

- 1 Rozptyl a směrodatná odchylka (srovnej s Markowitzovým modelem); problém se symetrií a předpoklady.
- 2 Durace - pro státní dluhopisy; problémy s předpoklady.
- 3 Komplikované instrumenty, deriváty, greeks (Delta, Gamma, Theta, Rho a Vega).
- 4 Kritérium očekávaného užitku.
- 5 Alternativy k Markowitzovu modelu - Roy, Telser, Kataoka, Sharpe, a další.
- 6 Rizikové míry - VaR, CVaR.
- 7 Stress testing, analýza výsledku, worst-case analýza.

Roy (1952): *Safety-First Criterion*

Nechť

- I dostupná aktiva, z nichž skládáme portfolio,
- x_i množství i -tého aktiva v portfoliu ($i = 1, \dots, I$),
- ρ_i náhodný výnos i -tého aktiva ($i = 1, \dots, I$),
- r_i očekávaný výnos i -tého aktiva ($i = 1, \dots, I$),
- r_p požadovaný výnos,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_I \end{pmatrix}, \rho = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_I \end{pmatrix}, r = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_I \end{pmatrix}.$$

Alternativou k Markowitzovu modelu může být snaha maximalizovat pravděpodobnosti, že skutečný výnos portfolia překročí požadovanou mez, tj.

$$\max_{x \in \mathbb{X}} P(\rho^T x \geq r_p).$$

Roy (1952): *Safety-First Criterion*

Za předpokladu normality, tj.

$$\rho \sim N(r, V) \Rightarrow \rho^T x \sim N(r^T x, x^T V x),$$

můžeme odvodit

$$\begin{aligned} P(\rho^T x \geq r_p) &= P\left(\frac{\rho^T x - r^T x}{\sqrt{x^T V x}} \geq \frac{r_p - r^T x}{\sqrt{x^T V x}}\right) = \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{r_p - r^T x}{\sqrt{x^T V x}}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{r^T x - r_p}{\sqrt{x^T V x}}\right). \end{aligned}$$

Dostáváme tak deterministickou úlohu (Φ je rostoucí funkce)

$$\max_{x \in \mathbb{X}} \frac{r^T x - r_p}{\sqrt{x^T V x}}.$$

Telser (1955): Chance-Constrained Criterion

Dalším způsobem, jak konstruovat portfolio, může být snaha maximalizovat očekávaný výnos za podmínky, že pravděpodobnost, že skutečný výnos překročí požadovanou mez, bude dostatečně velká.

Poprvé formulováno Telserem:

$$\max_{x \in \mathbb{X}} \{ r^T x : P(\rho^T x \geq r_p) \geq 1 - \alpha \},$$

kde

r_p je předepsaná hodnota celkového výnosu z portfolio,

$\alpha \in (0, 1)$ značí danou pravděpodobnost.

Telser (1955): Chance-Constrained Criterion

Za předpokladu normality, tj.

$$\rho \sim N(r, V) \Rightarrow \rho^T x \sim N(r^T x, x^T V x),$$

můžeme odvodit

$$\begin{aligned} P(\rho^T x \geq r_p) \geq 1 - \alpha &\Leftrightarrow 1 - \Phi\left(\frac{r_p - r^T x}{\sqrt{x^T V x}}\right) \geq 1 - \alpha \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{r_p - r^T x}{\sqrt{x^T V x}}\right) \leq \alpha \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{r_p - r^T x}{\sqrt{x^T V x}} \leq \Phi^{-1}(\alpha) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow r^T x + \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{x^T V x} \geq r_p. \end{aligned}$$

Odtud pak dostáváme úlohu

$$\max_{x \in \mathbb{X}} \left\{ r^T x : r^T x + \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{x^T V x} \geq r_p \right\}.$$

Kataoka (1963): Quantile Criterion

Kataoka představil kritérium, jehož podstatou je snaha maximalizovat mez, kterou skutečný výnos portfolia dosáhne či překročí s dostatečně velkou pravděpodobností $1 - \alpha$ (α obvykle voleno jako 0,01 nebo 0,05), tj.

$$\max \{r_p : x \in \mathbb{X}, P(\rho^T x \geq r_p) \geq 1 - \alpha\}$$

Za předpokladu normality řešíme úlohu ($\Phi^{-1}(\alpha)$ značí 100 α % kvantil normalního rozdělení $N(0, 1)$)

$$\max \left\{ r_p : x \in \mathbb{X}, r^T x + \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{x^T V x} \geq r_p \right\},$$

což je ekvivalentní s problémem

$$\max_{x \in \mathbb{X}} \left\{ r^T x + \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{x^T V x} \right\}.$$

Quadratic Semivariance

Námitky proti symetrii *rozptylu výnosu* jako míry rizika vedly k definici asymetrické míry *kvadratické semivariance*

$$E \left\{ \left(\left[\sum_{i \in I} r_i x_i - \sum_{i \in I} \rho_i x_i \right]^+ \right)^2 \right\}.$$

Nevýhodou je nárůst obtížnosti numerického výpočtu řešeného optimalizačního problému.

Sharpe (1971) navrhl definovat riziko jako *mean absolute deviation*

$$m(x) := E \left| \sum_{i \in I} r_i x_i - \sum_{i \in I} \rho_i x_i \right|.$$

Sharpeho myšlenku pak aplikovali Kono a Yamazaki. Získat portfolio eficientní vzhledem k $r^T x$ a $-m(x)$ znamená řešit úlohu:

$$\min_{x \in \mathbb{X}} E \left| \sum_{i \in I} r_i x_i - \sum_{i \in I} \rho_i x_i \right|$$

$$\text{za podmínky} \quad \sum_{i \in I} r_i x_i \geq r_p.$$

- Za předpokladu normality ($\rho \sim N(r, V)$) jsou hodnoty $m(x)$ konstantními násobky $\sqrt{x^T V x}$.
- Není nutné odhadovat varianční matici.
- Nahradíme-li střední hodnoty výběrovými průměry z historických dat, lze úlohu převést na úlohu lineárního programování.

Případy obrovských ztrát:

- Orange County (1994) v Kalifornii - největší municipalita, která kdy požádala o bankrot. Ztráta ve výši \$1,64 miliard v investičním fondu Orange County Investment Pool (OCIP) byla způsobena nevhodnou investiční strategií Roberta Citrona. Vsadil na nízké úrokové sazby.
 - Barings Bank (1995) - v době kolapsu nejstarší obchodnická banka v Londýně. Ztráta ve výši \$1,3 miliard způsobená nevydařeným obchodováním Nicka Leeson s futures a opcemi na japonských a singapurských burzách.
 - Daiwa Bank (1995) - ztráta \$1,1 miliard.
 - Sumitomo Corporations (1996) - ztráta \$2,6 miliard.
 - LTCM (1998) - ztráta \$4,6 miliard.
 - ENRON (2001), Global Crossing (2002), WorldCom (2002), Parmalat (2003) a další.
- ⇒ Potřeba definovat obecně akceptovatelné rizikové míry.

Nechť X je reálná náhodná veličina definovaná na $(\Omega, \mathcal{A})$. Definujme (uvažujeme zprava spojitou distribuční funkci)

$$q_\alpha(X) := \min\{x \in \mathbb{R} : P[X \leq x] \geq \alpha\} \dots \text{dolní } \alpha\text{-kvantil } X,$$

$$q^\alpha(X) := \inf\{x \in \mathbb{R} : P[X \leq x] > \alpha\} \dots \text{horní } \alpha\text{-kvantil } X.$$

Horní α -kvantil můžeme také vyjádřit jako

$$q^\alpha(X) = \sup\{x \in \mathbb{R} : P[X \leq x] \leq \alpha\}.$$

Zřejmě $q_\alpha(X) \leq q^\alpha(X)$.

Rovnost nastává právě tehdy, když $P[X \leq x] = \alpha$ pro nejvýše jedno x .

V případě, kdy $q_\alpha(X) < q^\alpha(X)$, platí

$$\{x \in \mathbb{R} : \alpha = P[X \leq x]\} = \begin{cases} [q_\alpha(X), q^\alpha(X)) & P[X = q^\alpha(X)] > 0, \\ [q_\alpha(X), q^\alpha(X)] & P[X = q^\alpha(X)] = 0. \end{cases}$$

Nechť T je daný budoucí časový horizont, $\alpha \in (0, 1)$ je zvolená konfidenční hladina a náhodná veličina X reprezentuje ztrátu uvažovaného portfolia. Pak $VaR_\alpha(X)$ je "maximální možná ztráta portfolia za dané období při zvolené konfidenční hladině".

VaR můžeme také interpretovat tak, že *náhodná ztráta větší než $VaR_\alpha(X)$ nastane jen s malou pravděpodobností $1 - \alpha$. Zatímco ztráty menší než $VaR_\alpha(X)$ nastanou s pravděpodobností α blízké 1.*

- Konfidenční hladinu volíme blízko 1, doporučuje se 0,95 nebo 0,99.
- Horizont volíme 1 den i 1 měsíc, doporučení Basel komise je 10 dní.
- VaR odhadujeme na základě historických dat (1 rok). POZOR na HOMOGENITU!

Definujeme

$$VaR_\alpha(X) := q_\alpha(X) \quad \text{a} \quad VaR^\alpha(X) := q^\alpha(X).$$

V případě spojitého rozdělení se shodují.

Parametrický Value-at-Risk

Předpokládejme, že rozdělení náhodné ztráty X pochází z *location-scale* rodiny rozdělení (např. normální rozdělení), tj.

$$F_{\mu,\sigma}(x) = G\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right),$$

kde $\mu \in \mathbb{R}$ je parametr polohy a $\sigma > 0$ představuje měřítko. Pak

$$P(X \leq VaR_{\alpha}(X)) = P\left(\frac{x - \mu}{\sigma} \leq \frac{VaR_{\alpha}(X) - \mu}{\sigma}\right) = G\left(\frac{VaR_{\alpha}(X) - \mu}{\sigma}\right) = \alpha$$

a odtud dostáváme

$$VaR_{\alpha}(X) = \mu + \sigma q_{\alpha}(X) \quad \dots \text{absolutní VaR,}$$

kde q_{α} je $100\alpha\%$ kvantil distribuční funkce $G(x)$. Jako relativní VaR, pak považujeme hodnotu $VaR_{\alpha \text{ rel}}(X) = \sigma q_{\alpha}(X)$.

- K získání VaR ztráty portfolia, která je váženým průměrem ztrát jednotlivých instrumentů, potřebujeme odhadnout individuální střední hodnoty, rozptyly a kovariance.
- Výpočet VaR přes M období (při konstantím rozptylu σ^2 a střední hodnotě μ) znamená použití vztahů pro absolutní, resp. relativní, VaR s rozptylem $\sigma_M^2 = M\sigma^2$ a střední hodnotou (v závislosti na předpokladech) $\mu_m = \mu$ nebo $\mu_m = M\mu$.

Není-li zcela známa analytická (parametrická) podoba distribuční funkce náhodné ztráty X , ale jsou dostupná rozsáhlá historická pozorování, může založit výpočet VaR na neparametrickém postupu.

Nechť $x^{[1]} < \dots < x^{[S]}$ jsou pozorované ztráty uspořádané dle velikosti.

Namísto teoretického kvantilu uvažujme nyní *empirický kvantil* definovaný

$$\hat{q}_\alpha := \begin{cases} x^{[\lfloor S\alpha \rfloor + 1]} & \text{pokud } S\alpha \notin \mathbb{Z}, \\ \frac{1}{2} [x^{[S\alpha]} + x^{[S\alpha + 1]}] & \text{pokud } S\alpha \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

- Lze aplikovat na poměrně složité instrumenty, neboť nevyžaduje znalost rozdělení. Teorie však vyžaduje *nezávislá* pozorování.
- Přesnost závisí na výběru a na volbě α . Velká α vyžadují velká data.

Výhody:

- VaR je univerzální míra (lze ji aplikovat na všechny druhy rizika, můžeme sčítat různá rizika do jednoho čísla).
- VaR je globálně používaná míra.
- VaR je vyjádřena v jednotce "ztráta peněz".

Nevýhody:

- VaR není koherentní míra rizika. Nesplňuje předpoklad sub-aditivity (krom eliptických rozdělení).
- VaR už se nezajímá o to, jak velká ztráta může být překračující VaR.
- VaR dobře nerozlišuje mezi tvary rozdělení.
- VaR není konvexní. Nelze rozumně optimalizovat portfolio vzhledem k minimálnímu VaR. Problém s lokálními extrémy.

Altzer, Delbaen, Eber a Health (1999): Koherentní míry rizika

Uvažujme množinu V reálných náhodných veličin. Funkci $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}$ nazveme koherentní mírou rizika, pokud splňuje:

1. *Monotonie*: $X, Y \in V, Y(\omega) \geq X(\omega), \forall \omega \in \Omega \Rightarrow \rho(Y) \geq \rho(X)$.
2. *Sub-aditivita*: $X, Y, X + Y \in V, \Rightarrow \rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.
3. *Positivní homogenita*: $X \in V, h > 0, hX \in V \Rightarrow \rho(hX) = h\rho(X)$.
4. *Translační ekvivariance*: $X \in V, a \in \mathbb{R} \Rightarrow \rho(X + a) = \rho(X) + a$.

X, Y reprezentují náhodné ztráty definované na $(\Omega, \mathcal{A})$. Axiom *Monotonie* může být nahrazen předpokladem

- 1b. *Positivita*: $X \in V, X(\omega) \geq 0, \forall \omega \in \Omega \Rightarrow \rho(X) \geq 0$.

Sub-aditivita spolu s *homogenitou* implikují

5. *Konvexnost*:

$$X, Y \in V, \alpha \in [0, 1] \Rightarrow \rho(\alpha X + (1 - \alpha)Y) \leq \alpha\rho(X) + (1 - \alpha)\rho(Y).$$

Conditional Value-at-Risk

Nechť T je daný budoucí časový horizont, $\alpha \in (0, 1]$ je zvolená hladina a X reprezentuje náhodnou ztrátu s distribuční funkcí $G(x)$ uvažovaného portfolia. Pak $CVaR_\alpha(X)$ je průměrná ztráta ze 100(1 - α)% nejhorších případů ztrát portfolia.

$CVaR_\alpha(X) :=$ střední hodnota α -chvostu rozdělení X ,

kde zmíněné rozdělení definujeme jako

$$G_\alpha(x, VaR_\alpha(X)) := \begin{cases} \frac{G(x) - \alpha}{1 - \alpha} & \text{pro } x \geq VaR_\alpha(X), \\ 0 & \text{pro } x < VaR_\alpha(X). \end{cases}$$

Definujeme

$$TCE_\alpha(X) := E\{X | X \geq VaR_\alpha(X)\} \quad \text{a} \quad TCE^\alpha(X) := E\{X | X > VaR_\alpha(X)\}.$$

Pro spojitá rozdělení dostáváme

$$TCE_\alpha(X) = TCE^\alpha(X) = CVaR_\alpha(X).$$

Předpokládejme nyní, že $E|X| < \infty$ a definujme

$$F_\alpha(X, a) := a + \frac{1}{1 - \alpha} E[X - a]^+$$

konvexní a konečnou (odtud také spojitou) funkci v a .

Rockafellar a Uryasev ukazáli, že

$$CVaR_\alpha(X) = \min_{a \in \mathbb{R}} F_\alpha(X, a) = \min_{a \in \mathbb{R}} \left\{ a + \frac{1}{1 - \alpha} E[X - a]^+ \right\}$$

a navíc

$$\operatorname{argmin}_{a \in \mathbb{R}} F_\alpha(X, a) = [VaR_\alpha(X), VaR^\alpha(X)].$$

Optimalizace portfolia vzhledem k minimálnímu CVaR

Nechť

$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_I)^T$ značí náhodné ztráty instrumentů, z nichž skládáme portfolio,

$x = (x_1, \dots, x_I)^T$ reprezentuje vektor rozhodnutí, kolik kterého instrumentu nakoupíme, $x \in \mathbb{X}$, $\mathbb{X} \neq \emptyset$ konvexní polyedrická množina,

$X = x^T \xi$ vyjadřuje náhodnou ztrátu portfolia při rozhodnutí x .

Úlohu optimalizace portfolia formulujeme jako

$$\min_{x \in \mathbb{X}, a \in \mathbb{R}} \left\{ a + \frac{1}{1 - \alpha} E[x^T \xi - a]^+ \right\}.$$

Uvažujme scénáře $\xi^1, \dots, \xi^S$ s příslušnými pravděpodobnostmi $p^1, \dots, p^S$. Dostáváme úlohu lineárního programování

$$\min_{z^1, \dots, z^S, a, x} \left\{ a + \frac{1}{1 - \alpha} \sum_{s=1}^S p^s z^s \right\}$$

za podmínek $z^s \geq x^T \xi^s - a, z^s \geq 0, \quad s = 1, \dots, S,$
 $x \in \mathbb{X}, a \in \mathbb{R}.$

Zájmem investorů je zjistit, co se stane, budou-li tržní podmínky extrémální. Možnou metodou je analýza scénářů. Stress testing začíná konstrukcí scénářů pokrývajících extrémní události

- *historical stress test* - scénáře konstruujeme na základě historické zkušenosti (krize v minulosti),
- *prospective stress test* - scénáře, které mohou být možné v budoucnu v důsledku změn makroekonomických, socioekonomických nebo politických faktorů,

Podoba stress testů se liší v závislosti na společnosti, která je provádí a také v závislosti na problému, který je řešen.

- *Persistence* - existence optimálního řešení v důsledku perturbace pravděpodobnostního rozdělení P .
- *Kvalitativní stabilita* - spojitost optimální hodnoty $\varphi(P)$ a množiny optimálních řešení $\mathcal{X}^*(P)$ vzhledem k P .
- *Kvantitativní stabilita* - poskytuje horní meze pro vzdálenosti optimálních hodnot a optimálních řešení při změně pravděpodobnostního rozdělení, např. při *kontaminaci* jiným rozdělením.
- *Backtesting* - historický (testování validity modelu na historických datech), experimentální (testování modelu na pseudo-historických datech získaných simulacemi).
- *Worst-case analysis* - analýza nejhorších možných výsledků, konstrukce nejhorších scénářů. Lze aplikovat minimaxový přístup, tj. "nejlepší možná ochrana proti nejhoršímu možnému výsledku". Dostáváme tak meze pro možné ztráty.

Je-li k dispozici jen částečná informace o pravděpodobnostním rozdělení P náhodné veličiny X , můžeme charakterizovat dostupnou informaci množinou přípustných rozdělení $\mathcal{P}$. Uvažujme např., že máme pouze informaci o prvních dvou momentech rozdělení, pak

$$P \in \mathcal{P} := \{P : E_P[X] = \mu, E_P[X - \mu]^2 = \sigma^2\}.$$

Definujme

$$VaR_{\alpha}^{wc}(X) := \min_{x \in \mathbb{R}} \sup_{P \in \mathcal{P}} \{x : P[X \leq x] \geq \alpha\},$$

$$CVaR_{\alpha}^{wc}(X) = \min_{a \in \mathbb{R}} \sup_{P \in \mathcal{P}} \left\{ a + \frac{1}{1 - \alpha} E[X - a]^+ \right\}.$$

Worst-case VaR a CVaR

