

measures under the relations: $D(X) = R(X - EX)$, $R(X) = E(-X) + D(X)$.

In this correspondence, R is coherent if and only if D is lower range dominated.

příklad (risk envelope for CVAR)

$$M = N = 100, \alpha = 0.95$$

seřadí pravděpodobnosti $l_1, l_2, \dots, l_{100} \Rightarrow$ uspořádání $l^{[1]} \leq l^{[2]} \leq \dots \leq l^{[100]}$

$$\text{úloha: } \max_{y_i} \sum_{i=1}^{100} y_i l_i = \text{CVAR}$$

$$\text{s.t. } \sum_{i=1}^{100} y_i = 1$$

$$0 \leq y_i \leq \frac{1}{5} \text{ pro } y_i$$

? jak přičítat čísla y_i seřazená l_i

optimální řešení: $y_{100}^* = \frac{1}{5}$ (= největší ztráta)

$$y_{99}^* = \frac{1}{5}$$

$$y_{96}^* = \frac{1}{5}$$

$$y_j^* = 0 \text{ pro } j = 1, \dots, 95$$

$$\text{CVAR}_\alpha(L) = \frac{1}{5} (l^{[100]} + \dots + l^{[96]})$$

$$\text{VAR}_\alpha(L) = l^{[95]} \Rightarrow \text{CVAR}_\alpha(L) = E[L | L > \text{VAR}_\alpha(L)] \text{ , protože } N(1-\alpha) \text{ je celé číslo.}$$

$$\text{další upřesnění: } Q = \{Q : EQ = 1, 0 \leq Q \leq \frac{1}{1-\alpha}\}$$

optimální $Q \in Q$ nabývá hodnot $q_{91}, \dots, q_{95} = 0, q_{96}, \dots, q_{100} = \frac{1}{1-\alpha} = 20$

$$E(QL) = \frac{1}{100} \sum_{i=96}^{100} 20 l_i = \text{CVAR}_\alpha(L).$$

3. VÝCHOZÍ ADDITIVNOST

příklad: $M = N = 100, \alpha = 0.975$

$$\text{CVAR}_\alpha(L) = \max \sum_{i=1}^{100} y_i l_i$$

$$\text{s.t. } \sum_{i=1}^{100} y_i = 1$$

$$0 \leq y_i \leq \frac{1}{0.025 \cdot 100} = \frac{1}{2.5} \quad y_i \geq 0$$

$$\text{řešení: } y_{100}^* = \frac{1}{2.5}, y_{99}^* = \frac{1}{2.5}, y_{98}^* = \frac{0.5}{2.5}, y_{97}^* = 0, \dots, y_1^* = 0$$

$$\text{CVAR}_\alpha(L) = \frac{1}{2.5} l^{[100]} + \frac{1}{2.5} l^{[99]} + \frac{0.5}{2.5} l^{[98]}$$

$$\text{VAR}_\alpha(L) = l^{[98]}$$

$$\text{CVAR}_\alpha(L) = l^{[98]} \cdot \frac{0.5}{2.5} + \frac{1}{2.5} \left(\frac{1}{2} (l^{[98]} + l^{[100]}) \right) = \frac{1}{5} \text{VAR}_\alpha(L) + \frac{4}{5} E(L | L > \text{VAR}_\alpha(L))$$

příklad: (konek - Convergence of approximate solutions in mean-risk models)

normální rozdělení: $\text{CVAR}_\alpha(L) = ?$

$$X \sim N(0, 1) \Rightarrow E[X | X > \text{VAR}_\alpha(X)] = \frac{1}{P(X > \text{VAR}_\alpha(X))} \int_{\text{VAR}_\alpha(X)}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx = \frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}} = 1$$