

riziko portfolia: $\sigma^2(x) = \text{var}(q^T x) = x^T \text{var } q \cdot x = x^T V x$

úloha: hledáme vektor x , abychom maximalizovali výnos a minimalizovali riziko \rightarrow úloha vícekritérií optimalizace \rightarrow výsledek bude efektivní řešení

Definice portfolio s vektorem x^* je efektivní vzhledem ke střední hodnotě a rozptylu (mean variance efficient), jestliže nemůžeme najít vektor x : $\sum_i x_i = 1$, pro který platí $r(x) \geq r(x^*)$ a $\sigma^2(x) < \sigma^2(x^*)$ a alespoň jedna z rovností je ostrá.

Možná formulace: $(x = \{x \in \mathbb{R}^J, \mathbb{1}^T x = 1\})$

1, $\max_{x \in X} R^T x - \frac{1}{2} x^T V x$, $t_1, t_2 \geq 0$ = weighted sum approach

normalizace $\rightarrow (1-t)$ pro $1 > t > 0$.

$$R = \frac{R}{1-t}, \quad R \in [0, \infty)$$

2, a, úloha kvadratického programování: = nejlepší možná formulace

$$\min_{x \in X} \frac{1}{2} x^T V x$$

$$\text{s.t. } R^T x \geq \mu$$

μ = minimální očekávaný výnos, jakého chceme dosáhnout a hledáme pak minimální riziko, $\mu \in [\mu_{\min}, \mu_{\max}]$ nějaký reálný interval

b, úloha minimálního programování:

$$\max_{x \in X} R^T x$$

$$\text{s.t. } \frac{1}{2} x^T V x \leq \sigma_a^2$$

3, cílové programování

Jak vypadá portfolio s minimálním rizikem (výpletem): $\min \frac{1}{2} x^T V x$, s.t. $\mathbb{1}^T x = 1$

Lagrangeova funkce: $L(x, \lambda) = \frac{1}{2} x^T V x + \lambda(-\mathbb{1}^T x + 1)$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = Vx - \lambda \mathbb{1} = 0, \quad x = \lambda V^{-1} \mathbb{1}, \quad \mathbb{1}^T x = \lambda \cdot \mathbb{1}^T V^{-1} \mathbb{1} = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\mathbb{1}^T V^{-1} \mathbb{1}}$$

$$x_0 = \frac{V^{-1} \mathbb{1}}{\mathbb{1}^T V^{-1} \mathbb{1}}$$

CHCEME ŘEŠENÍ 2a, \Rightarrow bez vztahového abstrak (j. vztah abstrak jsou vztahová)

úplnos portfolia s minimálním rizikem

Věta: matriční V je regulární, Nechtě vektory $r, \mathbb{1}$ jsou lineárně nezávislé a matriční $\mathbb{1}^T V^{-1} \mathbb{1} \neq 0$.

Pak pro libovolný $\mu \geq r(x_0)$ platí:

a, \exists řady jedinečných vektorů $x(\mu)$, který je řešením a má tvar

$$x(\mu) = \tilde{x}(\mu) = \frac{V^{-1} \mathbb{1}}{\mathbb{1}^T V^{-1} \mathbb{1}} + \frac{V^{-1} r}{\mathbb{1}^T V^{-1} r} \tilde{z}(\mu)$$