

4, $r^T x^* = \mu$; kdyby μ optimální x^* bylo $r^T x^* > \mu$: podmínky komplementarity \Rightarrow

$$\lambda_2 = 0, \quad 1^T x^* = 1 \Rightarrow 1^T \lambda_1 V^{-1} 1 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{1^T V^{-1} 1} \Rightarrow x^* = x_c$$

$$(\square) \Rightarrow 1^T x^* = 1^T \lambda_1 V^{-1} 1 + 1^T \lambda_2 V^{-1} r = 1^T \lambda_1 V^{-1} 1 = 1$$

Věta (o dvou fondch, two funds separation theorem) měkč x_a a x_b jsou dvě eficientní portfolia s očekávanými výnosy r_a, r_b takovými, že $r_a > r_b$. Pak každé eficientní portfolio x_c může být vyjádřeno u formy: $x_c = \alpha x_a + (1-\alpha)x_b$ pro nějaký α . Dále každé portfolio $x_c = \alpha x_a + (1-\alpha)x_b$ je eficientní.

• Důkaz: měkč r_c je očekávaný výnos portfolio x_c , které je eficientní (\equiv extrémní):

$$r_c = \alpha r_a + (1-\alpha)r_b \Rightarrow \alpha = \frac{r_c - r_b}{r_a - r_b}$$

$$x_a = \lambda_{1a} V^{-1} 1 + \lambda_{2a} V^{-1} r, \quad \lambda_{1a} = \frac{C - r_a B}{\Delta}, \quad \lambda_{2a} = \frac{r_a A - B}{\Delta}$$

$$x_b = \lambda_{1b} V^{-1} 1 + \lambda_{2b} V^{-1} r, \quad \lambda_{1b} = \frac{C - r_b B}{\Delta}, \quad \lambda_{2b} = \frac{r_b A - B}{\Delta}$$

$$x_c = \lambda_{1c} V^{-1} 1 + \lambda_{2c} V^{-1} r = \frac{C - r_c B}{\Delta} V^{-1} 1 + \frac{r_c A - B}{\Delta} V^{-1} r =$$

$$= \frac{C - \alpha r_a B - (1-\alpha)r_b B}{\Delta} V^{-1} 1 + \frac{\alpha r_a A + (1-\alpha)r_b A - B}{\Delta} V^{-1} r =$$

$$= (\alpha \lambda_{1a} + (1-\alpha)\lambda_{1b}) V^{-1} 1 + (\alpha \lambda_{2a} + (1-\alpha)\lambda_{2b}) V^{-1} r = \alpha x_a + (1-\alpha)x_b$$

Další část úkly je zřejmá □

Eficientní portfolio x^* : $\bar{r}x^* = \mu$ pokud $\mu \geq r^T x_b$

$$\text{var}(q^T x^*) = x^{*T} V x^* = (\lambda_1 V^{-1} 1 + \lambda_2 V^{-1} r)^T V (\lambda_1 V^{-1} 1 + \lambda_2 V^{-1} r) = \lambda_1^2 1^T V^{-1} 1 + 2\lambda_1 \lambda_2 1^T V^{-1} r +$$

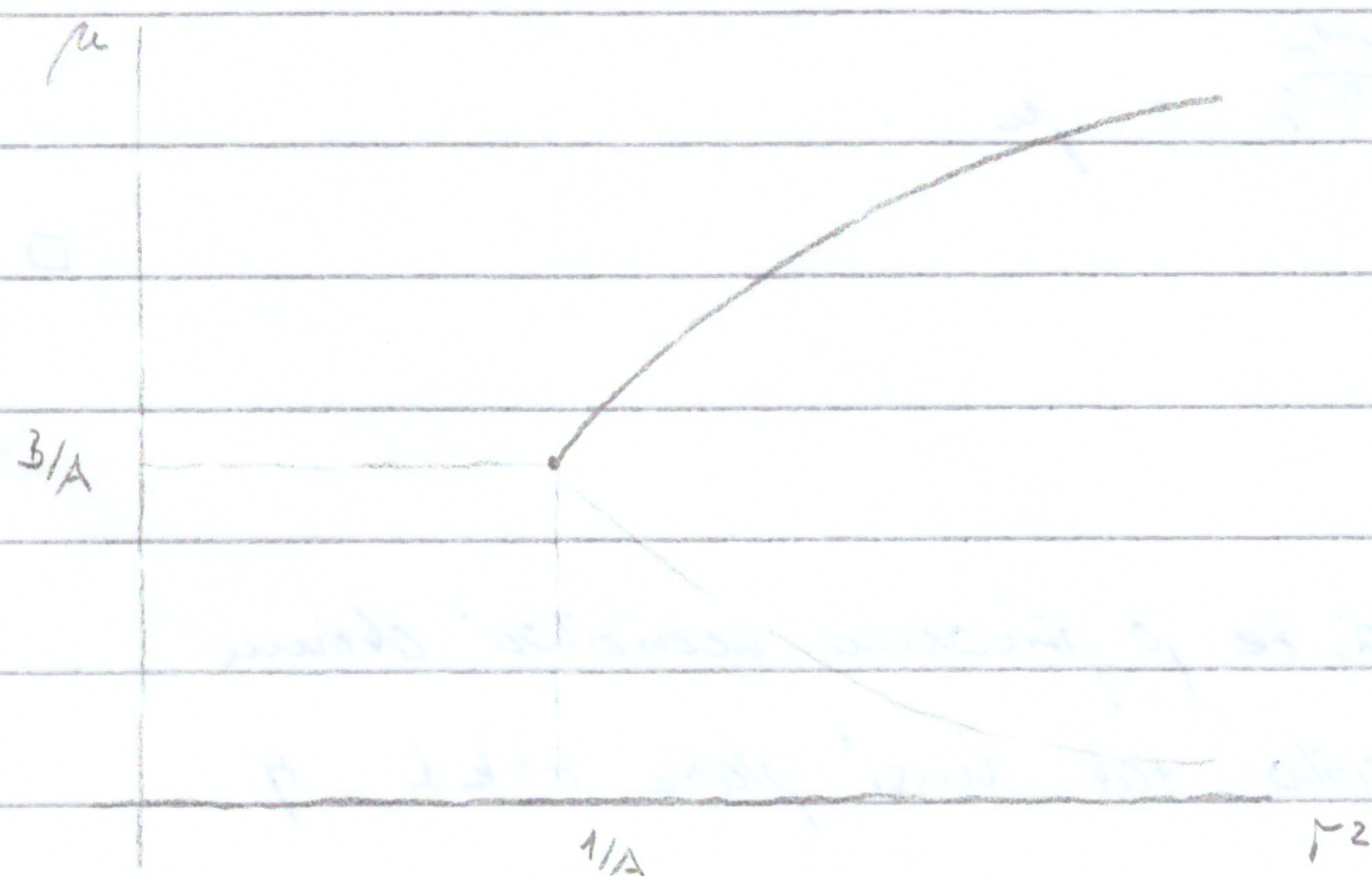
$$+ \lambda_2^2 r^T V^{-1} r = \lambda_1^2 A + 2\lambda_1 \lambda_2 \frac{B}{\Delta} + \lambda_2^2 C = \lambda_1 (\lambda_1 A + \lambda_2 B) + \lambda_2 (\lambda_1 B + \lambda_2 C) =$$

$$= \lambda_1 + \lambda_2 \mu$$

$$1^T x^* = \lambda_1 A + \lambda_2 B = 1$$

$$r^T x^* = \lambda_1 B + \lambda_2 C = \mu$$

$$\text{var}(q^T x^*) = \lambda_1 + \lambda_2 \mu = \frac{C - \mu B}{\Delta} + \frac{\mu A - B}{\Delta} \mu = \frac{2\mu^2 - 2B\mu + C}{\Delta} \quad \text{za podm. } \mu \geq \bar{r}x_b$$



= MEAN-VARIANCE REPRESENTATION OF EFFICIENT PORTFOLIOS

$$\bar{r}x_b = \frac{r^T V^{-1} 1}{1^T V^{-1} 1} = \frac{B}{A}$$

$$x_b^T V x_b = \left(\frac{V^{-1} 1}{1^T V^{-1} 1} \right)^T V \frac{V^{-1} 1}{1^T V^{-1} 1} = \frac{1}{1^T V^{-1} 1} = \frac{1}{A}$$