

Domáci úkol č. 10

Zadáno: 16. 12.

Deadline: 6. 1.

Pomocí Taylorových polynomů spočítejte limity

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(x+1)}{x^3}.$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(x^4) - x^4}{(x - \sin x)^4}.$$

Řešení

1. Elementární Taylorovy rozvoje funkcí nám dají

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(x+1)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2))(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)) - x(x+1)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x - x^2}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

2. Elementární Taylorovy rozvoje funkcí nám dají

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(x^4) - x^4}{(x - \sin x)^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^4 + \frac{(x^4)^3}{6} + o(x^{12})) - x^4}{(x - (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)))^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^{12}}{6} + o(x^{12})}{(\frac{x^3}{6} + o(x^3))^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^{12}}{6} + o(x^{12})}{\frac{x^{12}}{6^4} + o(x^{12})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6} + \frac{o(x^{12})}{x^{12}}}{\frac{1}{6^4} + \frac{o(x^{12})}{x^{12}}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6^4}} = 6^3 = 216 \end{aligned}$$