Výpočet báze průniku dvou podprostorů

Najděte nějakou bázi průniku vektorových podprostorů U, $V \leq \mathbb{Z}_5^4$.

$$U = \left\langle (2,4,1,0)^{\mathrm{T}}, (1,3,0,0)^{\mathrm{T}}, (1,3,4,0)^{\mathrm{T}}, (0,2,4,0)^{\mathrm{T}} \right\rangle$$
$$V = \left\langle (2,1,4,4)^{\mathrm{T}}, (3,0,2,1)^{\mathrm{T}}, (4,3,0,2)^{\mathrm{T}}, (1,4,1,4)^{\mathrm{T}} \right\rangle$$

Ukážeme dva způsoby řešení.

Řešení 1. Najdeme dvě matice $\boldsymbol{A}_U$ a $\boldsymbol{A}_V$ takové, že $\operatorname{Ker} \boldsymbol{A}_U = U$ a $\operatorname{Ker} \boldsymbol{A}_V = V$. Z těchto matic potom snadno spočítáme průnik jejich jader, tj. průnik prostoru U s prostorem V.

Generátory prostoru U nejdříve zapíšeme do řádků matice a spočítáme její jádro.

$$\operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \cdots = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle (0,0,0,1)^{\mathrm{T}} \right\rangle \tag{1}$$

Za $\boldsymbol{A}_U$ můžeme zvolit matici $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Přesvědčte se, že $\operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$. Kdyby mělo jádro (1) více generátorů, zapsali bychom je do jednotlivých řádků matice $\boldsymbol{A}_U$.

Totéž uděláme s generátory prostoru V.

$$\operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \cdots = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \left\langle (4,4,1,1)^{\mathrm{T}} \right\rangle$$

Za $\boldsymbol{A}_V$ zvolíme matici $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Průnik $\operatorname{Ker} \boldsymbol{A}_U$ s $\operatorname{Ker} \boldsymbol{A}_V$ je množina všech vektorů, které jsou řešením homogenní soustavy s maticí $\boldsymbol{A}_U$ a zároveň jsou řešením homogenní soustavy s maticí $\boldsymbol{A}_V$. Tato řešení najdeme tak, že obě soustavy sloučíme do jediné:

$$\begin{aligned} U \cap V = \operatorname{Ker} \boldsymbol{A}_U \cap \operatorname{Ker} \boldsymbol{A}_V = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_U \\ \hline \boldsymbol{A}_V \end{pmatrix} \\ = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle (4,1,0,0)^{\mathrm{T}}, (1,0,1,0)^{\mathrm{T}} \right\rangle. \end{aligned}$$

Řešení 2. Označme zadané čtveřice vektorů, které generují prostory U a V, jako u_1, u_2, u_3, u_4 a v_1, v_2, v_3, v_4. Průnik prostoru U s prostorem V obsahuje právě ty vektory, které leží v prostoru U a zároveň leží v prostoru V, tj. ty vektory, které lze vyjádřit jako lineární kombinaci u_1, u_2, u_3, u_4 a zároveň jako lineární kombinaci v_1, v_2, v_3, v_4. Čili $w \in U \cap V$ právě tehdy, když existují $x_1, x_2, \ldots, x_8 \in \mathbb{Z}_5$ takové, že

$$w = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4, \tag{2}$$
$$w = x_5 v_1 + x_6 v_2 + x_7 v_3 + x_8 v_4. \tag{3}$$

Odečtením rovnice (3) od rovnice (2) získáme rovnici (resp. soustavu)

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4 - x_5 v_1 - x_6 v_2 - x_7 v_3 - x_8 v_4 = 0. \tag{4}$$

Nejdříve najdeme všechna řešení této homogenní soustavy a z nich potom získáme všechny vektory $w \in U \cap V$, a to tak, že řešení soustavy dosadíme buď do rovnice (2), nebo do rovnice (3). K tomuto stačí, abychom pro každé řešení soustavy znali buď pouze x_1, x_2, x_3, x_4, nebo pouze x_5, x_6, x_7, x_8. Sestavíme tedy matici soustavy (4) a převedeme ji do odstupňovaného tvaru.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & -v_1 & -v_2 & -v_3 & -v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 4 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Nalezneme generátory prostoru řešení soustavy. Vzhledem k tomu, že potřebujeme znát pouze x_5, x_6, x_7, x_8, stačí určit poslední čtyři souřadnice generátorů prostoru řešení:

$$\begin{aligned} &(\_, \_, \_, 1, \underline{0}, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}, \\ &(\_, \_, \_, 0, \underline{1}, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}, \\ &(\_, \_, \_, 0, \underline{2}, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \\ &(\underbrace{\_, \_, \_, 0}_{\text{nepotřebujeme}}, \underline{4}, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}. \end{aligned} \tag{6}$$

Odtud získáme vyjádření pro x_5, x_6, x_7, x_8:

$$\begin{pmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r + 2s + 4t \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix}, \quad \text{kde } r, s, t \in \mathbb{Z}_5.$$

Dosazením x_5, x_6, x_7, x_8 do rovnice (3) získáme vyjádření pro všechna $w \in U \cap V$:

$$w = (r + 2s + 4t) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde $r, s, t \in \mathbb{Z}_5$. Odtud vidíme, že prostor $U \cap V$ je generován vektory $(0, 1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $(3, 0, 3, 0)^{\mathrm{T}}$ a $(4, 3, 2, 0)^{\mathrm{T}}$. Poslední vektor je lineární kombinací prvních dvou, neboť $(4, 3, 2, 0)^{\mathrm{T}} = 3(0, 1, 1, 0)^{\mathrm{T}} + 3(3, 0, 3, 0)^{\mathrm{T}}$. Báze prostoru $U \cap V$ je například $\big((3, 0, 3, 0)^{\mathrm{T}}, (0, 1, 1, 0)^{\mathrm{T}}\big)$.

Na závěr ještě poznamenejme, že generátory prostoru $U \cap V$ lze spočítat přímo z generátorů prostoru řešení (6), aniž by bylo nutné vše zdlouhavě rozepisovat pomocí proměnných r, s a t. Stačí postupně dosadit do rovnice (3) jednotlivé generátory prostoru řešení (6), resp. jejich poslední čtyři souřadnice:

$$\begin{aligned} 0v_1 + 0v_2 + 0v_3 + 0v_4 &= (0, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}, \\ 1v_1 + 1v_2 + 0v_3 + 0v_4 &= (0, 1, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \\ 2v_1 + 0v_2 + 1v_3 + 0v_4 &= (3, 0, 3, 0)^{\mathrm{T}}, \\ 4v_1 + 0v_2 + 0v_3 + 1v_4 &= (4, 3, 2, 0)^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$