

zřejmě platí, že $\delta_1(\mu) + \delta_2(\mu) = 1$ kvůli kombinaci.

b, pro vektor $x(\mu)$ máme: $r^T(x) = \mu$? $r(x(\mu)) = \mu$

c, hodnoty Lagrangeových multiplikátorů lze upočítat ze soustavy $r^T x = \mu$, $\mathbb{1}^T x = 1$

d, existující vektor $x(\mu)$ jsou lineární - $\mu \Rightarrow$ vektorový výnos $x(\mu)$ je lineární funkcí μ a očekávaný výnos $r(x(\mu))$ je lineární funkcí μ .

• Důkaz: b, minimální (pro $r^T x = \mu$ se dojde ke spou)

a, min $\frac{1}{2} x^T V x$

$$\text{s.t. } \mathbb{1}^T x = 1, \quad r^T x = \mu$$

$$L(x, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} x^T V x + \lambda_1 (1 - \mathbb{1}^T x) + \lambda_2 (\mu - r^T x)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = Vx - \lambda_1 \mathbb{1} - \lambda_2 r = 0 \Leftrightarrow x^* = \lambda_1 V^{-1} \mathbb{1} + \lambda_2 V^{-1} r$$

zavedeme pomocí značení: $A = \mathbb{1}^T V^{-1} \mathbb{1} > 0$

$$B = \mathbb{1}^T V^{-1} r$$

$$C = r^T V^{-1} r > 0$$

$$\Delta = AC - B^2 > 0$$

(Δ ... Sylvesterova minoranta; odtud proto, že očekávaný výnos musí mít maximální hodnotu)

$$\left. \begin{aligned} 1 &= \mathbb{1}^T x^* = \lambda_1 A + \lambda_2 B \\ \mu &= r^T x^* = \lambda_1 B + \lambda_2 C \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{\Delta} (C - \mu B) \\ \lambda_2 &= \frac{1}{\Delta} (\mu A - B) \end{aligned} \quad (**)$$

využijeme předpoklad $\mathbb{1}^T V^{-1} r \neq 0$, $B \neq 0$

$$\begin{aligned} x^* &= x(\mu) = \underbrace{\frac{C - \mu B}{\Delta}}_{\lambda_1} V^{-1} \mathbb{1} + \underbrace{\frac{\mu A - B}{\Delta}}_{\lambda_2} V^{-1} r = \underbrace{\frac{C - \mu B}{\Delta} A}_{\lambda_1} \underbrace{V^{-1} \mathbb{1}}_{x_0} + \underbrace{\frac{\mu A - B}{\Delta} B}_{\lambda_2} \underbrace{V^{-1} r}_{\tilde{x}} \\ &= \delta_1(\mu) x_0 + \delta_2(\mu) \tilde{x} \end{aligned}$$

portfolio s minimálním rizikem

! na μ zůstává pouze vektor, ne portfolio

$$\delta_1(\mu) + \delta_2(\mu) = \frac{CA - \mu B^2}{\Delta} + \frac{\mu AB - B^2}{\Delta} = \frac{AC - B^2}{\Delta} = \frac{\Delta}{\Delta} = 1$$

c \Rightarrow ze soustavy rovnice (**)

$$d, r(x(\mu)) = r^T x(\mu) = \delta_1(\mu) r^T x_0 + \delta_2(\mu) r^T \frac{V^{-1} r}{\mathbb{1}^T V^{-1} r} = \mu$$

$$\text{var}(x(\mu)) = \text{var}(r^T(x(\mu))) = x(\mu)^T V x(\mu).$$

□

Diskuze předpokladů:

1, V je pozitivně definitní; kdyby nebyla, tak to znamená, že je přímou bezriziková obnova

2, $r, \mathbb{1}$ jsou lineárně nezávislé vektory; kdyby to neplatilo, tak musí platit $r = k\mathbb{1}$, tj.

všechny akcie mají stejný výnos $\Rightarrow x^* = x_0$

3, $\mathbb{1}^T V^{-1} r \neq 0$; kdyby to neplatilo $\mathbb{1}^T V^{-1} r = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{\mathbb{1}^T V^{-1} \mathbb{1}}; \lambda_2 = \frac{\mu}{\mathbb{1}^T V^{-1} r}$

$$\Rightarrow x^* = x_0 + \mu \frac{V^{-1} r}{\mathbb{1}^T V^{-1} r}$$

! + $\frac{V^{-1} r}{\mathbb{1}^T V^{-1} r}$ jako u zrušení rizika