi'(x) \tag{3}$$

a tedy v jeho parciální derivaci podle x se projeví řetízkové pravidlo, konkrétně po jednotlivých sčítancích

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, \varphi(x)) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, \varphi(x)) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, \varphi(x)) \right) \varphi'(x)$$

a

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x)) \right) \varphi'(x) \right) = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, \varphi(x)) \right) \varphi'(x) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, \varphi(x)) \right) (\varphi'(x))^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x)) \right) \varphi''(x),$$

a jejich součtem získáváme vztah (2).

Poznámka 2: Samozřejmě lze první i druhou derivaci implicitní funkce spočítat také (a pro druhou derivaci snáze) zderivováním explicitního tvaru původní rovnice s dosazenou funkcí $\varphi(x)$, tj. do předpisu $F(x, y) = x^2 + 2y^2 + y^4 - y^5 = 0$ dosadíme $y = \varphi(x)$, derivujeme podle x a dosazujeme postupně zadané hodnoty $x = 0$, $\varphi(x) = 1$, dopočtenou hodotu $\varphi'(0) = 2$ a nakonec vyjde opět $\varphi''(0) = -14$.