

Sobolevovy prostory

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$... oblast

Definice Necht' $p \in [1, +\infty)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Sobolevův prostor $W^{k,p}(\Omega)$ je množina

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq k\}.$$

Lemma Bud' $p \in [1, +\infty)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Pak $W^{k,p}(\Omega)$ je Banachův prostor vzhledem k normě

$$\|u\|_{k,p,\Omega} = \left[\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} = \left[\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Navíc je $W^{k,p}(\Omega)$ separabilní a pro $p \in (1, +\infty)$ též reflexivní.

Pro $p=2$ je Sobolevův prostor $W^{k,2}(\Omega)$ Hilbertův prostor se skalárním součinem

$$(u, v)_{k,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v dx.$$

Pozn. Symbolem $|\cdot|_{k,p,\Omega}$ značíme seminormu na $W^{k,p}(\Omega)$ definovanou vztahem

$$|u|_{k,p,\Omega} = \left[\sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} = \left[\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Definice $W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{k,p,\Omega}}$

Označení Pro $p=2$ zavedeme označení $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$, $H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$,
 $\|\cdot\|_{k,\Omega} = \|\cdot\|_{k,2,\Omega}$, $|\cdot|_{k,\Omega} = |\cdot|_{k,2,\Omega}$.

Lemma (Friedrichsova nerovnost) Je-li Ω omezená oblast, pak pro

$u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ platí

$$\int_{\Omega} |D^\beta u|^p dx \leq C \sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \quad \forall |\beta| \leq k,$$

kte C závisí pouze na Ω, β, p a k .

Důsledek Necht' Ω je omezená oblast. Pak $|\cdot|_{k,p,\Omega}$ je norma na $W_0^{k,p}(\Omega)$.

Pro $p=2$ je

$$(u, v)_{H_0^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v dx$$

skalární součin na $H_0^k(\Omega)$.

Definice Omezená oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je třídy $C^{k,1}$ (kde $k \in \mathbb{N}_0$), jestliže existuje konečně mnoho lokálních souřadných systémů $S_1, \dots, S_M$ a funkcí $h_1, \dots, h_M$ a jestliže existují čísla $a, b > 0$ tak, že platí:

a) Funkce h_i , $i=1, \dots, M$, jsou na reálné množině

$$Q_{n-1} = \{ y = (y_1, \dots, y_{n-1}); |y_j| \leq a, j=1, \dots, n-1 \} \text{ (n-1-rozměrná krychle)}$$

k -krát spojitě diferencovatelné a mají lipschitzovsky spojitě derivace k -tého řádu.

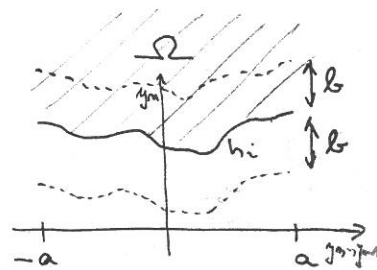
b) $\forall x \in \partial\Omega \exists i \in \{1, \dots, M\}, y \in Q_{n-1} : x = (y, h_i(y))$.

(tj. pro každý bod hranice existuje souřadný systém S_i tak, že x leží na grafu funkce h_i)

c) V lokálním souřadném systému S_i , $i=1, \dots, M$, platí

$$(y, y_n) \in \Omega \text{ pro } y \in \overline{Q_{n-1}}, h_i(y) < y_n < h_i(y) + b,$$

$$(y, y_n) \notin \Omega \text{ pro } y \in \overline{Q_{n-1}}, h_i(y) - b < y_n < h_i(y).$$



Pozn. Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ omezená oblast třídy $C^{0,1}$, říkáme, že Ω má lipschitzovsky spojitou hranici.

Pozn. Omezené konvexní oblasti v $\mathbb{R}^n$ mají lipschitzovsky spojitou hranici.

Plošná míra

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast s lipschitzovsky spoj. hranicí.

Pro každý bod $x_0 \in \partial\Omega$ existuje okolí $U(x_0)$ tak, že plocha $U(x_0) \cap \partial\Omega$ je

obrazena v grafu funkce h_i v nějakém souřadném systému S_i . Můžeme tedy definovat (n-1)-rozměrnou Lebesgueovu plošnou míru kř. plochy vztahem

$$\sigma_{n-1}(U(x_0) \cap \partial\Omega) = \int_{G_0} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h_i}{\partial y_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial h_i}{\partial y_{n-1}}\right)^2} dy_1 \dots dy_{n-1},$$

kde $G_0 \subset Q_{n-1}$ je průmět plochy do roviny $y_1, \dots, y_{n-1}$, tj. $U(x_0) \cap \partial\Omega = \{(y, h_i(y)), y \in G_0\}$. (Jeliž h_i je lipschitzovsky spojitá, má skoro všude v Q_{n-1} první derivace.)

Tímto způsobem lze definovat měřitelné podmnožiny hranice $\partial\Omega$ a měřitelné a integrovatelné funkce na $\partial\Omega$. Lze ukázat, že uvedená plošná míra nezávisí na volbě lokálních souřadných systémů $S_1, \dots, S_M$.

Pozn. Oblast s lipschitzovskou hranicí má ve skoro všech bodech hranice jednoznačně určený vektor vnější normály, který značíme $\underline{n}$.

Gaussova věta o integraci Necht' Ω je omezená oblast s lipschitzovými hranicemi a $u \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Pak

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} u \cdot n_i d\sigma, \quad i=1, \dots, n.$$

L^p prostory na $\partial\Omega$

- definujeme analogicky jako na Ω , tj. pro $p \in [1, \infty)$ definujeme

$$L^p(\partial\Omega) = \{ u \text{ měřitelná na } \partial\Omega; \int_{\partial\Omega} |u|^p d\sigma < \infty \}.$$

Množina $L^p(\partial\Omega)$ je Banachův prostor vzhledem k normě

$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} = \left[\int_{\partial\Omega} |u|^p d\sigma \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Sobolevova věta o vnoření Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast s lipschitzovými spojitými hranicemi. Bnd' $p \in [1, +\infty)$. Pak

$$W^{k,p}(\Omega) \subset W^{j,r}(\Omega)$$

pro $0 \leq j < k$ a libovolné r splňující $\frac{1}{p} - \frac{k-j}{n} \leq \frac{1}{r} < 1$; navíc platí

$$\|u\|_{j,r,\Omega} \leq C \|u\|_{k,p,\Omega}, \quad \forall u \in W^{k,p}(\Omega),$$

kde C závisí pouze na Ω, j, k, p a r . Jestliže $\frac{1}{p} - \frac{k-j}{n} < 0$, pak

$$W^{k,p}(\Omega) \subset C^j(\bar{\Omega}), \quad \|u\|_{C^j(\bar{\Omega})} \leq C \|u\|_{k,p,\Omega} \quad \forall u \in W^{k,p}(\Omega).$$

Rellichova věta Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je mez. oblast s lipch. spj. hranicemi a $p \in [1, \infty)$, $k \geq 1$. Pak je soule

$$\{u \in W^{k,p}(\Omega); \|u\|_{k,p,\Omega} \leq 1\}$$

kompaktní ve $W^{k-1,p}(\Omega)$.

Pozn. Porovnáním $W^{k,p}(\Omega)$, $W^{k-1,p}(\Omega)$ můžeme $W^{k,p}(\Omega)$, $W^{k-1,p}(\Omega)$ vnést do Rellichovy věty vynechat předpoklad o lipschitzovské spojitosti hranice.

Věta o stopách Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je mez. oblast s lipch. spj. hranicemi. Necht' $p \geq 1$, $k_p < n$ a $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k_p-1}{p(n-1)}$. Pak existuje právě jedno spojitě lineární zobrazení $\gamma: W^{k_p,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\partial\Omega)$ takové, že $\gamma u = u|_{\partial\Omega} \quad \forall u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Je-li $k_p = n$, pak $\gamma \in \mathcal{L}(W^{k_p,p}(\Omega), L^q(\partial\Omega)) \quad \forall q \geq 1$.

Pozn. Místo γu budeme psát $u|_{\partial\Omega}$.

• že spojitě plyne, že $\|u\|_{q,\partial\Omega} \leq C \|u\|_{k_p,p,\Omega} \quad \forall u \in W^{k_p,p}(\Omega).$

Lemma Necht Ω je omezená oblast s lipsh. spoj. hranicí, $\mu \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Pak
 $\mu \in W_0^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow \mu|_{\partial\Omega} = 0$.

Věta (o hustotě) Necht Ω je omezená oblast s lipsh. spoj. hranicí. Necht
 $R(\Omega) = \{u|_{\Omega}; u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\}$.

Pak je $R(\Omega)$ hustá ve $W^{k,p}(\Omega)$ pro $k \geq 0$ a $p \in [1; +\infty)$.

Lemma Necht Ω je omezená oblast s lipsh. spoj. hranicí, $G \subset \Omega$ podmnožina hladké úmry, $P \subset \partial\Omega$ podmnožina hranice hladké plošné úmry. Pak existují konstanty $C_1 = C_1(n, p, G, \Omega)$ a $C_2 = C_2(n, p, P, \Omega)$ takové, že pro libovolné $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ($p \geq 1$) platí

$$\|u\|_{0,p,\Omega} \leq C_1 \left(\|u\|_{1,p,\Omega} + \left| \int_G u \, dx \right| \right), \quad (p=2, G=\Omega \Rightarrow \text{Poincarého nerovnost})$$

$$\|u\|_{0,p,\Omega} \leq C_2 \left(\|u\|_{1,p,\Omega} + \left| \int_P u \, d\sigma \right| \right), \quad (\text{Friedrichsova nerovnost})$$

Definice Pro $k \geq 0$, $p \in (1; +\infty)$ značíme symbolem $W^{-k,q}(\Omega)$ duálním prostor Sobolevova prostoru $W_0^{k,p}(\Omega)$; $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Pro $p=q=2$ zavedeme označení

$$H^{-k}(\Omega) = (H_0^k(\Omega))'.$$

Prostory $W^{-k,q}(\Omega)$ lze chápat jako prostory speciálních distribucí:

Lemma Necht $p \in (1; +\infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Prostor $W^{-k,q}(\Omega)$ lze ztotožnit s množinou

$$\left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega); \sup_{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)} \frac{u(\varphi)}{\|\varphi\|_{k,p,\Omega}} < \infty \right\}.$$

Norma ve $W^{-k,q}(\Omega)$ je přitom dána vztahem

$$\|u\|_{-k,q,\Omega} = \sup_{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)} \frac{u(\varphi)}{\|\varphi\|_{k,p,\Omega}}.$$