Čtrnácté cvičení

11. ledna 2013

Grupa G je cyklická, pokud v ní existuje prvek g, že $G = \langle g \rangle$. Příklady cyklických grup jsou $(\mathbb{Z}_n, +)$ nebo nekonečná $(\mathbb{Z}, +)$.

Grupa $\mathbb{Z}_n^\star$ sestává ze všech celých čísel mezi 1 a n nesoudělných s n, grupová operace je násobení modulo n. Tyto grupy jsou velmi užitečné v teorii čísel.

Příklad 1. Rozhodněte, zda následující grupy jsou cyklické:

a) S_4,

b) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (operace je sčítání po složkách),

c) $\mathbb{Z}_{13}^\star$,

d) $\mathbb{Z}_{14}^\star$,

e) $\mathbb{Z}_{24}^\star$,

f) $\langle 2/3, 4/5 \rangle_{\mathbb{Q}}$

g) Grupa kvaternionů **Q**: Prvky jsou $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, násobení splňuje $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ a $ijk = -1$.

Příklad 2. Pro danou grupu G najděte všechny prvky $g \in G$, že $\langle g \rangle = G$:

a) $G = \mathbb{Z}$,

b) $G = \mathbb{Z}_{10}$,

c) $G = \mathbb{Z}_{13}^\star$

d) $G = \mathbb{Z}_n$ pro obecné $n \in \mathbb{N}$.

Příklad 3. Určete, kolik prvků kterého řádu obsahuje grupa:

a) $\mathbb{Z}_{10}$,

b) $\mathbb{Z}_{11}^\star$,

c) **Q** (kvaterniony).