Skript k přednášce Úvod od parciálních diferenciálních rovnic — nmma339

Petr Kaplický

Obsah

Úvod do parciálních diferenciálních rovnic – typický sylabus

1. Základní informace o PDR (2 přednášky)
Notace. Různé typy PDR. Klasifikace PDR 2. řádu ve 2D a v Rn. Rovnice matematické fyziky. Počáteční a okrajové podmínky. Cauchyova úloha. Klasické řešení. Korektnost úlohy.

2. Cauchyova úloha pro kvazilineární PDR 1. řádu (1 přednáška)
Charakteristiky. Konstrukce a vlastnosti řešení ve speciálních případech.

3. Vlnová rovnice (4 přednášky)
Řešení Cauchyovy úlohy a smíšené úlohy pro rovnici struny metodou charakteristik. Fourierova metoda pro rovnici struny. Integrál energie. Metoda sférických průměrů a metoda sestupu pro vlnovou rovnici v Rn.

4. Parabolické rovnice (2 přednášky)
Princip maxima pro parabolické rovnice na omezené prostorové oblasti, apriorní odhad. Řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici vedení tepla pomocí škálování, princip maxima. Řešení smíšené úlohy pro rovnici vedení tepla Fourierovou metodou.

5. Eliptické rovnice (4 přednášek)
Princip maxima pro eliptické úlohy. Okrajové úlohy pro Laplaceovu a Poissonovu rovnici. Věta o třech poteciálech. Greenova funkce. Poissonův vzorec pro řešení Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnici na kouli. Harmonické funkce. Existence řešení Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnici.

6. Pokud zbyde čas:
Řešení rovnic pomocí Fourierovy transformace v L^1.

Anotace:

Základní informace o PDR - motivace, typy PDR, typy úloh a jejich klasická řešení (2)
Cauchyova úloha pro kvazilineární PDR 1. řádu - existence a vlastnosti řešení(1)
Vlnová rovnice - klasické řešení, jeho vlastnosti (4)
Parabolické rovnice - klasické řešení a jeho vlastnosti, princip maxima (2)
Eliptické rovnice - klasické řešení a jeho vlastnosti, princip maxima (4)

Literatura:

L. C. Evans: Partial Differential Equations, AMS 1999
M. Renardy, R. C. Rogers: An introduction to partial differential equations, Springer 1993

2 Přednáška

Poslední změna: 09.01.2022 11:17:23

Přednáška a skript vznikají hlavně s využitím skriptu M. Rokyty z roku 2011. Velké části jsou doslovně přejaty.

Některé části jsem nestihl zcela odpřednést, ale je dobré je v celém textu pro úplnost mít. Jsou uvedeny šedě jako tento odstavec.

1 Základní informace o PDR (2 přednášky)

1.1 Notace. Rovnice matematické fyziky. Počáteční a okrajové podmínky. Cauchyova úloha. Klasické řešení. Korektnost úlohy.

Parciální diferenciální rovnice, notace Nejprve se seznámíme se základním značením, které budeme používat v celém učebním textu. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, otevřená množina, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ reálná funkce. V bodech $x \in \Omega$, ve kterých existují příslušné derivace vlastní, označíme:[1]

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} \equiv u_{x_j} \equiv \partial_{x_j} u \equiv \partial_j u\,, \qquad \text{parciální derivace funkce } u \text{ podle proměnné } x_j\,,$$

$$\nabla u \equiv Du := \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d}\Big)\,, \qquad \text{gradient } u\,.$$

Formálně lze psát

$$\nabla := \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d}\Big)\,, \qquad \text{operátor „nabla“},$$

symbol „∇“ je tedy možné chápat jako zobrazení, které diferencovatelné funkci u přiřadí vektorovou funkci ∇u.

Pro vektorovou[2] funkci $\mathbf{f} : G \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$, G otevřená množina, $\mathbf{f} := \big(f_1, \dots, f_s\big)^T$, $f_j : G \to \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, d$, značíme (opět - a takto tomu bude i ve zbytku tohoto paragrafu – v bodech $x \in G$, ve kterých existují příslušné derivace vlastní):

$$\nabla \mathbf{f} := \big(\nabla f_1, \dots, \nabla f_s\big)^T\,,$$

tedy „gradient vektorové funkce uvažujeme po složkách“.

Pro $\mathbf{f} : G \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, G otevřená množina (ano, dimenze prostorů, ze kterého a do kterého $\mathbf{f}$ zobrazuje, je tatáž), značíme dále:

$$\operatorname{div} \mathbf{f} := \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \equiv \nabla \cdot \mathbf{f}\,, \qquad \text{operátor „divergence“}.$$

Poznámka. Pro $\mathbf{f} : G \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ je tedy potřeba rozlišovat mezi $\nabla \mathbf{f}$ (vektorový gradient) a $\nabla \cdot \mathbf{f}$ (divergence $\mathbf{f}$ chápaná jako formální skalární součin operátoru nabla a vektoru $\mathbf{f}$).[3] Zatímco $\nabla \mathbf{f}$ je (Jacobiho) matice prvních derivací $\mathbf{f}$, rozměru $m \times m$, je $\operatorname{div} \mathbf{f} \equiv \nabla \cdot \mathbf{f}$ její stopa, tedy, v právě zavedeném značení,

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \operatorname{Tr}(\nabla \mathbf{f})\,.$$

[1] Zápisem $A := B$, případně $B =: A$, budeme rozumět, že A je definováno pomocí B. Naproti tomu symbol „$\equiv$“ bude mít význam ztotožnění nebo ekvivalence, případně identické rovnosti, nikoli definice.

[2] Vektorovou funkci budeme někdy též značit polotučně, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_s)^T$, nebo pomocí symbolu vektoru, $\vec{f} = (f_1, \dots, f_s)^T$, často však budeme symbol vektoru vynechávat, bude-li situace jasná z kontextu. Symbolem $(\dots)^T$ zde jako obvykle označujeme transponovaný (tj. „sloupečkový“) vektor.

[3] Značení „$\nabla \cdot \mathbf{f}$“ nepatří k nejšťastnějším právě pro jeho snadnou zaměnitelnost s „$\nabla \mathbf{f}$“, skutečností však zůstává, že je, zejména v aplikacích, často používané.

Pro $u : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, resp. $\mathbf{f} : G \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$ definujeme (se stejnými konvencemi jako výše)

$$\Delta u := \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\,, \qquad \Delta \mathbf{f} := \big(\Delta f_1, \dots, \Delta f_s\big)^T\,,$$

tzv. Laplaceův operátor. Symboly „∇“ a „Δ“ tedy používáme v nezměněné podobě jak pro skalární, tak pro vektorové funkce.

Vektor tvaru $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, kde $\alpha_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $j = 1, \dots, m$, nazvu m-dimenzionálním multiindexem *výšky* (někdy též *řádu*) $|\alpha|$, kde

$$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_m\,.$$

Pro multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ a funkci $u \in \mathcal{C}^{|\alpha|}(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je neprázdná otevřená množina, definujeme *derivaci u dle multiindexu α*, v bodě $x \in \Omega$,

$$\mathrm{D}^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}\,, \qquad x = (x_1, \dots, x_d) \in \Omega\,. \tag{2.1}$$

Pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zavádíme množinu (často se říká „formální vektor“) všech parciálních derivací řádu k funkce $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, v bodě $x \in \Omega$,

$$\mathrm{D}^{(k)} u(x) := \{\mathrm{D}^\alpha u(x);\, |\alpha| = k\}\,,$$

pro $\mathbf{f} : G \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$ píšeme podobně jako výše

$$\mathrm{D}^\alpha \mathbf{f}(x) := \big(\mathrm{D}^\alpha f_1(x), \dots, \mathrm{D}^\alpha f_s(x)\big)^T\,, \qquad \mathrm{D}^{(k)} \mathbf{f}(x) := \{\mathrm{D}^\alpha \mathbf{f}(x);\, |\alpha| = k\}\,.$$

Cvičení. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je neprázdná oblast, $x \in \Omega$. Rozmyslete si, že platí:

- Pro funkci $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ je počet prvků $\mathrm{D}^{(k)} u(x)$ roven d^k.
- Pro funkci $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ je $\mathrm{D}^{(0)} u(x) = u(x)$.
- Pro funkci $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ jsou prvky množiny $\mathrm{D}^{(1)} u(x)$ tytéž jako prvky vektoru $\nabla u(x) \equiv Du(x)$.
- Pro funkci $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ jsou prvky množiny $\mathrm{D}^{(2)} u(x)$ tytéž jako prvky matice $H(u(x)) := \left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^{d}$. Matice $H(u(x))$ je tzv. *Hessova matice* druhých derivací funkce u v bodě x. Přesvědčte se dále, že v tomto značení je $\Delta u = \mathrm{Tr}\,(H(u))$.

Na otázku „co vlastně je parciální diferenciální rovnice“ lze (poněkud nepřesně, ale názorně) odpovědět tak, že je to rovnice pro neznámou funkci u více než jedné proměnné, která obsahuje alespoň jednu její parciální derivaci. Matematická definice může vypadat například takto.

Definice 1. *Buďte $d, n \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$. Buď dále $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ neprázdná otevřená množina.* Parciální diferenciální rovnicí *(dále PDR) pro neznámou funkci $u : \Omega \to \mathbb{R}$ nazvu výraz tvaru*

$$F\big(x, u(x), Du(x), \cdots, D^{(n-1)} u(x), D^{(n)} u(x)\big) = 0\,, \tag{2.2}$$

kde

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \cdots \times \mathbb{R}^{d^{n-1}} \times \mathbb{R}^{d^n} \to \mathbb{R} \tag{2.3}$$

je daná funkce.

Poznámka. *Řádem* rovnice (2.2) rozumíme řád nejvyšší derivace u, která „se vyskytuje“ v (2.2). Bez újmy na obecnosti lze učinit úmluvu, že zápisem (2.2) budeme vyjadřovat skutečnost, že řád rovnice (2.2) je právě n, tedy že funkce F je nekonstantní v alespoň jedné z posledních d^n proměnných.

Více než jednu rovnici pro více než jednu neznámou funkci nazýváme systémem PDR. Onu „více než jednu neznámou funkci“ lze také chápat jako jednu vektorovou funkci a podobně pro „více než jednu rovnici“. Definice systému PDR pak vypadá takto.

Definice 2. *Buďte $s, d, n \in \mathbb{N}$, $s, d \geq 2$. Buď dále $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ neprázdná otevřená množina.* Systémem s parciálních diferenciálních rovnic *pro neznámou vektorovou funkci $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^s$ nazvu výraz tvaru*

$$\mathbf{F}\big(x, \mathbf{u}(x), D\mathbf{u}(x), \cdots, D^{(n-1)}\mathbf{u}(x), D^{(n)}\mathbf{u}(x)\big) = 0\,, \tag{2.4}$$

kde

$$\mathbf{F} : \Omega \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{sd} \times \cdots \times \mathbb{R}^{sd^{n-1}} \times \mathbb{R}^{sd^n} \to \mathbb{R}^s \tag{2.5}$$

je daná funkce.

Úmluvu z poznámky 1.1 budeme v dalším vztahovat i na systém PDR, budeme tedy pod *řádem* systému (2.4) rozumět řád nejvyšší derivace $\mathbf{u}$, která se vyskytuje v rovnicích (2.4) a současně předpokládat, že zápisem (2.4) vyjadřujeme skutečnost, že řád tohoto systému právě n.

Nejčastěji se v teorii PDR vyskytují systémy, pro které $m = s$, tedy systémy, u kterých je počet rovnic roven počtu neznámých funkcí. Lze se však setkat i se systémy *přeurčenými* ($m > s$), případně *podurčenými* ($m < s$).

Definice pojmu *řešení* (2.2) resp. (2.4) obecně závisí na tom, v jakém smyslu se chápou derivace a rovnosti, které se v (2.2) resp. (2.4) vyskytují. Z klasického pojetí vlastní derivace a rovnosti ve všech bodech $x \in \Omega$ vychází pojem tzv. *klasického řešení* (2.2) resp. (2.4).

Definice 3. Klasickým řešením (2.2) *resp.* (2.4) *v neprázdné otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ nazveme funkci $u : \Omega \to \mathbb{R}$ resp. $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^s$, mající ve všech bodech $x \in \Omega$ vlastní všechny derivace, vyskytující se v* (2.2) *resp.* (2.4)*, a splňující* (2.2) *resp.* (2.4) *identicky v Ω.*

Poznámka.

1. Místo podmínky „mající ve všech bodech $x \in \Omega$ vlastní všechny derivace, vyskytující se v (2.2) resp. (2.4)“ se často používá jednodušší podmínka, požadující však od u více: v této „klasičtější definici“ klasického řešení, se požaduje, aby $u \in \mathcal{C}^n(\Omega)$, kde n je řád (2.2) resp. (2.4). I zde je však podstatné to, že se vyžaduje splnění (2.2) resp. (2.4) identicky v Ω.

2. Existují i jiná, obecnější pojetí pojmu řešení PDR, při kterých se například některé derivace uvažují pouze ve skoro všech bodech, případně se uvažují takzvané slabé derivace, derivace ve smyslu distribucí, atd. Tento učební text se však bude zabývat pouze klasickou teorií, vycházející z definice 3 resp. její modifikace z předchozího bodu, což vždy v textu přesně specifikujeme.

Poznámka. Často hraje ve vztahu (2.2), resp. vztazích (2.4) jedna z proměnných x_j význačnou roli. Tato význačnost může spočívat například v tom, že nejvyšší parciální derivace u podle této proměnné jsou nižšího řádu než je řád rovnice, nebo v tom se v rovnici vyskytují „s jiným znaménkem“ než derivace podle zbylých proměnných. Většinou je v těchto případech důležitá fyzikální interpretace rovnic (2.2), resp. (2.4), podle které taková významná proměnná často hraje roli „času“. V tomto případě je zvykem buď tuto proměnnou přeznačit symbolem t („čas“), tedy uvažovat buď například $x_1 \equiv t$, tedy

$$u = u(x)\,, \quad \text{kde} \;\; x = (t, x_2, \ldots, x_d)\,, \; x \in \Omega\,,$$

v tomto případě pak Ω chápeme jako „časoprostorovou oblast“. Druhou možností je rozšířit počet stávajících proměnných funkce u o jednu, tzv. „časovou proměnnou“ t, a psát

$$u = u(t, x)\,, \quad \text{kde} \;\; (t, x) \in (0, T) \times \Omega\,, \quad T > 0\,.$$

Druhý z právě zmíněných případu je obvyklejší a budeme jej v tomto učebním textu používat. I v tomto případě však někdy (zejména pro jednoduchost zápisu) ztotožníme $t \equiv x_0$ a budeme psát

$$u = u(x)\,, \quad \text{kde} \;\; x = (x_0, x_1, \ldots, x_d)\,, \; x \in (0, T) \times \Omega\,, \; T > 0\,.$$

Tuto konvenci ve značení použijeme například v teoretické části paragrafu 2.

Poznámka. Rovnicím, které neobsahují časovou proměnnou, říkáme *stacionární*, rovnicím „s časem“ říkáme *nestacionární* nebo *evoluční*. Poznámka 1.1 ukazuje, proč se tyto termíny nesnažíme definovat „matematicky přesně“: sama přítomnost „času“ v rovnici je totiž závislá na interpretaci role některých proměnných.

Poznámka (Odvození základních rovnic matematické fyziky)**.**

. . . . konec přednášky 1, 1.10.2021

Někdy požadujeme, aby řešení u splňovalo kromě parciální diferenciální rovnice ještě takzvané *okrajové podmínky*. Jednou z takovýchto okrajových podmínek může být požadavek, aby se u rovnalo předem dané funkci například na neprázdné části hranice $\Gamma \subset \partial\Omega$. Okrajové podmínky mohou mít velké množství různých forem, od právě zmíněné, až po velmi komplikované vztahy, zahrnující nejen hodnoty u, ale i hodnoty derivací u, případně jejich kombinací. Vždy však v principu jde o dodatečné požadavky, které na u klademe na jistých částech (obecně nikoli nutně na částech hranice) množiny Ω. V případě evoluční rovnice, kdy $u = u(t, x)$, a pokud

$$\Gamma \subset \{0\} \times \Omega\,,$$

tedy když „podmínka je zadána pro čas $t = 0$“, hovoříme o tzv. *počáteční podmínce* či *počátečních podmínkách*, je-li jich víc.

Jednomu řešení je možno předepsat více než jednu okrajovou resp. počáteční podmínku. Vzniká tedy přirozená otázka, jestli řešení PDR, splňující navíc všechny předepsané podmínky, vůbec existuje, kolik takových řešení je, případně jaké mají vlastnosti. S tím souvisí pojem tzv. *úlohy* (v kontextu PDR) a jejího *korektního zadání*.

Poznámka. V kontextu PDR rozumíme *úlohou* následující trojici:

1. Rovnici tvaru (2.2) resp. systém tvaru (2.4) pro neznámou funkci u resp. $\mathbf{u}$.
2. Množinu, na které (uvnitř které) má být splněna rovnice (2.2) resp. splněny rovnice (2.4). Typicky půjde o neprázdnou oblast, tj. neprázdnou otevřenou souvislou množinu v $\mathbb{R}^m$.
3. Pojem řešení, tj. v jakém smyslu má být rovnice splněna. Nařiklad je potřeba určit, do kterého prostoru funkcí X má řešení patřit.
4. Sadu okrajových a/nebo počátečních podmínek.

Pokud je množina $\Omega = \mathbb{R}^n$, zadáváme pouze počáteční podmínku a hovoříme o Cauchyově úloze. V opačném případě je potřeba navíc na hranici Ω zadat okrajovou podmínku. Pak hovoříme o počátečně-okrajové úloze.

Poznámka. S pojmem úlohy také úzce souvisí termín *data úlohy* a pojem *korektně zadaná úloha*.

Data úlohy jsou všechny předem zadaná data, která se v úloze objevují. Tedy například hodnoty, které má hledaná funkce nabývat na hranici oblasti Ω a v počátečním čase. Data úlohy jsou ale také funkce, které se objevují ve formulaci diferenciální rovnice (2.2), tj. funkce F resp. $\mathbf{F}$.

Řekneme, že úloha v kontextu PDR je *korektně zadaná* (přesněji je *korektně zadaná v prostoru funkcí X na množině Ω*) pokud:

1. *existuje* řešení $u \in X$ dané úlohy;
2. toto řešení je v prostoru funkcí X *jediné*;
3. toto řešení tzv. *spojitě závisí na datech úlohy*.

„Spojitou závislost na datech úlohy“ nebudeme v tomto okamžiku přesně specifikovat (příslušné výroky vždy součástí pozdějších vět, týkajících se dané konkrétní úlohy), v podstatě se tím však myslí výrok typu „malá změna dat má za následek jen malou změnu v řešení“. Uvedený výrok se často realizuje důkazem nerovnosti typu

$$\|u_1 - u_2\| \le c \sum_{j=1}^{k} \|\varphi_1^j - \varphi_2^j\| \tag{2.6}$$

s vhodně zvolenými normami na obou stranách této nerovnosti. Zde φ_1^j, φ_2^j, $j = 1, \dots, k$ jsou dvě k-tice dat, s nimiž má daná úloha na dané oblasti řešení po řadě u_1, u_2.

Příklad. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ neprázdná otevřená množina, $T > 0$. Hledejme funkci $u = u(t, x, y) : (0, T) \times \Omega \to \mathbb{R}$, splňující

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y) - \Delta u(t, x, y) = \sin(xyt)\,, \qquad \text{pro } (t, x, y) \in (0, T) \times \Omega\,, \tag{2.7}$$

$$u(0, x, y) = 1\,, \qquad \text{pro } (x, y) \in \Omega\,, \tag{2.8}$$

$$u(t, x, y) = t + 1\,, \qquad \text{pro } (t, x, y) \in (0, T) \times \partial\Omega\,. \tag{2.9}$$

Jde o evoluční parciální diferenciální rovnici druhého řádu. Výjimečnost proměnné t spočívá jak v tom, že derivace u podle t je pouze prvního řádu, tak v tom, že prostorové derivace x_j, obsažené v Laplaceově operátoru, mají opačné znaménko než $\frac{\partial u}{\partial t}$.

Pracujeme v tzv. časoprostorovém válci $(0,T)\times\Omega$ s podstavou Ω. Rovnici (2.7) řešíme uvnitř tohoto válce, podmínka (2.8) je počáteční podmínka, zadaná na jeho podstavě, podmínka (2.9) je podmínka okrajová, zadaná na „boční“ části pláště časoprostorového válce.

Tato úloha se nazývá počátečně-okrajová úloha pro rovnici vedení tepla.

Intuitivně je jasné, že při definici řešení u celé tzv. *úlohy* (2.7)–(2.9) je potřeba říci nejen jaké geometrické vlastnosti očekáváme od hranice $\partial((0, T) \times \Omega)$, ale především v jakém smyslu budou splněny podmínky (2.8), (2.9) – funkce u je totiž pro potřeby rovnice (2.7) definována pouze na $(0, T) \times \Omega$, tj. *uvnitř* časoprostorového válce. Přesněji se těmto úvahám budeme věnovat při studiu konkrétních úloh, již teď však můžeme stručně říci, že pro klasické řešení většinou požadujeme, aby příslušné okrajové a počáteční podmínky byly splněny ve smyslu limity, tedy aby (v tomto případě) funkci u bylo možno spojitě rozšířit až na ty části hranice, na kterých jsou předepsány dodatečné podmínky.

Poznámka. Úloha (2.7)–(2.9) má následující fyzikální interpretaci: Pokud pod $u(t, x)$ rozumíme teplotu v bodě $x \in \Omega$ v čase $t \in (0, T)$, představuje (2.7) tzv. *rovnici vedení tepla*, se *zdroji tepla* $\sin(xyt)$. Podmínka (2.8) pak reprezentuje předepsané rozložení teploty v čase $t = 0$, podmínka (2.9) předepsané rozložení teploty „na stěnách místnosti“ Ω v čase $t \in (0, T)$. Při přemýšlení o významu této interpretace můžeme dojít k podezření, že by úloha (2.7)–(2.9) mohla být korektně zadaná. Toto podezření samozřejmě musí potvrdit či vyvrátit důkaz příslušné matematické věty, kterou zformulujeme později.

V paragrafu 2 ukážeme, jak lze rovnici vedení tepla na základě jistých fyzikálních úvah odvodit.

Definice 4. *Okrajová podmínka* (2.9) *se nazývá Dirichletova okrajová podmínka. Pokud bychom předepisovali nulové rozložení teploty nazývali bychom ji homogenní Dirichletova okrajová podmínka. Uvažují se také další typy okrajových podmínek.*

Neumannova okrajová podmínka předepisuje tok energie hranicí. Má tvar

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g, \quad \text{na } (0, T) \times \partial\Omega.$$

Vektor ν označuje jednotkovou vnější normálu k Ω a g je zadaná funkce. Zobecnění Neumannovy okrajové podmínky je Robinova akrajová podmínka

$$\alpha\frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u = g, \quad \text{na } (0, T) \times \partial\Omega.$$

pro zadané konstanty $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a zadanou funkci g. Pokud je g nulové nazýváme okrajovou podmínku homogenní. Je také možné na různých částech hranice předepsat jiný typ okrajové podmínky.

Následující definice je spíše terminologická. Protože se v tomto učebním textu nebudeme zabývat systémy PDR, budeme násedujíci pojmy definovat pouze pro jednu parciální diferenciální rovnici.

Definice 5.

- *Parciální diferenciální rovnici (dále jen „rovnici“)* (2.2) *nazveme* lineární*, lze-li ji psát ve tvaru*

$$\sum_{|\alpha| \le n} a_\alpha(x) \mathrm{D}^\alpha u(x) = f(x) \,, \qquad x \in \Omega \,, \tag{2.10}$$

  pro dané funkce a_α, f. Rovnici (2.10) *nazveme* homogenní*, pokud $f \equiv 0$. V opačném případě jí říkáme* nehomogenní*, případně (nepřesně, ale o to s větší chutí) „s pravou stranou“. Jsou-li všechny funkce a_α konstantní, nazýváme rovnici* (2.10) lineární rovnicí s konstantními koeficienty.

- *Rovnici* (2.2) *nazveme* semilineární*, lze-li ji psát ve tvaru*

$$\sum_{|\alpha| = n} a_\alpha(x) \mathrm{D}^\alpha u = f(x, u, \mathrm{D}u, \dots, \mathrm{D}^{(n-1)}u) \,, \qquad x \in \Omega \,, \tag{2.11}$$

  pro dané funkce a_α, f.

- *Rovnici* (2.2) *nazveme* kvazilineární*, lze-li ji psát ve tvaru*

$$\sum_{|\alpha| = n} a_\alpha(x, u, \mathrm{D}u, \dots, \mathrm{D}^{(n-1)}u) \mathrm{D}^\alpha u(x) = f(x, u, \mathrm{D}u, \dots, \mathrm{D}^{(n-1)}u) \,, \qquad x \in \Omega \,, \tag{2.12}$$

  pro dané funkce a_α, f.

- *Rovnici* (2.2) *nazveme* nelineární*, pokud není lineární ve výše uvedeném slova smyslu. Rovnici* (2.2) *nazveme* ryze nelineární*, je-li funkce F v* (2.2) *nelineární funkcí (alespoň) v některé z proměnných, do kterých dosazujeme některou derivací u nejvyššího řádu.*

Příklad. Jak semilineární, tak kvazilineární rovnice jsou nelineární (ale nikoli ryze nelineární) rovnice, které jsou „lineární vůči nejvyšším derivacím u“. U kvazilineárních rovnic však připouštíme závislost koeficientů a_α pro $|\alpha| = n$ na na derivacích u až do řádu $(n-1)$ včetně.

Příklad. Buď $u = u(t, x)$, $t \in (0, \infty)$, $x \in \mathbb{R}^d$. Potom následující *evoluční* parciální diferenciální rovnice lze charakterizovat takto:

- $\frac{\partial u}{\partial t} + \left(x^2 + \cos \frac{x}{x^2+1}\right) \Delta u = 0$ je lineární (homogenní) rovnice 2. řádu, s nekonstantními koeficienty;
- $\frac{\partial u}{\partial t} + \left(x^2 + \sin\bigl(u^2 + \frac{\partial u}{\partial x}\bigr)^2\right) \Delta u = 0$ je nelineární, a přitom kvazilineární rovnice 2. řádu;
- $\frac{\partial u}{\partial t} + x^2 \Delta u + \sin\bigl(u^2 + \frac{\partial u}{\partial x}\bigr)^2 = 0$ je nelineární, a přitom semilineární rovnice 2. řádu;
- $\frac{\partial u}{\partial t} + (\Delta u)^2 = 0$ je ryze nelineární rovnice 2. řádu;
- $\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{d} a_j(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x_j} = f(x, t, u)$ je nelineární, a přitom kvazilineární, 1. řádu.

Odvození základních rovnic matematické fyziky

2 Cauchyova úloha pro kvazilineární PDR 1. řádu

Příklad (Cauchyova úloha pro lineární transportní rovnici)**.** *Budeme řešit následující úlohu: Najděte funkci* $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u \in C^1(\mathbb{R})$, $u = u(x,y)$ *tak, aby*

$$\partial_x u + c\partial_y u = 0 \text{ na } \mathbb{R}^2$$

a $u(0,y) = u_0(y)$ *pro danou funkci* $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ *a* $c \in \mathbb{R}$.

Řešení je $u(t,x) = u_0(x - ct)$.

Definice 6. *Buď* $t \in (0,T)$, $T > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, *a uvažujme kvazilineární parciální diferenciální rovnici prvního řádu pro funkci* $u = u(t,x)$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{d} a_j(t,x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j} = f(t,x,u)\,, \qquad t \in (0,T)\,,\ \ x \in \mathbb{R}^d\,, \tag{2.13}$$

kde f, $a_j \in \mathcal{C}((0,T)\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R})$, *j=1,...,d, jsou dané funkce. Řekneme, že* $u : (0,T)\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *je* klasickým řešením (2.13)*, pokud*

1. $u \in \mathcal{C}^1((0,T)\times\mathbb{R}^d)$,
2. *u splňuje* (2.13) *ve všech bodech* $(t,x) \in (0,T)\times\mathbb{R}^d$.

Rovnici (2.13) *doplňujeme* počáteční podmínkou *tvaru*

$$u(0,x) = u_0(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}^d\,, \tag{2.14}$$

kde $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ *je daná funkce. Úloha* (2.13)–(2.14) *se nazývá* Cauchyova úloha pro kvazilineární rovnici 1. řádu. *Řekneme, že* $u : (0,T)\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *je* klasickým řešením Cauchyovy úlohy (2.13)–(2.14)*, pokud u je klasickým řešením* (2.13) *a navíc splňuje počáteční podmínku* (2.14) *v následujícím (klasickém) smyslu:*

$$\lim_{(t,y)\to(0+,x)} u(t,y) = u_0(x) \quad \textit{pro všechna } x \in \mathbb{R}^d\,. \tag{2.15}$$

Poznámka.

- V podstatě lze (obecně) říci, že když mluvíme o *klasickém řešení*, máme nejčastěji na mysli tak hladkou funkci, aby všechny její v rovnici vystupující derivace byly spojité. Proto klasické řešení u rovnice (2.13) hledáme v prostoru $\mathcal{C}^1((0,T)\times\mathbb{R}^d)$. Podobně splnění počáteční podmínky „v klasickém smyslu“ znamená její splnění ve smyslu limity. Termín „Cauchyova úloha“ se v kontextu evolučních PDR používá tehdy, když oblastí, na které jsou definovány prostorové proměnné a tedy i počáteční podmínky, je celý prostor (tedy když $\Omega = \mathbb{R}^d$). Někdy se též používá termín *lokální Cauchyova úloha* pro situaci, kdy řešení Cauchyovy úlohy hledáme pouze na nějaké oblasti $G \subset (0,T)\times\mathbb{R}^d$.
- Rozmyslete si, že (2.15) je ekvivalentní následujícímu tvrzení: existuje spojité rozšíření funkce u na množinu $\langle 0,T)\times\mathbb{R}^d$ takové, že $u(0,x) = u_0(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^d$.

Značení. Pro zjednodušení zápisu je možné ztotožnit časovou proměnnou t s některou další složkou prostorové proměnné, například $t \equiv x_0$. Takto rozšířenou časo-prostorovou proměnnou budeme pro pohodlí značit opět x, zatímco pro prostorovou proměnnou budeme v této situaci používat označení $\overline{x}$. Tedy $x = (x_0,\overline{x}) \in \mathbb{R}^d_T := (0,T)\times\mathbb{R}^d$, $\overline{x} = (x_1,\ldots,x_d)$. Dále položíme $a_0(x,u) := 1$. Pak (2.13) resp. (2.14) přejde v

$$\sum_{j=0}^{d} a_j(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j} = f(x,u)\,, \qquad x \in \mathbb{R}^d_T\,, \tag{2.16}$$

resp.

$$u(x) = u_0(x) \quad \text{na množině } \{x \in \mathbb{R}^d_T;\, x_0 = 0\}\,. \tag{2.17}$$

Ve zbytku tohoto paragrafu budeme hledat řešení Cauchyovy úlohy (2.13)–(2.14) ve zjednodušeném tvaru (2.16)–(2.17). Budeme však mít na paměti, že pro (počáteční) podmínku tvaru (2.17) je nejpřirozenější interpretací proměnné x_0 právě „čas t“.

Poznámka. Na podmínku (2.17) lze nahlížet i tak, že hodnoty hledaného řešení jsou předem známy (resp. „předepsány“ na nadrovině $\{x \in \mathbb{R}^d_T;\, x_0 = 0\} \subset \mathbb{R}^d_T$. Při tomto pohledu může jednoho snadno napadnout, že by tato plocha „předepsaných hodnot“ nemusela nutně být „rovná“. Dojdeme tak ke zobecnění podmínky (2.20), a sice, že hledáme řešení rovnice (2.16) splňující navíc podmínku

$$u = u_0 \quad \text{na množině } \Gamma \subset \mathbb{R}^d_T\,, \tag{2.18}$$

kde Γ je nějaká (hladká) nadplocha dimenze d v $\mathbb{R}^d_T$. V dalším uvidíme (viz paragraf **??**), že Γ nebude moci být zcela libovolná. Aby byla úloha (2.16), (2.18) řešitelná, nebude moci být Γ tzv. *charakteristickou plochou* rovnice (2.16). Až nastane správný čas, uvědomíme si tedy, že rovnice (2.16) si v jakémsi slova smyslu „sama řekne“, kde je možno předepsat jejímu řešení hodnoty a kde ne.

Budeme nyní hledat řešení úlohy (2.16)–(2.20) ve dvou krocích. Nejprve vyšetříme případ, kdy f na pravé straně rovnice (2.16) bude identicky nulová funkce a poté se budeme věnovat případu obecné f.

$\boxed{\text{Možnost I, } f \equiv 0.}$

V tomto případě přejde rovnice (2.16) v rovnici

$$\sum_{j=0}^{d} a_j(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j} = 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}^d_T := (0,T) \times \mathbb{R}^d\,, \tag{2.19}$$

s počáteční podmínkou

$$u(x) = u_0(x) \qquad \text{na množině } \{x \in \mathbb{R}^d_T;\, x_0 = 0\}\,. \tag{2.20}$$

Řešení úlohy (2.19)–(2.20) budeme hledat tzv. *metodou charakteristik.*[4] Vyslovme nejprve následující definici.

Definice 7. *Rovnici* (2.19) *přiřadíme* systém obyčejných diferenciálních rovnic *(zvaný též* charakteristický systém rovnice (2.19)*) pro neznámé funkce $x_j = x_j(s)$, $j = 0, \dots d$,*

$$\frac{d}{ds}x_j(s) = a_j\big(x(s), u(x(s))\big)\,, \quad s \in (\alpha,\beta) \subset \mathbb{R}\,, \tag{2.21}$$

kde a_j jsou funkce z (2.19)*. Každé klasické řešení $x : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}^d_T$ systému rovnic* (2.21) *nazvu* charakteristikou (charakteristickou křivkou) rovnice (2.19).

Poznámka.

1. Charakteristika je tedy křivka v $\mathbb{R}^d_T$, jejíž parametrizace je dána zobrazením $x : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}^d_T$. Vzhledem k tomu, že systém (2.21) je systém se spojitými pravými stranami a_j, existuje podle teorie ODR (viz [Kurzweil, 1978]) řešení (2.21) alespoň lokálně v okolí každé počáteční (proto index p v (2.22)) podmínky typu

$$x(s_p) = x_p\,, \quad s_p \in (\alpha,\beta)\,, \quad x_p \in \mathbb{R}^d_T\,. \tag{2.22}$$

   Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $s_p = 0 \in (\alpha,\beta)$. Připomeňme, že pro pouze spojité a_j nemusí být řešení úlohy (2.21)–(2.22) určeno jednoznačně, k tomu je potřeba, aby a_j byly alespoň lokálně lipschitzovské funkce (podrobněji viz např. [Kurzweil, 1978]).

[4] V paragrafu **??** rovněž uvidíme, že mezi charakteristickou plochou z předchozí poznámky a charakteristikou z následující definice bude skutečně souvislost.

2. Přesněji řečeno, charakteristika $x(s)$ je křivka, přiřazená nejen rovnici (2.19) (prostřednictvím funkcí a_j), ale i funkci $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d \times (0,T))$. Obecně tedy nemusíme na u nahlížet jako na řešení rovnice (2.19), které ostatně teprve hledáme, ale jako na libovolnou dostatečně hladkou funkci u, která spolu se známými koeficienty a_j definuje charakteristiky. Lépe vše osvětlíme za chvíli na příkladech.

Následující identita je pro metodu charakteristik klíčová. Studujme chování libovolné funkce $u \in \mathcal{C}^1((0,T) \times \mathbb{R}^d)$ na charakteristice $x(s)$, přiřazené rovnici (2.21) a této funkci u. Derivováním podle s dostaneme:

$$\frac{d}{ds}u(x(s)) = \sum_{j=0}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x(s))\frac{d}{ds}x_j(s) \overset{(2.21)}{=} \sum_{j=0}^{d} a_j\big(x(s), u(x(s))\big)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x(s))\,. \tag{2.23}$$

Je-li levá strana identity (2.23) rovna nule, znamená to, že funkce u je konstantní na charakteristice $x(s)$, nulovost pravé strany (2.23) pak znamená, že funkce u je klasickým řešením rovnice (2.19) v bodech, které leží na příslušné charakteristice.

Tato identita dokazuje následující lemma, jehož formulaci věnujte pozornost: zdánlivě jde o dvě implikace, které dohromady vytvoří ekvivalenci; výroky, tvořící implikace (a) a (b), se však poněkud liší.

Lemma 8. *Uvažujme funkci $u \in \mathcal{C}^1(\Omega_T)$, kde $\Omega_T \subset (0,T) \times \mathbb{R}^d$ je neprázdná oblast.*

1. *Buď u konstantní na charakteristice $x(s)$, $s \in (\alpha, \beta)$, ležící v Ω_T, a přiřazené koeficientům $a_j(x,u)$ rovnice* (2.19) *a funkci u. Potom funkce u řeší v klasickém smyslu rovnici* (2.19) *v bodech charakteristiky $x(s)$, ležících v Ω_T.*
2. *Nechť naopak u je klasické řešení rovnice* (2.19) *v oblasti Ω_T. Potom u je konstantní na libovolné charakteristice $x(s)$, ležící v oblasti Ω_T.*

Důkaz. Důkaz obou implikací vychází z rovnosti (2.23) a diskuse za ní. □

Příklad. Rovnice $u_t + xu_x = 0$ s počáteční podmínkou u_0. Dostane se, že charakteristika, procházející bodem $[x_0, t_0]$, $x_0 \neq 0$, $t_0 > 0$, má rovnici $t = \ln|x| + (t_0 - \ln|x_0|)$, jde tedy o „logaritmický vějíř", viz Obr. **??**.

Na základě toho lze explicite vyjádřit řešení uvedené rovnice pro data $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, a sice $u(x,t) = u_0(xe^{-t})$. Například pro $u_0(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ dostaneme $u(x,t) = \exp(-x^2e^{-2t})$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$.

. . . . konec přednášky 2, 8.10.2021

$\boxed{\text{Možnost II, } f \not\equiv 0.}$

Pro $f \not\equiv 0$ máme vyřešit obecnou rovnici tvaru

$$\sum_{j=0}^{d} a_j(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j} = f(x,u)\,, \quad x \in \mathbb{R}^d_T := (0,T) \times \mathbb{R}^d\,, \tag{2.24}$$

s počáteční podmínkou

$$u(x) = u_0(\overline{x}) \quad \text{na množině } \{x \in \mathbb{R}^d_T;\, x_0 = 0\}\,, \tag{2.25}$$

kde $x = (x_0, \overline{x})$, $\overline{x} = (x_1, \dots, x_d)$. Úlohu (2.24)–(2.25) budeme řešit tak, že nejprve vyřešíme poněkud jinou úlohu s homogenní rovnicí (tedy s nulovou pravou stranou). Problém se tím převede do situace, kterou jsme studovali v možnosti I.

Věta 9. *Buďte* $f(x,u)$, $a_j(x,u) \in \mathcal{C}((0,T)\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R})$, $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$, $G \subset (0,T)\times\mathbb{R}^d$ *neprázdná oblast a* $J \subset \mathbb{R}$ *otevřený interval. Buď dále* $w = w(x,u) \in \mathcal{C}^1(G\times J)$ *klasické řešení úlohy*

$$\sum_{j=0}^{d} a_j(x,u)\frac{\partial w}{\partial x_j} + f(x,u)\frac{\partial w}{\partial u} = 0\,, \qquad (x,u)\in G\times J\,, \tag{2.26}$$

$$w(x,u) = u - u_0(\overline{x}) \qquad \text{na množině } \{x\in G;\, x_0 = 0\}\,, \tag{2.27}$$

kde $x = (x_0,\overline{x})$, $\overline{x} = (x_1,\dots,x_d)$. *Buď dále* $(x_p,u_p)\in G\times J$ *takový, že* $w(x_p,u_p) = 0$, $\frac{\partial w}{\partial u}(x_p,u_p) \neq 0$. *Potom existují okolí* $\mathcal{U}(x_p)\subset G$, $\mathcal{U}(u_p)\subset J$ *a funkce* $u\in\mathcal{C}^1(\mathcal{U}(x_p))$ *takové, že*

1. $w(x,u(x)) = 0$ *pro všechna* $x\in\mathcal{U}(x_p)$, *přitom* $u(x_p) = u_p$,
2. $\frac{\partial w}{\partial u}(x,u)\neq 0$ *pro všechna* $(x,u)\in\mathcal{U}(x_p)\times\mathcal{U}(u_p)$,
3. $u = u(x)$ *je klasickým (lokálním) řešením úlohy* (2.24)–(2.25) *na* $\mathcal{U}(x_p)$.

Důkaz. Tvrzení (i) a (ii) jsou přímým důsledkem věty o implicitních funkcích. Existence okolí $\mathcal{U}(x_p)$, $\mathcal{U}(u_p)$ a (implicitní) funkce $u\in\mathcal{C}^1(\mathcal{U}(x_p))$ dokonce nijak nesouvisí s tím, že w řeší nějakou rovnici.

Pro důkaz (iii) si stačí uvědomit, že pro $x\in\mathcal{U}(x_p)$ je funkce $w(x,u(x))$ spojitě diferencovatelná a identicky nulová na $\mathcal{U}(x_p)$, jsou tedy na $\mathcal{U}(x_p)$ nulové i její derivace podle všech x_j, $j=0,\dots,d$:

$$\frac{\partial w}{\partial x_j}(x,u(x)) + \frac{\partial w}{\partial u}(x,u(x))\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = 0\,, \qquad j=0,\dots,d\,.$$

Vyjádříme z těchto rovností $\frac{\partial w}{\partial x_j}(x,u(x))$, dosadíme do (2.26) a dostaneme:

$$\frac{\partial w}{\partial u}(x,u(x))\cdot\left(-\sum_{j=0}^{d} a_j(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j} + f(x,u)\right) = 0\,, \qquad x\in\mathcal{U}(x_p)\,.$$

Protože $\frac{\partial w}{\partial u}(x,u(x))\neq 0$ pro $x\in\mathcal{U}(x_p)$ (viz (i)), musí být nulový výraz v kulaté závorce, což dává (2.24) pro $x\in\mathcal{U}(x_p)$.

Dále je pro $x\in\mathcal{U}(x_p)$, $x_0 = 0$, podle (i) a (2.27),

$$0 = w(x,u(x)) = u(x) - u_0(\overline{x})\,,$$

což není nic jiného než (2.25) na $\{x\in\mathcal{U}(x_p), x_0 = 0\}$. □

3 O klasifikaci rovnic 2. řádu

Mějme lineární rovnici 2. řádu v $\mathbb{R}^d$

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} + \sum_{j=1}^{d} b_j(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)\,u = f(x) \tag{2.28}$$

Jde-li nám o klasické řešení, předpokládáme dostatečnou hladkost u a tedy můžeme zaměnit smíšené parciální derivace. Tudíž bez újmy na obecnosti je $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ pro každé x a matice $A := (a_{ij}(x))_{i,j=1}^d$ je reálná, symetrická a proto diagonalizovatelná. Tedy existuje ortogonální matice P a diagonální matice D tak, že $P^{\mathrm{T}}AP = D$. Připomeňme si, že signatura kvadratické formy určené maticí D je trojice (n,p,q), kde n je počet nulových, p počet kladných a q počet záporných prvků na diagonále D. Dle zákona setrvačnosti kvadratické formy je počet nulových, záporných a kladných prvků na diagonále matice D pevně dán a tedy je signatura dobře definovaná.

Předpokládejme, že jsou koeficienty u členů druhých řádů rovnice (2.28) konstantní, tedy $a_{ij}(x) = a_{ij}$. Definujme $v := u \circ P$ a položme $y = P^{\mathrm{T}}x$, pak máme $v(y) = v(P^{\mathrm{T}}x) = u(PP^{\mathrm{T}}x) = u(x)$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial v}{\partial y_k}(y)\, p_{ik} \quad \text{a} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \sum_{k,h=1}^{d} \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_h}(y)\, p_{ik}p_{jh}$$

Odtud je vidět, že $u(x)$ splňuje rovnici (2.28) právě, když $v(y)$ řeší rovnici jejíž koeficienty u členů druhého řádu jsou prvky matice $D = (d_{ij})_{i,j=1}^{d}$, neboť

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j}(x) &= \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} \sum_{k,h=1}^{d} \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_h}(y)\, p_{ik}p_{jh} = \\ &= \sum_{h,k=1}^{d} \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_h}(y) \underbrace{\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}p_{ik}p_{jh}}_{d_{ij}}\end{aligned}$$

Definice 10. (Typ diferenciální rovnice druhého řádu) *Buď matice $D = (d_{ij})_{i,j=1}^{d}$ jako výše a m její řád. Řekneme, že rovnice (2.28) je v bodě x:*

i. eliptická*, jestliže jsou znaménka všech prvků matice D stejná a $m = d$. Typickým zástupcem je Poissonova rovnice: $-\Delta u = f$.*

ii. hyperbolická*, jestliže je $m = d$ a všechna znaménka prvků D jsou stejná až na jedno. Typickým zástupcem je vlnová rovnice: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f$ (Laplaceův operátor je brán jen vzhledem k prostorovým proměnným).*

iii. parabolická*, jestliže je $m = d-1$ BÚNO $d_{dd} = 0$, všechna znaménka prvků D jsou stejná a koeficient rovnice (2.28) u $\frac{\partial u}{\partial x_d}$ je nenulový. Typickým zástupcem je rovnice vedení tepla: $\partial_t u - \Delta u = f$ (stejně jako v předchozím případě je $\Delta = \sum_{i=1}^{d-1} \partial_i^2$).*

iv. parabolická v širším slova smyslu*, jestliže $m \leq d-1$.*

v. ultrahyperbolická*, jestliže $m = d$ a alespoň dvě znaménka prvků D jsou kladná a alespoň dvě záporná.*

Příklad. *Tricomiho rovnice*

$$x_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$$

$x_2 > 0 \ldots$ eliptická, $x_2 < 0 \ldots$ hyperbolická, tedy mění typ při přechodu x_1 osy.

Cvičení. *Uvažujte lineární PDR druhého řádu s konstantními koeficienty, v $\mathbb{R}^2$, tedy rovnici typu*

$$a\partial_x^2 u + b\partial_x\partial_y u + c\partial_y^2 u = f\,, \qquad |a| + |b| + |c| > 0. \tag{2.29}$$

Ukažte, že platí:

- *(2.29) je eliptická $\iff b^2 - 4ac < 0$;*
- *(2.29) je parabolická (event. v širším slova smyslu) $\iff b^2 - 4ac = 0$;*
- *(2.29) je hyperbolická $\iff b^2 - 4ac > 0$.*

Cvičení. 1. Uvažujte lineární PDR druhého řádu v kanonickém tvaru (vzhledem k nevyšším derivacím), tedy rovnici pro $u = u(y)$,

$$\sum_{k=1}^{d} \alpha_k(y) \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2} + \sum_{k=1}^{d} \beta_k(y) \frac{\partial u}{\partial y_k} + c(y)\, u = f(y)\,, \qquad \text{kde } \alpha_k(y) \in \{-1, 1, 0\}\,. \tag{2.30}$$

Ukažte, že v každém bodě y lze provést tyto úvahy:

(a) Pokud existuje takový index j, že $\alpha_j \neq 0$, $\beta_j \neq 0$, potom zavedení nové funkce $v = v(y)$ susbtitucí $u = v\, e^{-\frac{\beta_j y_j}{2\alpha_j}}$ (přes stejné indexy nesčítáme, jde o ono konkrétní j) způsobí, že:

- v rovnici pro v nebude člen, odpovídající β_j (odpovídající koeficient bude nulový)
- všechny koeficienty u členů druhého řádu zůstanou beze změny a všechny zbylé koeficienty u členů prvého řádu (s výjimkou výše zmíněného) zůstanou rovněž beze změny

Ta dvojka ve jmenovateli zlomku v exponenciele není překlep. Sledujte její roli při výpočtu.

(b) Pokud existuje takový index j, že $\alpha_j = 0$, $\beta_j \neq 0$, potom zavedení nové funkce $v = v(y)$ susbtitucí $u = v\, e^{-\frac{c y_j}{\beta_j}}$ (přes stejné indexy nesčítáme, jde o ono konkrétní j) způsobí, že:

- v rovnici pro v nebude absolutní člen, tj, člen odpovídající nulté derivaci (koeficientu c)
- všechny koeficienty u členů druhého i prvního řádu zůstanou beze změny

2. Pomocí výše uvedených dvou substitucí ukažte, že každou lineární PDR 2. řádu s konstantními koeficienty lze vhodnými substitucemi převést na jeden z následujících typů:

- Eliptickou rovnici na $-\Delta u + ku = f$. Pro $k = 0$ jde o tzv. Laplace-Poissonovu rovnici, pro $k \neq 0$ o rovnici Helmholtzova typu. Koeficient k, je-li nenulový, obecně nelze „vynulovat“.
- Parabolickou rovnici na $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f$, tj. na rovnici vedení tepla. Všechny parabolické lineární PDR 2. řádu s konstantními koeficienty jsou tedy nějakou rovnicí vedení tepla.
- Hyperbolickou rovnici na $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u + ku = f$, tj. na vlnovou rovnici. Koeficient k, je-li nenulový, obecně nelze „vynulovat“.

3. Určete typ rovnice, převeďte na kanonický tvar, případně převeďte na jednu z rovnic z předchozího bodu, případně se pokuste vyřešit, pokud se po převedení dostanete na „řešitelný typ“ rovnice.

(a) $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} + u_x + u_y = 0$ Řešení: Po provedení substituce $\xi = x$, $\eta = y - x$, $\chi = 2x - 2y + z$ s následným zavedením nové funkce předpisem $u = ve^{-\xi/2}$ dostaneme rovnici $\Delta v = \frac{1}{4} v$. Jde o eliptickou rovnici (Helmholtzova typu).

(b) $u_{xx} + 4u_{xy} + 8u_{yy} + u_x + u_y = 0$ Řešení: Po provedení substituce $\xi = x$, $\eta = \frac{y}{2} - x$ s následným zavedením nové funkce předpisem $u = ve^{-\xi/2 + \eta/4}$ dostaneme eliptickou rovnici (Helmholtzova typu) $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = \frac{5}{16} v$.

(c) $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} - u_x - 2u_y = 0$ Řešení: Po provedení substituce $\xi = x$, $\eta = y - 2x$ dostaneme parabolickou rovnici $u_\eta - u_{\xi\xi} = 0$.

(d) $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_y = 0$ Řešení: Po provedení substituce $\xi = x$, $\eta = \frac{x}{2} + \frac{y}{2}$ s následným zavedením nové funkce předpisem $u = ve^{\eta/4}$ dostaneme hyperbolickou rovnici $v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} = \frac{3}{16} v$.

(e) $4u_{xy} - 3u_{yy} + 4u_x - 8u_y - 5u = 0$,
řešte obecně a poté s podmínkami $u(x, 0) = e^{\frac{x}{2}}$, $u_y(x, 0) = 0$. Řešení: Po provedení substituce $\xi = x + y$, $\eta = x + 2y$ s následným zavedením nové funkce předpisem $u = ve^{2\xi - \frac{3}{2}\eta}$ dostaneme hyperbolickou rovnici $v_{\xi\xi} - 4v_{\eta\eta} = 0$. Její obecné řešení je $v(\xi, \eta) = f(\eta - 2\xi) + g(\eta + 2\xi)$, tedy $u(x, y) = e^{\frac{x}{2} - y}\big(f(x) + g(3x + 4y)\big)$. Okrajové podmínky dají $u(x, y) = e^{\frac{x}{2} - y}(1 + y)$.

4.* A další sada příkladů pro vaše samostatné počítání: v každé oblasti, kde se nemění typ rovnice, najděte její kanonický tvar.

(a) $y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0$

(b) $u_{xx} - 2\sin x\, u_{xy} + (2 - \cos^2 x)\, u_{yy} = 0$

(c) $x^2 u_{xx} - 2x u_{xy} + u_{yy} = 0$

(d) $y u_{xx} - x u_{xy} = 0$

(e) $(1 + x^2) u_{xx} + (1 + y^2) u_{yy} + y u_y = 0$

Výše jsme definovali typ diferenciální rovnice druhého řádu v pevném bodě. Je jistě zajímavé, jestli lye rovnici na kanonický tvar převést na okolí daného bodu. To je jistě pravda, pokud se jedná o rovnici s konstantními koeficienty. Pokud jsou však koeficienty nekonstantní, obecně to není možné. Ukážeme si nyní pozitivní odpověď v případě, že se jedná o diferenciální rovnici v $\mathbb{R}^2$.

Uvažme proto rovnici tvaru

$$a_{11}\partial_x^2 u + 2a_{12}\partial_x\partial_y u + a_{22}\partial_y^2 u + b(\partial_x u, \partial_y u, u, x, y) = 0, \tag{2.31}$$

pro neznámou funkci $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Funkce a_{11}, a_{12}, a_{22} jsou zadané a závisí na x, y. Budeme předpokládat, že na okolí jistého bodu (x_0, y_0) platí $a_{11} \neq 0$. .

Uvažujme transformaci proměnných $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, která je prostá a dvakrát spojitě diferencovatelná. Navíc předpokládáme, že determinant Jacobiho matice této transformace je nenulový. Nechť $U = U(\xi, \eta)$ je funkce $u = u(x, y)$ vyjádřená v nových proměnných, tj. platí vztah

$$u(x, y) = U(\varphi(x, y), \psi(x, y))\,.$$

Tedy

$$\begin{aligned}
u_x &= U_\xi\, \varphi_x + U_\eta\, \psi_x\,,\\
u_y &= U_\xi\, \varphi_y + U_\eta\, \psi_y\,,\\
u_{xx} &= U_{\xi\xi}\, \varphi_x^2 + 2\, U_{\xi\eta}\, \varphi_x\, \psi_x + U_{\eta\eta}\, \psi_x^2 + U_\xi\, \varphi_{xx} + U_\eta\, \psi_{xx}\,,\\
u_{xy} &= U_{\xi\xi}\, \varphi_x\, \varphi_y + U_{\xi\eta}\, (\varphi_x\, \psi_y + \varphi_y\, \psi_x) + U_{\eta\eta}\, \psi_x\, \psi_y + U_\xi\, \varphi_{xy} + U_\eta\, \psi_{xy}\,,\\
u_{yy} &= U_{\xi\xi}\, \varphi_y^2 + 2\, U_{\xi\eta}\, \varphi_y\, \psi_y + U_{\eta\eta}\, \psi_y^2 + U_\xi\, \varphi_{yy} + U_\eta\, \psi_{yy}\,,
\end{aligned}$$

z čehož plyne

$$\bar{a}_{11}\, U_{\xi\xi} + 2\, \bar{a}_{12}\, U_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}\, U_{\eta\eta} + \bar{b} = 0\,,$$

kde

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{11} &= a_{11}\, \varphi_x^2 + 2\, a_{12}\, \varphi_x\, \varphi_y + a_{22}\, \varphi_y^2\,,\\
\bar{a}_{12} &= a_{11}\, \varphi_x\, \psi_x + a_{12}\, (\varphi_x\, \psi_y + \varphi_y\, \psi_x) + a_{22}\, \varphi_y\, \psi_y\,,\\
\bar{a}_{22} &= a_{11}\, \psi_x^2 + 2\, a_{12}\, \psi_x\, \psi_y + a_{22}\, \psi_y^2\,,\\
\bar{b} &= \bar{b}(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)\,.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Pokud byla výchozí rovnice lineární, pak transformovaná rovnice je též lineární.

Cílem provedené transformace je původní rovnici zjednodušit, a tudíž nás zajímá, za jakých podmínek je některý z koeficientů $\bar{a}_{11}$, $\bar{a}_{12}$, $\bar{a}_{22}$ nulový.

Hyperbolický případ V tomto odstavci budeme předpokládat, že rovnice (2.31) je hyperbolická na okolí bodu (x_0, y_0) a tedy zde platí $0 < a_{12}^2 - a_{22}a_{11}$. Chceme volit φ, ψ tak, aby se nulovaly koeficienty $\bar{a}_{11}$, $\bar{a}_{22}$. Proto chceme přepsat $\bar{a}_{11}$ do tvaru

$$\bar{a}_{11} = a_{11}(\partial_x\varphi + \beta\partial_y\varphi)(\partial_x\varphi + \delta\partial_y\varphi).$$

Požadujeme tedy, aby $\beta\delta = a_{22}/a_{11}$ a $\beta + \delta = 2a_{12}/a_{11}$. Tato soustava má reálná řešení, pokud $0 < a_{12}^2 - a_{22}a_{11}$. Tato podmínka je splněna díky předpokladu. Dostáváme, že β, δ jsou určeny jednoznačně až na jejich záměnu a

$$\beta = \frac{1}{a_{11}}(a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{22}a_{11}}), \quad \delta = \frac{1}{a_{11}}(a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{22}a_{11}}).$$

Najdeme φ jako C^1 řešení lineární diferenciální rovnice 1. řádu $\partial_x\varphi + \beta\partial_y\varphi = 0$ a ψ jako C^1 řešení $\partial_x\psi + \beta\partial_y\psi = 0$ na jistém okolí U bodu (x_0, y_0)pomocí Lemmatu 8. V U platí $\nabla\varphi \perp (1, \beta)$ a $\nabla\psi \perp (1, \delta)$. Platí tedy, že hodnost matice $\nabla(\varphi, \psi)$ je rovna 2 a zobrazení $(\varphi, \psi) : U \to \mathbb{R}^2$ je regulární. Podle [Pick et al., 2019, Věta 11.6.2] můžeme předpokládat, případně po zmenšení U, že $V := (\varphi, \psi)(U)$ je otevřená a (φ, ψ) je na U difeomorfismus. Po použití transformace (φ, ψ) na (2.31) na U, dostaneme na V rovnici

$$2\bar{a}_{12}\partial_\xi\partial_\eta U + \bar{b} = 0.$$

Funkce $\bar{a}_{12}$ a $\bar{b}$ jsou definovány v (2.32). Tento odstavec zakončíme formulací právě dokázané věty.

Věta 11.

3 Vlnová rovnice

Věta 12. *Buď $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C^1([0, +\infty) \times \mathbb{R})$. Definujme*

$$u(t, x) := \frac{1}{2}(u_0(x + ct) + u_0(x - ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\xi)d\xi + \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\tau, \xi)d\xi d\tau.$$

(pokud je $f = 0$ nazývá se d'Alembertova formule)

Pak platí: 1) $u \in C^2([0, +\infty) \times \mathbb{R})$, 2) $\partial_t^2 u - c\partial_x^2 u = f$ in $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$, 3) $u = u_0$, $\partial_t u = u_1$ v $\{0\} \times \mathbb{R}$.

Věta (O derivování integrálu podle parametru).

Lemma 13. *13 Buď $u_1 \in C^1([0, +\infty))$, $u_1(0) = 0$ a $\tilde{u}_1$ liché prodloužení u_1 na $\mathbb{R}$. Pak je $\tilde{u}_1 \in C^1(\mathbb{R})$.*

Věta 14. *14 Nechť $T > 0$, $f \in C^1([0, T) \times [0, +\infty])$, $f(t, 0) = 0$ pro $t \in [0, T)$, $u_0 \in C^2([0, +\infty))$, $u_0(0) = u_0''(0) = 0$, $u_1 \in C^1([0, +\infty))$, $u_1(0) = 0$. Funkce u definovaná pro $x > ct \geq 0$ předpisem*

$$u(t, x) := \frac{1}{2}(u_0(x + ct) + u_0(x - ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\xi)d\xi + \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\tau, \xi)d\xi d\tau,$$

a pro $0 \leq x \leq ct < cT$ předpisem

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(u_0(x + ct) - u_0(ct - x)) + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct} u_1(\xi)d\xi$$
$$+ \frac{1}{2c}\int_0^{t-\frac{x}{c}} \int_{c(t-\tau)-x}^{x+c(t-\tau)} f(\tau, \xi)d\xi d\tau + \frac{1}{2c}\int_{t-\frac{x}{c}}^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\tau, \xi)d\xi d\tau$$

splňuje

$$\begin{aligned}
&u \in C^2([0, T) \times [0, +\infty)) \\
&\partial_t^2 u - c^2\partial_x^2 u = f \quad v\ (0, T) \times (0, +\infty) \\
&u = u_0, \quad \partial_t u = u_1, \quad v\ \{0\} \times [0, +\infty) \\
&u = 0, \quad v\ [0, T) \times \{0\}.
\end{aligned}$$

Věta 15. *15 Nechť $u_0 \in C^2([0,l])$, $u_1 \in C^1([0,l])$ a platí*

$$u_0(0) = u_0(l) = u_1(0) = u_1(l) = u_0''(0) = u_0''(l) = 0.$$

Ať jsou $\tilde{u_0}$, $\tilde{u_1}$ $2l$-periodická rozšíření u_0, u_1 na $\mathbb{R}$ lichá vzhledem k bodu 0. Definujeme

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(x-ct) + \tilde{\varphi}(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{\psi}(s)ds.$$

Pak funkce u splňuje 1) $u \in C^2([0,+\infty) \times [0,l])$, 2) $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$ v $(0,+\infty) \times (0,l)$, 3) $u = u_0$, $\partial_t u = u_1$ v $\{0\} \times [0,l]$.

Věta 16. *16 Nechť $u_0 \in C^3([0,l])$, $u_1 \in C^2([0,l])$ a platí*

$$u_0(0) = u_0(l) = u_1(0) = u_1(l) = u_0''(0) = u_0''(l) = 0.$$

Definujeme

$$\alpha_n = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(y)\sin(\frac{n\pi y}{l})dy, \quad \beta_n = \frac{2}{l}\int_0^l u_1(y)\cos(\frac{n\pi y}{l})dy$$
$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\alpha_n \cos(\frac{n\pi c}{l}t) + \frac{\beta_n}{n\pi c}\sin(\frac{n\pi c}{l}t)\right]\sin(\frac{n\pi x}{l}),$$

Pak funkce u splňuje 1) $u \in C^2([0,+\infty) \times [0,l])$, 2) $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$ v $(0,+\infty) \times (0,l)$, 3) $u = u_0$, $\partial_t u = u_1$ v $\{0\} \times [0,l]$.

Věta 17. *17 Nechť $l, T > 0$, $f \in C^2([0,T) \times [0,l])$, $f(t,0) = f(t,l) = 0$. Definujme*

$$f_n(t,x) = \frac{2}{l}\int_0^l f(t,y)\sin(\frac{ny}{l})dy.$$

Funkce

$$u(t,x) := \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^t \frac{l}{cn\pi} f_n(\tau)\sin(\frac{cn\pi}{l}(t-\tau))d\tau \sin(\frac{nx}{l})$$

splňuje

$$u \in C^2([0,T) \times [0,l])$$
$$\partial_t^2 u - c^2\partial_x^2 u = f \quad \textit{in } (0,T) \times (0,l)$$
$$u(0,\cdot) = \partial_t u(0,\cdot) = 0$$

....konec přednášky 6, 5. 11. 2021

Věta 18 (Gauß-Green-Ostrogradskii, [Evans, 2010])**.** *Ať je $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a omezená množina s C^1 hranicí. Pro $x \in \partial\Omega$ označíme $\nu(x)$ vnější jednotkovou normálu k Ω. Ať $u \in C^1(\overline{\Omega})$, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$. Pak*

$$\forall i \in \{1,\ldots,d\} : \int_\Omega \partial_i u \, d\lambda = \int_{\partial\Omega} u\nu_i \, dS.$$

Věta 19 (Greenovy formule)**.** *Ať je $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a omezená množina s C^1 hranicí a vnější jednotkovou normálou ν. Ať $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$, $w \in C^1(\overline{\Omega})$, $u, v, w : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$. Pak*

- $$\int_\Omega \Delta u w \, d\lambda = \int_{\partial\Omega} w(\nabla u \cdot \nu) \, dS - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w \, d\lambda,$$
- $$\int_\Omega \Delta u v - u \Delta v \, d\lambda = \int_{\partial\Omega} v(\nabla u \cdot \nu) - (\nabla v \cdot \nu) u \, dS.$$

Lemma 20. *Buď $x \in \mathbb{R}^d$, $r > 0$, u spojitá na $\partial U(x,r)$. Pak*

$$\fint_{\partial U(x,r)} u \, dS = \fint_{U(0,1)} u(x + rz) \, dS(z).$$

Lemma 21. *Buď $x \in \mathbb{R}^d$, $R > 0$, u spojitá na $U(x,R)$. Pak*

$$\partial_r \Big(\int_{U(x,r)} u \, d\lambda \Big) = \partial_r \int_0^r \int_{\partial U(x,\rho)} u \, dS \, d\rho = \int_{\partial U(x,r)} u \, dS.$$

Lemma 22.

$$d \int_{\partial U(0,1)} 1 \, d\lambda = \int_{\partial U(0,1)} 1 \, dS$$

Definice.

$$\alpha_d := \lambda^d(U(0,1)), \quad d\alpha_d := \int_{\partial U(0,1)} 1 \, dS.$$

Lemma 23. *Buď $x \in \mathbb{R}^d$, $R > 0$, $u \in C^1(U(x,R))$. Označme*

$$U^x(r) = \fint_{\partial U(x,r)} u \, dS.$$

Pak platí

$$\partial_r U^x(r) = \fint_{U(x,r)} \nabla u(y) \cdot \frac{y - x}{r} \, dS(y), \quad \text{pro } r \in (0,R).$$

Je-li navíc $u \in C^2(U(x,R))$, je

$$\partial_r U^x(r) = \frac{r}{d} \fint_{U(x,r)} \Delta u(y) \, d\lambda(y), \quad \partial_r^2 U^x(r) = \Big(\frac{1}{d} - 1\Big) \fint_{U(x,r)} \Delta u(y) \, d\lambda(y) + \fint_{\partial U(x,r)} \Delta u(y) \, dS(y), \quad \text{pro } r \in (0,R).$$

Lemma 24. *Buď $x \in \mathbb{R}^d$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $u \in C^m([0,+\infty) \times \mathbb{R}^d)$, u splňuje bodově*

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 \quad & v \ (0,T) \times \mathbb{R}^d, \\ u = u_0, \quad \partial_t u = u_1 \quad & v \ \{0\} \times \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Označíme

$$U^x(r,t) = \fint_{\partial U(x,r)} u(t,y) \, dS(y), \quad U_0^x(r) = \fint_{\partial U(x,r)} u_0(y) \, dS(y), \quad U_1^x(r) = \fint_{\partial U(x,r)} u_1(y) \, dS(y).$$

Pak $U^x \in C^m([0,+\infty)^2)$ a

$$\begin{aligned} \partial_t^2 U^x - \partial_r^2 U^x - \frac{d-1}{r} \partial_r U^x = 0 \quad & v \ (0,+\infty)^2, \\ U^x = U_0^x, \quad \partial_t U^x = \mathcal{U}_1^x \quad & v \ [0,+\infty) \times \{0\}. \end{aligned}$$

Lemma 25. *Za předpokladů Lemmatu 24 buď $d = 3$. Označme pro $t, r \geq 0$ funkce $\tilde{U}^x(r,t) := rU^x(r,t)$, $\tilde{U}_0^x(r) := rU_0^x(r)$, $\tilde{U}_1^x(r) := rU_1^x(r)$. Pak platí $\partial_t^2 \tilde{U}^x = \partial_r^2 \tilde{U}^x$ v $(0,+\infty)^2$, $\tilde{U}^x = 0$ v $[0,+\infty) \times \{0\}$, $\tilde{U}^x = \tilde{U}_0^x$ and $\partial_t \tilde{U}^x = \tilde{U}_1^x$ v $\{0\} \times [0,+\infty)$.*

. . . . konec přednášky 7, 12. 11. 2021

Věta 26. *Buď $d \in \{2,3\}$, $g \in C^3(\mathbb{R}^d)$, $h \in C^2(\mathbb{R}^d)$. Definujme u předpisem*

$$u(t,x) = \fint_{\partial U(x,t)} u_0(y) + tu_1(y) + \nabla u_0(y) \cdot (y-x)\, dS(y) \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}^3 \text{ a } t \geq 0, \text{ je-li } d = 3,$$

(Kirchhoffův vzorec)

$$u(t,x) = \frac{1}{2} \fint_{U(x,t)} \frac{1}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}} (tu_0(y) + t^2 u_1(y) + t\nabla u_0(y) \cdot (y-x)\, dS(y) \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}^2 \text{ a } t \geq 0, \text{ je-li } d = 2.$$

(Poissonův vzorec)

Pak

1. $u \in C^2([0,+\infty) \times \mathbb{R}^d)$,
2. $\partial_t^2 - \Delta u = 0$ v $(0,+\infty) \times \mathbb{R}^d$,
3. $u = u_0$, $\partial_t u = u_1$ v $\{0\} \times \mathbb{R}^d$.

Věta 27. *Buď $T > 0$, $f \in C^2([0,T) \times \mathbb{R}^d)$. Ať pro $\tau \in (0,T)$ splňuje funkce $u_\tau : [\tau,+\infty) \times \mathbb{R}^d$ následující podmínky*

1. $u_\tau \in C^2([0,+\infty) \times \mathbb{R}^d)$
2. $\partial_t^2 u_\tau - \Delta u = 0$ v $(\tau, T) \times \mathbb{R}^d$,
3. $u_\tau = 0$, $\partial_t u_\tau = f(\tau, \cdot)$ v $\{\tau\} \times \mathbb{R}^d$.

Pak funkce definovaná pro $t \in (0,T)$, $x \in \mathbb{R}^d$ předpisem

$$u(t,x) := \int_0^t u_\tau(t,x) d\tau$$

splňuje

1. $u \in C^2([0,T) \times \mathbb{R}^d)$,
2. $\partial_t^2 - \Delta u = f$ v $(0,T) \times \mathbb{R}^d$,
3. $u = 0$, $\partial_t u = 0$ v $\{0\} \times \mathbb{R}^d$.

Věta 28. *Buď $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $t_0 > 0$, $K = \{(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^d; |x - x_0| \leq t_0 - t, t \in [0,t_0]\}$. Buď $u \in C^2(K)$ a platí $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$ v K, $u = 0$, $\partial_t u = 0$ v $\{0\} \times U(x_0,t_0)$. Pak $u = 0$ v K.*

Důsledek. *1) Klasické řešení Cauchyovy úlohy pro vlnovou rovnici je určené jednoznačně. 2) Informace se pomocí vlnové rovnice šíří pouze konečnou rychlostí.*

Cvičení. *Dokažte podobné tvrzení pro okrajovou úlohu. Dokažte: Je-li $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ s C^1 hranicí, $u \in C^2([0,T] \times \Omega)$, $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$ v $[0,T] \times \Omega$, $u = 0$ v $[0,T] \times \partial\Omega$, $u = 0$, $\partial_t u = 0$ v $\{0\} \times \Omega$, je $u = 0$ v $[0,T] \times \overline{\Omega}$.*

. . . . konec přednášky 8, 19.11.2021

4 Rovnice vedení tepla

Rovnici

$$\partial_t u - \Delta u = f \tag{4.1}$$

nazýváme *rovnice vedení tepla*. Rovnici budeme studovat v $(0,+\infty)\times\Omega$, kde $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ je omezená otevřená množina s C^1 hranicí. Neznámá funkce u může reprezentovat například teplotu, pak zadaná funkce f udává hustotu zdrojů tepla.

Příklad. *Speciální řešení rovnice vedení tepla s $f=0$*

- *$u(t,x)=c$, $c\in\mathbb{R}$ řeší RVT v $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$*
- *Je-li $x_0\in\mathbb{R}^d$, $t_0\in\mathbb{R}$, řeší $u(t,x)=t-t_0+|x-x_0|^2/(2d)$ RVT v $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$*
- *Je-li $u\in C^2((0,+\infty)\times\mathbb{R}^d)$ řešení RVT na $(0,+\infty)\times\mathbb{R}^d$, je funkce u_λ definovaná pro $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$ předpisem $u_\lambda(t,x)=u(\lambda^2 t,\lambda x)$ také řešením RVT na $(0,+\infty)\times\mathbb{R}^d$.*

Cvičení. *Najděte sféricky symetrické samopodobné řešení RVT na $(0,+\infty)\times\mathbb{R}^d$, tj. řešení RVT, pro které platí pro všechny $\lambda>0$, že $u=u_\lambda$ na $(0,+\infty)\times\mathbb{R}^d$ a navíc závisí na x pouze přes jeho normu. Toto řešení musí mít tvar $u(t,x)=v(|x|^2/t)$ pro vhodnou funkci v.*

Příklad. *Další řešení rovnice vedení tepla s $f=0$*

- *Je-li $u\in C^\infty((0,+\infty)\times\mathbb{R}^d)$ řešení RVT na $(0,+\infty)\times\mathbb{R}^d$ tvaru $u(t,x)=v(|x|^2/t)$, jsou funkce $\partial_t u$ a $\partial_i u$ také řešením RVT na $(0,+\infty)\times\mathbb{R}^d$. Platí $\partial_t u(t,x)=-v'(|x|^2/t)|x|^2/t^2$, $\partial_i u(t,x)=v'(|x|^2/t)2x_i/t$.*

Motivováni posledním příkladem hledejme řešení RVT ve tvaru $u(t,x)=t^{-\beta}v(|x|^2/t)$ pro vhodné $\beta\in\mathbb{R}$. Dosazením do RVT zjitíme, že v musí splňovat obyčejnou diferenciální rovnici

$$4v''(\tau)\tau+(2d+\tau)v'(\tau)+\beta v(\tau)=0.$$

Pomocí metody integračního faktoru tuto rovnici můžeme napsat, pokud je $\beta=d/2$, jako

$$\left(\left[4v'(\tau)+v(\tau)\right]\tau^{\frac{d}{2}}\right)'=0.$$

Integrací této rovnice dostaneme

$$v(\tau)=e^{-\frac{\tau}{4}}\left(C\int_0^\tau s^{-\frac{d}{2}}e^{\frac{s}{4}}ds+D\right)$$

pro jisté $C,D\in\mathbb{R}$ a $\tau\in(0,+\infty)$. Pro jednoduchost položíme $C=0$ a D dopočteme tak, aby $\int_{\mathbb{R}^d}u(t,x)\,dx=1$ pro $t>0$, tj. $D=(4\pi)^{d/2}$.

Definice (Fundamentální řešení RVT)**.** *Funkci*

$$G(t,x):=\begin{cases}\dfrac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & \text{pro } t>0\\ 0, & \text{pro } t\le 0\end{cases}$$

nazveme fundamentální řešení rovnice vedení tepla.

Definice (Prostor testovacích funkcí)**.** *Je-li $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ neprázdná otevřená množina, definujeme* prostor testovacích funkcí *jako množinu*

$$\mathcal{D}(\Omega)=\{\varphi\in C^\infty(\Omega);\exists K\subset\Omega, K \text{ kompaktní}:\operatorname{spt}\varphi\subset K\},$$

viz např. [M. Renardy, 1993], Section 5.1.2.

Věta 29 (Vlastnosti fundamentálního řešení RVT). *1)* $G \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\setminus\{(0,0)\}$*, 2)* $\partial_t G - \Delta G = 0$ *v* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\setminus\{(0,0)\}$*, 3) pro všechna* $t > 0$ *platí* $\int_{\mathbb{R}^d} G(t,x)\,dx = 1$*,* $G \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^{d+1})$*, 4) pro všechna* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d+1})$ *platí*

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}} G(-\partial_t\varphi - \Delta\varphi)\,d\lambda = \varphi(0,0).$$

Poznámka. *Pro* $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d+1})$*,* $t \in \mathbb{R}$ *a* $x \in \mathbb{R}^d$ *definujeme pro* $\tau \in \mathbb{R}$ *a* $\xi \in \mathbb{R}^d$ *funkci* $\varphi(\tau,\xi) = \psi(t-\tau, x-\xi)$*. Zřejmě je* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d+1})$*. Dosazením do Věty 29 získáme*

$$\psi(t,x) = \varphi(0,0) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} G(-\partial_\tau\varphi - \Delta_\xi\varphi)\,d\lambda = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} G(\tau,\xi)(\partial_t\psi(t-\tau,x-\xi) - \Delta_x\varphi(t-\tau,x-\xi))\,d\lambda$$

$$= \partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x), \quad \textit{pro}$$

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} G(\tau,\xi)\psi(t-\tau,x-\xi)d(\tau,\xi).$$

. . . . konec přednášky 9, 26.11.2021

Věta 30 (Klasické řešení Cauchyovy úlohy pro RVT). *Buď* $T > 0$*,* $Q_T = (0,T)\times\mathbb{R}^d$*,* $f, \partial_t f, \nabla f, \nabla^2 f \in L^\infty(Q_T) \cap C(Q_T)$*. Definujme pro* $t \in [0,T)$*,* $x \in \mathbb{R}^d$

$$u_1(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} G(\tau,\xi) f(t-\tau, x-\xi)d(\tau,\xi).$$

Pak platí: 1) $u_1 \in C([0,T)\times\mathbb{R}^d)$*,* $\partial_t u_1, \nabla u_1, \nabla^2 u_1 \in L^\infty(Q_T)\cap C(Q_T)$*, 2)* $\partial_t u_1 - \Delta u_1 = f$ *pro* $t > 0$*,* $x \in \mathbb{R}^d$*, 3)* $u_1 = 0$ *v* $\{0\}\times\mathbb{R}^d$*, 4)* $\|u_1\|_{L^\infty(Q_T)} \le T\|f\|_{L^\infty(Q_T)}$*.*

Důkaz. Pomocí Věty o substituci aplikujeme na u_1 postupně transformace souřadnic $t-\tau = \sigma$, $\xi = 2\sqrt{t-\sigma}y$ a $\sigma = t\rho$. Dostaneme

$$u_1(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} G(t-\sigma,\xi) f(\sigma, x-\xi)d\xi d\sigma$$

$$= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (\frac{1}{\sqrt{\pi}})^d e^{-|y|^2} f(\sigma, x - 2\sqrt{t-\sigma}y)dyd\sigma = \int_0^1 t \int_{\mathbb{R}^d} (\frac{1}{\sqrt{\pi}})^d e^{-|y|^2} f(\sigma, x-2\sqrt{t(1-\rho)}y)dyd\rho.$$

Z posledního vyjádření plyne spojitost u_1 na $[0,T)\times\mathbb{R}^d$ podle Lebesgueovy věty. Majoranta je $Ce^{-|y|^2}$ s $C = T\|f\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^d)}/(\sqrt{\pi})^d$.

Z vyjádření pomocí integrálu podle (σ, y) je vidět, že je možné u_1 derivovat dvakrát podle x. Potřebná majoranta derivací na $(0,t)\times\Omega$ je $C\exp(-|y|^2)$ pro dost velké $C > 0$, podobně jako u spojitosti u_1. Dostaneme

$$\nabla u_1(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (\frac{1}{\sqrt{\pi}})^d e^{-|y|^2} \nabla f(\sigma, x-2\sqrt{t-\sigma}y)dyd\sigma, \tag{4.2}$$

$$\nabla^2 u_1(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (\frac{1}{\sqrt{\pi}})^d e^{-|y|^2} \nabla^2 f(\sigma, x-2\sqrt{t-\sigma}y)dyd\sigma. \tag{4.3}$$

Spojitost ∇u_1 a $\nabla^2 u_1$ se ukáže stejně jako pro u_1. Derivaci zprava podle proměnné t označíme ∂_t^+ a spočítáme z definice. V $t \in (0,T)$ a $x \in \mathbb{R}^d$

$$\partial_t^+ u_1(t,x) = \lim_{h\to 0+} (\frac{1}{\sqrt{\pi}})^d \frac{1}{h}\left[\int_0^{t+h}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|y|^2} f(\sigma, x-2\sqrt{t+h-\sigma}y)dyd\sigma - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|y|^2} f(\sigma, x-2\sqrt{t-\sigma}y)dyd\sigma\right]$$

$$= \lim_{h\to 0+} (\frac{1}{\sqrt{\pi}})^d ⨍_t^{t+h} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|y|^2} f(\sigma, x-2\sqrt{t+h-\sigma}y)dyd\sigma$$

$$+ \lim_{h\to 0+} (\frac{1}{\sqrt{\pi}})^d \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|y|^2} \frac{1}{h}\Big(f(\sigma, x-2\sqrt{t+h-\sigma}y) - f(\sigma, x-2\sqrt{t-\sigma}y)\Big)\,dyd\sigma =: I + II$$

Funkce

$$F(t) =$$

Zde chybí zbytek důkazu.

$\square$

. . . . konec přednášky 10, 3.12.2021

Věta 31. *Buď $u_0 \in C(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Definujme*

$$u_2(t,x) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^d} (\frac{1}{\sqrt{4\pi t}})^d e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}} u_0(x-\xi) d\xi, & pro\ t > 0, \\ u_0(x), & pro\ t = 0. \end{cases}$$

Pak platí: 1) $u_2 \in C([0,+\infty) \times \mathbb{R}^d) \cap C^\infty((0,+\infty) \times \mathbb{R}^d)$, 2) $\partial_t u_2 - \Delta u_2 = 0$ v $(0,+\infty) \times \mathbb{R}^d$, 3) $u_2 = u_0$ v $\{0\} \times \mathbb{R}^d$, 4) $\|u_2\|_{L^\infty(0,+\infty)\times\mathbb{R}^d} \le \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$.

Důkaz. Přepíšeme u_2 pomocí substituce $x - \xi = y$ následovně

$$u_2(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} (\frac{1}{\sqrt{4\pi t}})^d e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy, \quad \text{pro } t > 0. \tag{4.4}$$

Z tohoto vyjádření je zřejmé, že je možné u_2 v $t > 0$ libovolně derivovat podle t a x a výsledné funkce jsou spojité. Pro majoranty využijeme fakt, že $t > 0$, čímž se podaří zvládnout t ve jmenovateli. Ukažme například, že u_2 je spojitá v $(0,+\infty) \times \mathbb{R}^d$. Integrand je jistě spojitý v $(t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}^d$, integrovaná funkce je spojitá v y. Stačí tedy pro pevné $(t_0, x_0) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}^d$ najít na dostatečně malém okolí $U((t_0,x_0),\epsilon)$ s $\epsilon \in (0, t_0/2)$ integrovatelnou majorantu. Připravme si nejdříve odhad pomocí Youngovy nerovnosti $2x \cdot y \le 2|x|^2 + |y|^2/2$, pak $-|x-y|^2 = -|x|^2 + 2x \cdot y - |y|^2 \le |x|^2 - |y|^2/2$. Odhadujme pro $(t,x) \in U((t_0,x_0),\epsilon)$

$$|(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}})^d e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)| \le Ct^{-\frac{d}{2}} e^{\frac{|x|^2}{4t}} e^{\frac{-|y|^2}{8t}} \le C(t_0 - \epsilon)^{-\frac{d}{2}} e^{\frac{(|x_0|+\epsilon)^2}{4(t_0-\epsilon)}} e^{-\frac{|y|^2}{8t}}.$$

Našli jsme tedy majorantu, která dokazuje $u_2 \in C((0,+\infty) \times \mathbb{R}^d)$. Podobně se ukáže také $u_2 \in C^\infty((0,+\infty) \times \mathbb{R}^d)$. Máme tedy, že ve vyjádření (4.4) je možné prohazovat derivace a integrál, a vzhledem k tomu, že G řeší RVT v $(0,+\infty) \times \mathbb{R}^d$ dostáváme platnost 3).

Ukažme nyní $u_2 \in C([0,+\infty) \times \mathbb{R}^d)$. Zafixujeme $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $\epsilon > 0$. Chceme ukázat, že existují $\delta > 0$ a $\gamma > 0$ takové, že pro $(t,x) \in (0,\gamma) \times U(x_0,\delta)$ platí $|u(t,x) - u_0(x)| \le \epsilon$. Konstanty γ, δ nastavíme později. Najdeme $\beta > 0$ tak, aby pro $y \in U(x_0, 2\beta)$ platilo $|u_0(y) - u_0(x_0)| \le \epsilon$ a odhadujme

$$\begin{aligned} |u(t,x) - u_0(x)| &\le \int_{\mathbb{R}^d} (\frac{1}{\sqrt{4\pi t}})^d e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}} |u_0(x-\xi) - u_0(x_0)| d\xi \\ &= \int_{U(0,\beta)} (\frac{1}{\sqrt{4\pi t}})^d e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}} |u_0(x-\xi) - u_0(x_0)| d\xi + \int_{U(0,\beta)^c} (\frac{1}{\sqrt{4\pi t}})^d e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}} |u_0(x-\xi) - u_0(x_0)| d\xi = I + II. \end{aligned}$$

Zvolíme $\delta = \beta$, pak pro $x \in U(x_0,\delta)$ a $\xi \in U(0,\beta)$ platí $|x - \xi - x_0| < 2\beta$ a tedy $|u_0(x-\xi) - u_0(x_0)| < \epsilon$. Dostáváme

$$I \le \epsilon \int_{\mathbb{R}^d} (\frac{1}{\sqrt{4\pi t}})^d e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}} d\xi = \epsilon.$$

K odhadu integrálu II použijeme omezenost u_0, substituci $\xi = 2\sqrt{t}y$ a Leviho větu.

$$II \le 2\|u_0\|_\infty \int_{U(0,\frac{\beta}{2\sqrt{t}})^c} (\frac{1}{\sqrt{\pi}})^d e^{-|y|^2} dy \to 0, \quad \text{pro } t \to 0+.$$

Je tedy možné zvolit $\gamma > 0$ tak, aby pro $t \in (0,\gamma)$ platilo $II < \epsilon$. S přihlédnutím ke spojitosti u_0 dostáváme spojitost u_2 v $(0, x_0)$ vzhledem k $[0,+\infty) \times \mathbb{R}^d$. Dokončili jsme důkaz 1) a 3). Odhad 4) plyne hned z definice u_2 a vlastnosti fundamentálního řešení, viz Věta 29, 3). $\square$

Poznámka. *Funkce* u_2 *splňuje* $u_2 \in C^\infty((0,+\infty) \times \mathbb{R}^d)$ *i za slabších předpokladů na* u_0*. Z důkazu je vidět, že například stačí* $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cup L^1(\mathbb{R}^d)$*.*

Hladkost u_2 *v jistém smyslu nezávisí na počáteční podmínce. Je-li pro jisté* $T > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $R \in (0, \sqrt{T})$, $Q_R = (T - R^2, T) \times U(x_0, R)$ *a* $u_2 \in C^2(Q)$ *řeší v* Q *rovnici* $\partial_t u_2 - \Delta u_2 = 0$*, je* $u \in C^\infty(Q_{\frac{R}{2}})$*.*

Věta 32 (Slabý princip maxima na omezené množině)**.** *Buď* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *omezená, otevřená,* $T > 0$, $Q_T = (0,T) \times \Omega$, $u \in C(\overline{Q}_T)$, $\Gamma = (\{0\} \times \Omega) \cup ([0,T] \times \partial\Omega)$, $\partial_t u, \nabla u, \nabla^2 u \in C(\overline{Q}_T \setminus \Gamma)$ *a platí* $\partial_t u - \Delta u \leq 0$ *na* $\overline{Q}_T \setminus \Gamma$*. Pak platí*

$$\max_{\overline{Q}_T} u = \max_{\Gamma} u.$$

Poznámka. Γ *se nazývá parabolická hranice* Q_T*.*

Důkaz. Důkaz povedeme sporem. Ať existuje $(t_0, x_0) \in \overline{Q}_T \setminus \Gamma$ takové, že $u(t_0, x_0) = \max_{\overline{Q}_T} u > \max_\Gamma u$.

1) Pokud platí $\partial_t u(t_0, x_0) - \Delta u(t_0, x_0) < 0$ dostaneme snadno spor. V (t_0, x_0) nabývá u maxima, tedy zde musí platit nutné podmínky maxima, tj. $\partial_t u(t_0, x_0) \geq 0$ a $\partial_t u(t_0, x_0) = 0$, $\partial_i^2 u(t_0, x_0) \leq 0$ pro každé $i \in \{1, \ldots, d\}$. Dohromady dostaneme $\partial_t u(t_0, x_0) - \Delta u(t_0, x_0) \geq 0$ a to je spor s předpokladem tohoto odstavce.

2) V obecném případě definujeme funkci $v(t,x) = u(t,x) + \epsilon |x|^2$ a ukážeme, že pro vhodně zvolené malé $\epsilon > 0$ na ni můžeme použít odstavec 1). Pro každé $\epsilon > 0$ platí pro funkci v nerovnost $\partial_t v - \Delta v < 0$ v $\overline{Q}_T \setminus \Gamma$. Množina Ω je omezená, existuje tedy $R > 0$ takové, že $\Omega \subset U(0, R)$. Platí tedy $\|u - v\|_{L^\infty(Q_T)} \leq \epsilon R^2$. Definujme $m = \max_{\overline{Q}_T} u - \max_\Gamma u > 0$ a volme $\epsilon > 0$ tak, aby $\epsilon R^2 < m/2$. Pak platí $v(t_0, x_0) \geq u(t_0, x_0) - \epsilon R^2 > u(t_0, x_0) - m/2 = \max_\Gamma u + m - m/2 \geq \max_\Gamma (v + u - v) + m/2 \geq \max_\Gamma v - \|u - v\|_{L^\infty(\Gamma)} + m/2 \geq \max_\Gamma v$. Funkce v tedy nabývá svého maxima na $\overline{Q}_T$ v nějakém bodě z $\overline{Q}_T \setminus \Gamma$ a to vede ke sporu podle ostavce 1. $\square$

Věta 33 (Slabý princip maxima pro Cauchyovu úlohu pro rovnici vedení tepla)**.** *Buď* $T > 0$, $u \in C([0,T] \times \mathbb{R}^d) \cup L^\infty((0,T) \times \mathbb{R}^d)$, $\partial_t u, \nabla u, \nabla^2 u \in C((0,T] \times \mathbb{R}^d)$ *a platí* $\partial_t u - \Delta u \leq 0$ *na* $(0,T] \times \mathbb{R}^d$*. Pak platí*

$$\sup_{[0,T] \times \mathbb{R}^d} u = \sup_{\{0\} \times \mathbb{R}^d} u.$$

Důsledek. *Řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici vedení tepla je určeno jednoznačně ve třídě funkcí, které jsou omezené a splňují předpoklady na regularitu z Věty 33.*

Důsledek. *Řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici vedení tepla závisí spojitě na datech ve třídě funkcí, které jsou omezené a splňují předpoklady na regularitu z Věty 33. Ať* $T > 0$ *a funkce* u *a* v *jsou omezené a splňují předpoklady na regularitu z Věty 33. Ať* $\partial_t u - \Delta u = f$, $\partial_t v - \Delta v = g$ *v* $(0,T] \times \Omega$, $u = u_0$, $v = v_0$ *v* $\{0\} \times \mathbb{R}^d$*. Pak*

$$\|u - v\|_{L^\infty((0,T) \times \mathbb{R}^d)} \leq \|u_0 - v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} + T\|f - g\|_{L^\infty((0,T) \times \mathbb{R}^d)}.$$

Poznámka. *Pozor, existují netriviální hladká řešení úlohy* $\partial_t u - \Delta u = 0$ *v* $(0,T] \times \mathbb{R}^d$, $u = 0$ *v* $\{0\} \times \mathbb{R}^d$*, viz [Tichonov, 1935]. Tato řešení nemohou být omezená.*

.... konec přednášky 11, 10.12.2021

5 Eliptické rovnice - Laplaceova a Poissonova rovnice

Definice. *Funkci* $\Gamma : \{z \in \mathbb{C}; \mathcal{R}e(z) > 0\} \to \mathbb{C}$ *definujeme předpisem*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} s^{z-1} e^{-s} ds.$$

Poznámka. *Pro $z \in \mathbb{C}$ s $\mathcal{R}e(z) > 0$ platí $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.*

Lemma (Objem jednotkové koule)**.** *Pro $d \in \mathbb{N}$ platí*

$$\alpha_d := \lambda^d(U(0,1)) = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}.$$

Důkaz. Plyne z integrálu

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp(-|x|^2)\,dx.$$

□

Definice. *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Rovnici $-\Delta u = 0$ pro neznámou funkci $u : \Omega \to \mathbb{R}$ nazveme Laplaceovou rovnicí. Rovnici $-\Delta u = f$ pro neznámou funkci $u : \Omega \to \mathbb{R}$ nazveme Poissonovou rovnicí.*

Fundamentální řešení Laplaceovy rovnice získáme integrací fundamentálního řešení rovnice vedení tepla podle času t. ??? Vysvětlit proč ??? Platí

$$\int_0^{+\infty} G(t,x)dt = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \int_0^{+\infty} t^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\,dt = \frac{|x|^{2-d}}{d(d-2)\alpha_d}.$$

Definice. *Funkci definovanou pro $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ předpisem*

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\lg(|x|), & \textit{pro } d = 2, \\ \dfrac{|x|^{2-d}}{d(d-2)\alpha_d}, & \textit{pro } d \in \mathbb{N},\ d > 2, \end{cases}$$

nazveme fundamentání řešení Laplaceovy rovnice.

Lemma. *Buď $R > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak $\int_{U(0,R)} |x|^\alpha d\lambda^d(x) < +\infty$, právě když $\alpha > -d$.*

Věta 34 (Vlastnosti fundamentálního řešení Laplaceovy rovnice)**.** *Fundamentální řešení Laplaceovy rovnice splňuje 1) $\Phi, \nabla\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, 2) $-\Delta\Phi = 0$ v $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, 3) pro všechny $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ platí $-\int_{\mathbb{R}^d} \Phi\Delta\varphi = \varphi(0)$.*

Důkaz. 1) Hladkost Φ je jasná. Integrovatelnost Φ a $\nabla\Phi$ plyne z předchozího lemmatu.

2) Tato rovnost je cvičení na parciální derivace.

3) Tato identita plyne z následující věty. □

Věta 35 (Věta o třech potenciálech)**.** *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, omezená s C^1 hranicí, $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Pro pevné $x \in \Omega$ a $y \in \mathbb{R}^d \setminus \{x\}$ definujme $\Phi_x(y) = \Phi(y - x)$. Pak pro každé $x \in \Omega$ platí*

$$u(x) = \int_\Omega -\Delta u \Phi_x\,d\lambda + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\Phi_x\,dS - \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial \Phi_x}{\partial \nu}\,dS. \tag{5.1}$$

Důkaz. Důkaz provedeme pro $d > 2$. Pro $d = 2$ se postupuje obdobně. Chceme použít druhou Greenovu identitu 19 na u a Φ_x. Přímo to není možné, kvůli singularitě Φ_x v x. Proto z Ω vyřízneme malou kouli. Buď tedy $\rho \in (0, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega))$. Definujeme $\Omega_\rho := \Omega \setminus \overline{U}(x,\rho)$. Na této množině už je možné Greenovu identitu na u a Φ_x použít. Dostaneme

$$I_\rho + II_\rho := \int_{\Omega_\rho} \Delta u \Phi_x - u\Delta\Phi_x\,d\lambda = \int_{\partial\Omega_\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu}\Phi_x - u\frac{\partial \Phi_x}{\partial \nu}\,dS =: III_\rho + IV_\rho. \tag{5.2}$$

Z Věty 34, 2) dostaneme hned $II_\rho = 0$. V ostatních členech přejdeme k limitě $\rho \to 0+$. Začneme s výrazem I_ρ. Chceme použít Lebesgueovu větu. Zřejmě platí $\Delta u \Phi_x \chi_{\Omega \setminus U(0,\rho)} \to \Delta u \Phi_x$ s.v. na Ω. Integrovatelná majoranta nezávislá na $\rho > 0$ je funkce $\|\Delta u\|_{L^\infty(\Omega)} \Phi_x$, viz opět Věta 34. Podle Lebesgueovy věty tedy platí $I_\rho \to \int_\Omega \Delta u \Phi_x$ pro $\rho \to 0+$. Dále si uvědomíme, že $\partial \Omega_\rho = \partial \Omega \cup \partial U^c(x,\rho)$ a pro $y \in \partial U^c(x,\rho)$ platí $\Phi_x(y) = \rho^{2-d}/(d(d-2)\alpha_d)$. Odhadneme

$$|\int_{\partial U^c(x,\rho)} \frac{\partial u}{\partial \nu} \Phi_x dS| \leq \frac{\rho}{d-2} \|\nabla u\|_\infty \to 0, \quad \text{pro } \rho \to 0+.$$

Platí tedy

$$III_\rho \to \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \Phi_x \, dS \quad \text{pro } \rho \to 0+.$$

Konečně pro $y \in \partial U^c(x,\rho)$ spočítáme

$$\nu(y) = \frac{x-y}{|x-y|}, \quad \nabla \Phi_x(y) = -\frac{1}{d\alpha_d} \frac{y-x}{|y-x|^d}, \quad \frac{\partial \Phi_x}{\partial \nu}(y) = \frac{1}{d\alpha_d} \frac{1}{|y-x|^{d-1}} = (\int_{\partial U^c(x,\rho)} 1 \, dS)^{-1}. \tag{5.3}$$

Z předešlého a ze spojitosti u v bodě x dostáváme

$$IV_\rho = -\int_{\partial \Omega} u \frac{\partial \Phi_x}{\partial \nu} \, dS - \fint_{\partial U^c(x,\rho)} u \, dS \to -\int_{\partial \Omega} u \frac{\partial \Phi_x}{\partial \nu} \, dS - u(x) \quad \text{pro } \rho \to 0+.$$

Limitní přechod k $\rho \to 0+$ v (5.2) a přeuspořádání členů v získané rovnosti dává (5.1). □

.... konec přednášky 12, 17.12.2021

Značení. *Pro $x \in \mathbb{R}^d$ definujeme funkci $\Phi_x : \mathbb{R}^d \setminus \{x\} \to \mathbb{R}$ předpisem $\Phi_x(y) = \Phi(y-x)$ pro $y \in \mathbb{R}^d \setminus \{x\}$.*

Definice. *Buď $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Řekneme, že $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ klasické řešení Poissonovy rovnice s pravou stranou f na $\mathbb{R}^d$, pokud $u \in C^2(\mathbb{R}^d)$ a platí $-\Delta u = f$ na $\mathbb{R}^d$.*

Věta 36 ([Evans, 2010], Sekce 2.2, Theorem 1)**.** *Buď $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Pak funkce $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definovaná pro $x \in \mathbb{R}^d$ předpisem*

$$u(x) = \int_{R^d} f(y)\Phi(x-y) \, d\lambda(y) = \int_{R^d} f(x-y)\Phi(y) \, d\lambda(y)$$

je klasické řešení Poissonovy rovnice s pravou stranou f na $\mathbb{R}^d$.

Důkaz. Regularita plyne z Věty o derivování Lebesgueova integrálu podle parametru. Splnění rovnice je důsledkem Věty 35. □

Definice (Harmonické funkce)**.** *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ neprázdná otevřená množina. Řekneme, že $u : \Omega \to \mathbb{R}$ je* harmonická *v Ω (píšeme $u \in \mathcal{H}(\Omega)$), pokud $u \in C^2(\Omega)$ a $\Delta u(x) = 0$ pro všechna $x \in \Omega$ (tj. u bodově řeší Laplaceovu rovnici v Ω v klasickém slova smyslu).*

Příklad. *Buď $a \in \mathbb{R}^d$, $b \in \mathbb{R}$. Funkce $u(x) = a \cdot x + b$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ jsou harmonické na $\mathbb{R}^d$.*

Funkce definovaná $u(x) = x_1 x_2$ pro $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ je harmonická na $\mathbb{R}^d$.

Funkce Φ je harmonická na $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

Buď $x \in \mathbb{R}^d$. Funkce Φ_x je harmonická na $\mathbb{R}^d \setminus \{x\}$.

Věta 37 (Věta o průměru)**.** *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ neprázdná otevřená množina, $u \in \mathcal{H}(\Omega)$. Pro každou kouli $U := U(x,r)$ takovou, že $\overline{U} \subset \Omega$, platí*

$$u(x) = \fint_{\partial U} u \, dS = \fint_U u \, d\lambda. \tag{5.4}$$

Důkaz. Důkaz provedeme pro $d > 2$, případ $d = 2$ lze dokázat analogicky. Jelikož je funkce u harmonická, dostáváme z Věty 35 (při zachování značení z této věty)

$$u(x) = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu} \Phi_x \, dS - \int_{\partial U} u \frac{\partial \Phi_x}{\partial \nu} \, dS =: I + II. \tag{5.5}$$

Funkce Φ_x je na ∂U konstantní. Označíme tuto hodnotu Φ_0 a spočítáme I pomocí Věty 18

$$I = \Phi_0 \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS = \int_U \Delta u \, d\lambda = 0.$$

Podobně jako v důkazu Věty 35, viz (5.3), spočítáme, že na ∂U je

$$\frac{\partial \Phi_x}{\partial \nu} = -(\int_{\partial U} 1 \, dS)^{-1}.$$

Dosazením tohoto vztahu do (5.5) dostaneme tvrzení o sférickém průměru.

Dále počítáme pomocí Lemmatu 21 a pomocí již dokázané rovnosti pro $r > 0$ taková, že $\overline{U}(x, r) \subset \Omega$

$$\partial_r (\int_{U(x,r)} u \, d\lambda - \alpha_d r^d u(x)) = \int_{\partial U(x,r)} u \, dS - d\alpha_d r^{d-1} u(x) = 0.$$

Jelikož je $\lim_{r \to 0+} \int_{U(x,r)} u \, d\lambda - \alpha_d r^d u(x) = 0$, musí platit $\int_{U(x,r)} u \, d\lambda - \alpha_d r^d u(x) = 0$, pokud $\overline{U}(x, r) \subset \Omega$. □

Věta 38 (Silný princip maxima)**.** *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ neprázdná, otevřená a souvislá množina, $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ a existuje $x_0 \in \Omega$ takové, že u nabývá v bodě x_0 svého (i neostrého) globálního extrému. Pak je u na Ω konstantní a v Ω platí $u = u(x_0)$.*

Důkaz. Označme $U = \{x \in \Omega; u(x) = u(x_0)\}$. Množina U je zjevně uzavřená v Ω. Ukážeme, že tato množina je i otevřená. Ze souvislosti množiny Ω pak hned dostaneme $U = \Omega$. Volme tedy bod $x \in U$. Bod x je bodem maxima funkce u. Existuje tedy $r > 0$ takové, že $u \leq u(x)$ na $U(x, r)$. Z Věty o průměru 37 dostáváme

$$0 = u(x) - \fint_{U(x,r)} u \, d\lambda = \fint_{U(x,r)} (u(x) - u(y)) \, d\lambda(y).$$

Protože pro $y \in U(x, r)$ platí $u(x) - u(y) \geq 0$ musí pro tato y platit $u(x) = u(y)$ a tedy $U(x, r) \subset U$. Množina U je tedy otevřená. □

Definice (Dirichletova úloha pro Laplace-Poissonovu rovnici)**.** *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ neprázdná, otevřená množina. Buďte dále $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ a $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Řekneme, že u je klasickým řešením Dirichletovy úlohy pro Laplace-Poissonovu rovnici (s daty g, f) v Ω, pokud 1) $u \in C^2(\Omega) \cup C(\overline{\Omega})$, 2) $-\Delta u = f$ v Ω, 3) $u = g$ na $\partial\Omega$.*

Věta 39. *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ neprázdná, otevřená a omezená množina. Buďte dále $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ a $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Klasické řešení Dirichletovy úlohy pro Laplace-Poissonovu rovnici s daty g, f v Ω je určené jednoznačně.*

Důkaz. Ať jsou u, v dvě klasická řešení Dirichletovy úlohy pro Laplace-Poissonovu rovnici s daty φ, f v Ω. Pak funkce $w := u - v$ splňuje $w \in C(\overline{\Omega})$. Nabývá tedy v $\overline{\Omega}$ svého maxima i minima. Pokud nabývá svého maxima i minima na $\partial\Omega$, je $w = 0$ na Ω a tedy $u = v$ na Ω. Dále víme, že $w \in \mathcal{H}(\Omega)$. Pokud w nabývá svého maxima v Ω, plyne z Věty 38, že je w konstantní na Ω. Protože je $w \in \overline{\Omega}$ a $w = 0$ na $\partial\Omega$, musí být opět $w = 0$ na Ω. Podobně se postupuje také v případě, že w nabývá svého minima v Ω. □

Definice (Greenova funkce)**.** *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, omezená s C^1 hranicí. Předpokládejme, že pro každé $x \in \Omega$ existuje funkce Ψ_x, řešení problému 1) $\Psi_x \in C(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{H}(\Omega)$, 2) $\Psi_x = \Phi_x$ na $\partial\Omega$. Funkci $G : \Omega^2 \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem $G(x, y) = \Phi_x(y) - \Psi_x(y)$ pro $x, y \in \Omega$ nazveme Greenovou funkcí Laplaceovy-Poissonovy úlohy na Ω.*

Věta 40 (Reprezentace řešení Laplaceovy-Poissonovy rovnice pomocí Greenovy funkce)**.** *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, omezená s C^1 hranicí. Předpokládejme, že existuje Greenova funkce Laplaceovy-Poissonovy úlohy na Ω. Buď $f \in C^2(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega)$, $u \in C^2(\overline{\Omega})$ klasické řešení Dirichletovy úlohy pro Laplace-Poissonovu rovnici (s daty φ, f) v Ω. Pak pro $x \in \Omega$ platí*

$$u(x) = \int_\Omega f(y)G(x,y)\,d\lambda(y) - \int_{\partial\Omega} g(y)\nabla_y G(x,y) \cdot \nu(y)\,dS(y).$$

Důsledek. *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, omezená s C^1 hranicí. Předpokládejme, že existuje Greenova funkce Laplaceovy-Poissonovy úlohy na Ω. Pak pro $x \in \Omega$ platí*

$$1 = -\int_{\partial\Omega} \nabla_y G(x,y) \cdot \nu(y)\,dS(y).$$

Věta 41. *Buď $R > 0$, $\Omega = U(0,R)$. Greenova funkce Laplaceovy-Poissonovy úlohy na Ω je definována předpisem*

$$G(x,y) = \frac{1}{(d-2)d\alpha_d}\left[|y-x|^{2-d} - \left(\frac{|x|}{R}\right)^{2-d}|y - \frac{R^2}{|x|}x|^{2-d}\right] \quad \text{pro } x, y \in \Omega.$$

Navíc platí

$$-\nabla_y G(x,y) \cdot \nu(y) = \frac{1}{R}\frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^d}.$$

Věta 42. *Buď $R > 0$, $g \in C(\partial U(0,R))$. Definujme*

$$u(x) = \begin{cases} g(x), & \text{pro } x \in \partial U(0,R), \\ \dfrac{1}{d\alpha_d}\dfrac{1}{R}\displaystyle\int_{\partial U(0,R)} g(y)\frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^d}\,dS(y), & \text{pro } x \in U(0,R). \end{cases}$$

Pak je u klasické řešení Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu Poissonovu rovnici s daty g a $f = 0$ v $U(0,R)$.

6 Cvičení

Poslední změna: 16.12.2021 22:25:18

1 Skutečný průběh cvičení.

1.1 1.10.

Značení, korektnost podle Hadamarda

Zde něco chybí.

1.2 26.11.

1. Buď $l > 0$, $u_0 : [0, l] \to \mathbb{R}$. Najděte pomocí Fourierovy metody rozdělení proměnných kandidáta na řešení problému

$$\partial_t u - \partial_x^2 u = 0, \qquad \text{v } (0, +\infty) \times (0, l), \tag{6.1}$$

$$u = u_0, \qquad \text{v } \{0\} \times [0, l], \tag{6.2}$$

$$u = 0, \qquad \text{v } [0, +\infty) \times \{0, l\}. \tag{6.3}$$

Ukažte, že, je-li $u_0 \in L^1(0, l)$, splňuje kandidát na řešení $u \in C^\infty((0, +\infty) \times [0, l])$. Ukažte, že kandidát splňuje rovnici (6.1) a (6.2).

Ukažte, že, je-li $u_0 \in C^1([0, l])$ a $u_0(0) = u_0(l) = 0$, je $u \in C([0, +\infty) \times [0, l])$ a platí rovnice (6.3).

1.3 3.12.

2. Rozmyslete si, že v úloze ze Sekce 1.2 je možné oslabit předpoklady na $u_0 \in C^{0,1}([0, l])$, $u_0(0) = u_0(l) = 0$. **3.** V úloze ze Sekce 1.2 položte $u_0(x) = \min(x, l - x)$ pro $x \in (0, l)$ a spočtěte řešení. **4.** V úloze ze Sekce 1.2 položte $l = \pi$ a $u_0(x) = \sin(x) + 3\sin(3x)$ pro $x \in (0, \pi)$ a spočtěte řešení.

5. Buď $f : (0, +\infty) \times (0, l) \to \mathbb{R}$. Najděte kandidáta na řešení problému

$$\partial_t u - \partial_x^2 u = f, \qquad \text{v } (0, +\infty) \times (0, l), \tag{6.4}$$

$$u = 0, \qquad \text{v } \{0\} \times [0, l], \tag{6.5}$$

$$u = 0, \qquad \text{v } [0, +\infty) \times \{0, l\}. \tag{6.6}$$

Ukažte, že, je-li $f \in C^2([0, +\infty) \times [0, l]) \cap L^\infty([0, +\infty) \times [0, l])$, $f = f'' = 0$ v $[0, +\infty) \times \{0, l\}$, je $u \in C^2([0, +\infty) \times [0, l])$ a splňuje (6.4), (6.5) and (6.6).

6. Buď $u_0 : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f : (0, +\infty)^2 \to \mathbb{R}$. Najděte kandidáta na řešení problému

$$\partial_t u - \partial_x^2 u = 0, \qquad \text{v } (0, +\infty) \times (0, +\infty), \tag{6.7}$$

$$u = u_0, \qquad \text{v } \{0\} \times [0, +\infty], \tag{6.8}$$

$$u = 0, \qquad \text{v } [0, +\infty) \times \{0\}. \tag{6.9}$$

Ukažte, že, je-li $u_0 \in L^1(0, +\infty)$ a $f = 0$, splňuje kandidát na řešení $u \in C^\infty((0, +\infty) \times [0, +\infty))$. Ukažte, že kandidát splňuje rovnici (6.7) a (6.8).

Ukažte, že, je-li $u_0 \in C^1([0, +\infty)) \cap L^\infty([0, +\infty))$, $f = 0$ a $u_0(0) = 0$, je $u \in C([0, +\infty) \times [0, +\infty))$ a platí rovnice (6.9).

Ukažte, že, je-li $u_0 = 0$ a $f \in C^2([0,+\infty)^2) \cap L^\infty([0,+\infty)^2)$, $f = f'' = 0$ v $[0,+\infty) \times \{0\}$, je $u \in C^2([0,+\infty)^2)$ a splňuje (6.7), (6.8) and (6.9).

1.4 10.12.

1.5 17.12.

2 Příklady na cvičení.

2.1 Notace

7. Spočtěte Δu a $D(\Delta u)$, je-li $u(x) = |x|^{2-d}$ pro $x \in \mathbb{R}^d$, $d > 2$. Spočtěte Δu a $D(\Delta u)$, je-li $u(x) = \lg(|x|)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$, $d = 2$

Výsledek:

$D(\Delta u) = D(u) = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $\Delta u = 0$

8. Spočtěte $\partial_t u - \Delta u$ a $D(\partial_t - \Delta u)$, je-li $u(t,x) = (4t)^{-d/2} \exp(-|x|^2/4t)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ a $t > 0$.

Výsledek:

$\partial_t u - \Delta u = 0$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ a $t > 0$.

9. Spočtěte $\partial_t^2 u - \Delta u$, je-li $u(t,x) = \chi_{(0,+\infty)}(ct - |x|)/\sqrt{(ct)^2 - |x|^2}$ pro $x \in \mathbb{R}^2$ a $t > 0$.

Výsledek:

$D(\partial_t^2 u - \Delta u) = (0,+\infty) \times \mathbb{R}^2 \setminus \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2; ct = |x|\}$, $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$.

2.2 Korektnost podle Hadamarda

10. Buď $c \in \mathbb{R}$. Ukažte, že $u(t,x) := ct$ pro $t, x \in \mathbb{R}$ řeší úlohu $\partial_t^2 u \pm \partial_x^2 u = 0$ s počáteční podmínkou $u(0,x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}$.

11. Buď $n \in \mathbb{N}$. Ukažte, že $u(t,x) := \exp(-\sqrt{n}) \cos(nx) \sinh(nt)/n$ pro $t, x \in \mathbb{R}$ řeší úlohu $\partial_t^2 u + \partial_x^2 u = 0$ s počáteční podmínkou $u(0,x) = 0$, $\partial_t u(0,x) = \exp(-\sqrt{n}) \cos(nx)$ pro $x \in \mathbb{R}$. Zkoumejte chování $u(0,\cdot)$ a $u(1,\cdot)$ pro $n \to +\infty$.

12. Uvažte úlohu z předchozího příkladu na $(0,+\infty) \times (-\pi/2, \pi/2)$ navíc s okrajovou podmínkou $u(t, \pm\pi/2) = 0$ pro $t > 0$. Ukažte, že není dobře zadaná např. v prostorech L^∞ nebo C.

13. Najděte řešení rovnice $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$ na $(0,+\infty) \times \mathbb{R}$ s počáteční podmínkou $u(0,x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Výsledek:

$u = 0$

14. Najděte netriviální řešení předchozí úlohy, viz [Tichonov, 1935].

- Zvolte $\alpha \in (1,2)$, definujte $A_n = [\alpha n + 1]!$ a ukažte, že řada $\sum_{n=0}^{+\infty} 1/\sqrt[n]{A_n}$ konverguje.

- Podle důkazu na straně 63 knihy [Carleman, 1926] existuje nenulová $F \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ taková, že pro všechna $n \in \{0, \dots\}$ a pro všechna $t \in \mathbb{R}$ platí $F^{(n)}(0) = 0$ a $|F^{(n)}(t)| \le A_n$.
- Definujte $u(t,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F^{(n)}(t)x^{2n}/(2n)!$ a ukažte, že tato řada spolu se všemi jejími formálními derivacemi konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}^2$ a tedy $u \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$.
- Ukažte, že funkce u řeší zadanou rovnici i počáteční podmínku a je netriviální.

2.3 Lineární a kvazilineární PDR 1. řádu

Nalezněte charakteristiky a (metodou charakteristik) řešení následujících rovnic:

15. $u_x = 6x^2 u_y$.

Výsledek:

$u(x,y) = F(2x^3 + y)$, kde F je libovolná hladká funkce. **16.** $u_t + au_x = 0$, $u(x,0) = \sin x$, $(a \neq 0)$.

Výsledek:

$u(x,t) = \sin(x - at)$. **17.** $u_t + xu_x + tu = 0$, $u(x,0) = \sin x$.

Výsledek:

$u(x,t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \sin(xe^{-t})$. **18.** $(z + y - x)u_x + (z + x - y)u_y + zu_z = 0$.

Výsledek:

$u(x,y,z) = \Phi(x + y - 2z, z^2(x - y))$, kde Φ je libovolná hladká funkce dvou proměnných.

19. Odvoďte, že řešení Cauchyovy úlohy $u_t + au_x = 0$, $u(x,0) = \varphi(x)$, $(a \neq 0)$ je toto: $u(x,t) = \varphi(x - at)$ ještě jinak, než metodou charakteristik.

Návod:

Nalezněte charakteristiky a (metodou charakteristik) řešení následujících rovnic:

20. $u_x + yu_y = 0$, $u(0,y) = \frac{1}{y}$.

Výsledek:

$u(x,y) = e^x/y$. **21.** $u_t + uu_x = 0$, $u(x,0) = \varphi(x)$, kde

1. $\varphi(x) = 0$ pro $x \le 0$, $\varphi(x) = x$ pro $x > 0$,
2. $\varphi(x) = -x$ pro $x \le 0$, $\varphi(x) = 0$ pro $x > 0$.
3. $\varphi(x) = 0$ pro $x \le 0$, $\varphi(x) = 1$ pro $x \ge 1$, φ spojitá a po částech afinní funkce.
4. $\varphi(x) = 1$ pro $x \le 0$, $\varphi(x) = 0$ pro $x \ge 1$, φ spojitá a po částech afinní funkce.
5. $\varphi(x) = \sin x$.

Výsledek:

Protože pro tuto rovnici mají charakteristiky, vycházející z bodu $[x_0, 0]$, směrnici $1/\varphi(x_0)$ (spočtěte si to!), lze odtud odvodit, že v prvních třech případech existuje globální klasické řešení, zatímco v dalších dvou je klasické řešení definováno pouze lokálně. **22.** $xzz_x + yzz_y = x^2 + y^2 + z^2$, $z(1,y) = y^2$.

Výsledek:

$u(x,y) = 2(x^2+y^2)\ln x - \frac{y^4}{x^2}$.

23.* Metodou charakteristik řešte následující úlohu[5] pro neznámou funkci $w = w(y,t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{M\sigma}{\sigma - y - sw}\Big(1 + sd\frac{\partial w}{\partial y}\Big), \quad y \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ w(y,0) &= 0, \quad y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

M, σ, s, d jsou kladné (známé) konstanty. Uvažujte $|y| < \sigma$ a $t > 0$ dostatečně malé.

Návod:

Výsledek:

$w(y,t) = \frac{1}{s(d+1)}\big(\sigma - y - \sqrt{(\sigma-y)^2 - 2s(d+1)M\sigma t}\,\big)$.

24. Nalezněte řešení systému rovnic

$$U_t(x,t) + A\cdot U_x(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{6.10}$$

$$U(x,0) = F(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{6.11}$$

kde $A = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$, a $f(x)$, $g(x)$ jsou dané funkce.

Návod:

25. Pro obecný systém s rovnic tvaru (6.10) ukažte, že pokud A je konstantní $s \times s$ diagonalizovatelná matice, lze postup z předchozího případu vždy použít a nalézt řešení takového systému. Připomeňte si, že matice mající různá reálná vlastní čísla je diagonalizovatelná.

2.4 Kanonický tvar lineárních PDR 2. řádu ve dvou proměnných

Určete typ PDR, převeďte ji do kanonického tvaru a načrtněte reálné charakteristiky. **26.** $u_{xx} - yu_{yy} = 0$ **27.** $xu_{xx} - 2\sqrt{xy}u_{xy} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0$, $x, y > 0$ **28.** $2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 4u_x + 4u_y + u = 0$

2.5 Řešení lineárních rovnic 2. řádu ve dvou proměnných

29. Nechť $u \in C^2(\mathbb{R})$ je řešením rovnice $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = 0$ s $a \neq 0$. Dokažte, že je-li tato rovnice parabolická, pak existují funkce $F, G \in C^2(\mathbb{R})$ takové, že $u(x,y) = F(mx+y) + xG(mx+y)$, kde $m = -b/a$. **Varianta 4.** Ať $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ a $u \in C^2(\mathbb{R})$ řeší rovnici $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = 0$ v $\mathbb{R}^2$. Ať $f \in C^2(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R})$ a u řeší počáteční podmínku $u(x,0) = f(x)$, $u_y(x,0) = g(x)$ pro $x \in \mathbb{R}$. Označme $\Delta = b^2 - ac$ a předpokládejme $\Delta > 0$. Označme $\phi_x = -(b + \sqrt{\Delta})/a$ a $\psi_x = -(b - \sqrt{\Delta})/a$ a předpokládejme $\phi_x, \psi_x \neq 0$. Pak

$$u(x,y) = \frac{1}{\phi_x - \psi_x}(\phi_x f(x + \frac{y}{\phi_x}) - \psi_x f(x + \frac{y}{\psi_x})) + \frac{\phi_x\psi_x}{\psi_x - \phi_x}\int_{x+\frac{y}{\psi_x}}^{x+\frac{y}{\phi_x}} g(s)\,\mathrm{d}s. \tag{6.12}$$

Náznak důkazu: charakteristické rovnice jsou $y'(x) = (b \pm \sqrt{\Delta})/a$ a charakteristiky tedy $y(x) = \phi_x x + c$ a $y(x) = \psi_x x + c$ pro $c \in \mathbb{R}$. Transformaci souřadnic zvolíme $\phi(x,y) = y + \phi_x x), \psi(x,y) = y + \psi_x x$. Po transformaci $U(\phi(x,y), \psi(x,y)) = u(x,y)$ dostáváme rovnici $U_{\xi\eta} = 0$ a po vyřešení $U(\xi,\eta) = G(\xi/\phi_x) + F(\eta/\psi_x)$ a $u(x,y) = G(x + y/\phi_x) + F(x + y/\psi_x)$.

[5] Výsledek této úlohy se uplatní v důkaze věty Cauchyho-Kowalevské .

Pro dopočtení tvaru řešení využijeme linearity rovnice a příklad rozdělíme na dva případy. Předpokládejme na chvíli, že $g = 0$ na $\mathbb{R}$. Po dosazení do počáteční podmínky dostáváme rovnice

$$G'(x) + F'(x) = f'(x), \quad \frac{1}{\phi_x}G'(x) + \frac{1}{\psi_x}F'(x) = 0,$$

tedy $F(x) = \frac{\psi_x}{\psi_x - \phi_x} f(x) + c$ a $G(x) = \frac{\phi_x}{\phi_x - \psi_x} f(x) + d$ pro vhodné $c, d \in \mathbb{R}$. Dohromady

$$u(x,y) = \frac{1}{\phi_x - \psi_x}(\phi_x f(x + \frac{y}{\phi_x}) - \psi_x f(x + \frac{y}{\psi_x})),$$

což je první část vzorce (6.12). Fakt, že $c + d = 0$ plyne z počáteční podmínky pro u.

Je-li $f = 0$ dostáváme po dosazení do počáteční podmínky rovnice

$$G'(x) + F'(x) = 0, \quad \frac{1}{\phi_x}G'(x) + \frac{1}{\psi_x}F'(x) = g(x),$$

tedy

$$G(x) = \int_0^x g(s)\,\mathrm{d}s \frac{\psi_x \phi_x}{\psi_x - \phi_x} + c, \quad F(x) = \int_0^x g(s)\,\mathrm{d}s \frac{\psi_x \phi_x}{\phi_x - \psi_x} + d,$$

kde $c, d \in \mathbb{R}$ jsou vhodně zvoleny. Po dosazení do spočteného tvaru řešení a počátečních podmínek dostáváme

$$u(x,y) = \frac{\phi_x \psi_x}{\psi_x - \phi_x} \int_{x + \frac{y}{\psi_x}}^{x + \frac{y}{\phi_x}} g(s)\,\mathrm{d}s,$$

což je druhá část (6.12).

Nalezněte řešení Cauchyovy úlohy **30.** $4y^2 u_{xx} + 2(1 - y^2)u_{xy} - u_{yy} - \frac{2y}{1+y^2}(2u_x - u_y) = 0$ v $\mathbb{R}^2$, $u(x,0) = f(x)$ a $u_y(x,0) = g(x)$ pro $x \in \mathbb{R}$, kde $f \in C^2(\mathbb{R})$ a $g \in C^1(\mathbb{R})$ jsou zadané funkce. **31.** $u_{xx} - 2\sin(x)u_{xy} - (3 + \cos^2(x))u_{yy} + u_x + (2 - \sin(x) - \cos(x))u_y = 0$ v $\mathbb{R}^2$, $u(x, \cos(x)) = 0$, $u_y(x, \cos(x)) = e^{-x/2}\cos(x)$ pro $x \in \mathbb{R}$. **32.** $u_{xx} + 2\cos(x)u_{xy} - \sin^2(x)u_{yy} - \sin(x)u_y = 0$ v $\mathbb{R}^2$, $u(x, \sin(x)) = x + \cos(x)$, $u_y(x, \sin(x)) = \sin(x)$ pro $x \in \mathbb{R}$. **33.** $(1 - \cos(y))u_{xx} + \cos(y)u_{xy} - u_{yy} - \frac{\sin(y)}{2 - \cos(y)}(u_x - u_y) = 0$ v $\mathbb{R}^2$, $u(x,0) = 2x$, $u_y(x,0) = 1$ pro $x \in \mathbb{R}$. **34.** $2u_{xx} + 2u_{xy} - 4u_{yy} - 3u_x + 3u_y = 0$ v $\mathbb{R}^2$, $u(x,0) = 2e^{\frac{x}{2}}$, $u_y(x,0) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}$. **35.** $u_{tt} - a^2 u_{xx} = |x|$ v $\mathbb{R}^2$, $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}$. Ukažte, že $u \notin C^3(\mathbb{R}^2)$. **36.** Buď $a > 0$, $f(x,t) = at$ pro $x \leq at$ a $f(x,t) = x$ pro $x > at$. Ukažte, že Cauchyova úloha $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f$ v $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$, $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}$ nemá řešení $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, +\infty)$.

2.6 Klasifikace PDR 2. řádu s konstantními koeficienty v $\mathbb{R}^n$

Určete kanonický tvar a typ rovnice **37.** $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 6u_{zz} = 0$, $u = u(x,y,z)$ **38.** $4u_{xx} - 4u_{xy} - 2u_{yz} + u_y + u_z = 0$, **39.** $u_{xy} - u_{xz} + u_x + u_y - u_z = 0$, **40.** $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 2u_{yz} + 2u_{yt} + 2u_{zz} + 3u_{tt} = 0$, **41.** $\partial_1^2 u + 2\sum_{k=2}^n \partial_k \partial_k u - 2\sum_{k=1}^{n-1} \partial_k \partial_{k+1} u = 0$ **42.** $\partial_1^2 - 2\sum_{k=2}^n (-1)^k \partial_{k-1}\partial_k u = 0$,

2.7 Charakteristiky

Buď $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$, $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\Phi \in C^m(U(\overline{x}))$, $\Phi(\overline{x}) = 0$, $\partial_n \Phi(\overline{x}) \neq 0$, $Lu = \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x) D^\alpha u + b$, kde $A_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{N \times N}$, $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$.

43. Ukažte, že plocha $S = \{x \in \mathbb{R}^n; \Phi(x) = 0\}$ je charakteristická v bodě $\overline{x}$ právě tehdy, když

$$\det(\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(\overline{x})(\nabla\Phi)^\alpha(\overline{x})) = 0.$$

Ukažte, že plocha $S = \{x \in \mathbb{R}^n; \Phi(x) = 0\}$ je charakteristická právě tehdy, když pro každé $\overline{x} \in S$ platí

$$\det\Big(\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(\overline{x})(\nabla\Phi)^\alpha(\overline{x})\Big) = 0.$$

44. Ať $Lu = \sum_{\alpha=1}^n A_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}$. Určete podmínku pro charakteristickou plochu. Buď navíc $N = 1$. Jak charakteristická plocha souvisí s charakteristickou křivkou rovnice $Lu = 0$?

Charakterizujte charakteristické plochy pro rovnice **45.** $\Delta u = 0$, kde $\Delta = \sum_{k=1}^n \partial^2_{x_\alpha}$ **46.** $\partial_t u - \Delta u = 0$ **47.** $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$

48. Uvažme systém pro neznámé funkce (u, v, w) proměnných (x, y)

$$\begin{aligned} \partial_x u &= v \\ \partial_y u &= w \\ \partial_x v + \partial_y w &= 0 \end{aligned}$$

Jedná se o Laplaceovu rovnici přepsanou jako systém. Chtěli bychom tedy, aby tento systém byl eliptický. Pokud bychom jako jeho hlavní část zvolili pouze členy nejvyššího řádu

$$L^p(\xi) = \begin{pmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ \partial_y & 0 & 0 \\ 0 & \partial_x & \partial_y \end{pmatrix}$$

dostali bychom $\det L^p(\xi) = 0$. Budeme postupovat podle [M. Renardy, 1993, Sekce 2.1.3]. Každému sloupci přiřadíme celá čísla t_j a každému řádku celá čísla s_j tak, aby řád diferenciálního operátoru ve sloupci j a řádku k byl menší nebo roven $t_j + s_k$. Za hlavní část vezmeme pouze tu část diferenciálního operátoru, která má řád $t_j + s_k$. Čísla volíme tak, aby $\det L^p(i\xi)$ nebyl identicky roven 0. Najděte t_j a s_k a ukažte, že poté je systém eliptický, tj. neexistují netriviální vlastní směry.

49. Stokesův systém v $\mathbb{R}^3$ má tvar $-\Delta u + \nabla p = 0$, $\operatorname{div} u = 0$ pro neznámé funkce $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Jak vypadají charakteristické plochy?

2.8 Vlastní čísla druhé derivace

50. Buď $l > 0$ a $\varphi \in C^1([0, l])$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Pak existuje jednoznačně určené rozšíření $\tilde{\varphi}$ definované na $\mathbb{R}$, které je liché vzhledem k bodu 0 a $2l$ periodické. Navíc platí $\tilde{\varphi} \in C^1(\mathbb{R})$ a $\tilde{\varphi}$ je liché vzhledem k bodu l. Je-li $\varphi \in C^2([0, l])$ a $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$, je též $\tilde{\varphi} \in C^2(\mathbb{R})$. Dokažte.

51. Najděte vlastní čísla a funkce druhé derivace na intervalu $(0, l)$ s okrajovou podmínkou $w(0) = 0$, $w(l) = 0$. Tedy najděte $\lambda \in \mathbb{R}$ a $w \in C^2([0, l])$, $w(0) = 0$, $w(l) = 0$, aby platila rovnice $-w'' = \lambda w$ v $(0, l)$.

52. Najděte $\lambda \in \mathbb{R}$ a $w \in C^2([0, l])$, $w(0) = 0$, $w'(l) = 0$, aby platila rovnice $-w'' = \lambda w$ v $(0, l)$.

53. Najděte $\lambda \in \mathbb{R}$ a $w \in C^2([0, l])$, $w'(0) = 0$, $w(l) = 0$, aby platila rovnice $-w'' = \lambda w$ v $(0, l)$.

54. Najděte $\lambda \in \mathbb{R}$ a $w \in C^2([0, l])$, $w'(0) = 0$, $w'(l) = 0$, aby platila rovnice $-w'' = \lambda w$ v $(0, l)$.

2.9 Vlnová rovnice

Buď $a > 0$. V této sekci budeme řešit rovnice

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \quad \text{v } \mathbb{R}^2 \tag{6.13}$$

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f \quad \text{v } \mathbb{R}^2 \tag{6.14}$$

pro neznámou funkci $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

55. Ať $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je konvexní oblast a $u \in C^2(\Omega$ řeší bodově (6.13). Pak existují $P, Q \in C^2(\mathbb{R}^2)$ takové, že $u(x,t) = P(x-at) + Q(x+at)$. Dokažte.

56. Buď dáno $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$. Najděte řešení (6.13) s počáteční podmínkou $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$ pro $x \in \mathbb{R}$. Ukažte, že řešení u je určené jednoznačně a $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

57. Ukažte, že pokud navíc k předpokladům předchozí úlohy existuje $x_0 \in \mathbb{R}$ tak, že pro $x \in \mathbb{R} : \varphi(x_0 + x) = \varphi(x_0 - x), \psi(x_0 + x) = \psi(x_0 - x)$ (φ a ψ jsou sudé kolem bodu x_0) má stejnou vlastnost i řešení u. Speciálně potom platí pro $t \in \mathbb{R}$, že $u_x(x_0, t) = 0$.

58. Ukažte, že pokud navíc k předpokladům předchozí úlohy existuje $x_0 \in \mathbb{R}$ tak, že pro $x \in \mathbb{R}$ platí $\varphi(x_0 + x) = -\varphi(x_0 - x), \psi(x_0 + x) = -\psi(x_0 - x)$ (φ a ψ jsou liché kolem bodu x_0), má stejnou vlastnost i řešení u. Speciálně potom platí pro $t \in \mathbb{R}$, že $u(x_0, t) = 0$.

59. Nechť $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ a uvažme Cauchyův problém (6.14) s počáteční podmínkou $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}$. Výpočtem ukažte, že existuje právě jedno řešení.

60. Je-li navíc funkce f lichá podle bodu $x_0 \in \mathbb{R}$, je též řešení liché podle bodu x_0. Speciálně je pro $t \in \mathbb{R}$ $u(0,t) = 0$.

61. Uvažujme (6.14) s počáteční podmínkou $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$ pro $x \in \mathbb{R}$, kde $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ jsou sudé podle $x_0 \in \mathbb{R}$. Pak řešení je pro všechny $t \in \mathbb{R}$ také sudé podle x_0 a tedy u_x je lichá podle x_0 a tedy $u_x(0,t) = 0$ pro $t \in \mathbb{R}$.

62. Ukažte, že okrajová úloha $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ pro $(x,t) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R} =: \Omega$, $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$ pro $x \in (0, +\infty)$, $u(0,t) = 0$ pro $t \in \mathbb{R}$, kde $\varphi \in C^2([0, +\infty))$, $\psi \in C^1([0, +\infty))$, $\varphi(0) = \psi(0) = \varphi''(0) = 0$ má právě jedno řešení $u \in C^2(\overline{\Omega})$ a odvoďte pro něj vzorec.

63. Ukažte, že okrajová úloha $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ pro $(x,t) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R} =: \Omega$, $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$ pro $x \in (0, +\infty)$, $u_x(0,t) = 0$ pro $t \in \mathbb{R}$, kde $\varphi \in C^2([0, +\infty))$, $\psi \in C^1([0, +\infty))$, $\varphi'(0) = \psi'(0) = 0$ má právě jedno řešení $u \in C^2(\overline{\Omega})$ a odvoďte pro něj vzorec.

64. a) Řešte Fourierovou metodou úlohu $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ pro $(x,t) \in (0,l) \times \mathbb{R} =: \Omega$, $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$ pro $x \in (0,l)$, $u(0,t) = 0$, $u_x(l,t) = 0$ pro $t \in \mathbb{R}$. Určete, za jakých předpokladů na funkce φ, ψ Fourierova řada stejnoměrně konverguje ke klasickému řešení, a sečtěte ji. Jaké jsou nutné a postačující podmínky pro existenci klasického řešení?

b) Pomocí Duhamelova principu řešte úlohu $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f$ pro $(x,t) \in (0,l) \times \mathbb{R} =: \Omega$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$ pro $x \in (0,l)$, $u(0,t) = 0$, $u_x(l,t) = 0$ pro $t \in \mathbb{R}$. Jaké jsou postačující podmínky na funkci f pro existenci klasického řešení?

c) Řešte úlohu $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ pro $(x,t) \in (0,l) \times \mathbb{R} =: \Omega$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$ pro $x \in (0,l)$, $u(0,t) = \alpha_1(t)$, $u_x(l,t) = \alpha_2(t)$ pro $t \in \mathbb{R}$. Jaké jsou postačující podmínky na funkce α_1 a α_2 pro existenci klasického řešení?

d) Speciální případ předešlého. Řešte úlohu $u_{tt} - u_{xx} = 0$ pro $(x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R} =: \Omega$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$ pro $x \in (0,1)$, $u(0,t) = \alpha(t)$, $u_x(1,t) = \beta(t)$ pro $t \in \mathbb{R}$. Jaké jsou postačující podmínky na funkce α a β pro existenci klasického řešení?

Řešení:

Úlohu rozdělím za pomoci linearity problému na dvě: Nejdříve hledám funkci u_1, která řeší: $u_{tt} - u_{xx} = 0$ pro $(x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R} =: \Omega$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$ pro $x \in (0,l)$, $u(0,t) = \alpha(t)$, $u_x(l,t) = 0$ pro $t \in \mathbb{R}$.

Funkci u_1 budu hledat ve tvaru $u_1(x,t) = A(x+t) + A(x-t)$ pro vhodně zvolenou funkci $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Z podmínky

$u_x(l,t) = 0$ vidíme, že A musí být sudé vzhledem k bodu 1, a z $u(0,t) = \alpha(t)$, že pro $x \in (0,1)$ musí platit $\alpha(x) = A(-x)$. Pomocí symetrií určíme celé A. Nejdříve si definujeme

$$\alpha_+(x) = \begin{cases} \alpha(x), & \text{pro } x \geq 0, \\ 0, & \text{jinak} \end{cases} \qquad \alpha_-(x) = \alpha_+(-x), \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Konečně,

$$A(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \alpha_-(x + 2k) - \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \alpha_+(x - 2k).$$

Zřejmě je $u_1(0,t) = A(t) + A(-t) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\alpha_-(t+2k) - \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\alpha_+(t-2k) + \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\alpha_-(-t+2k) - \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\alpha_+(-t-2k) = \alpha_-(t) + \alpha_-(-t) = \alpha(t)$ pro $t > 0$.

Dále je $A(1+x) - A(1-x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\alpha_-(1+x+2k) - \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\alpha_+(1+x-2k) - \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\alpha_-(1-x+2k) - \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\alpha_+(1-x-2k) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\alpha_-(1+x+2k) - \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{k+1}\alpha_+(-1+x-2k) - \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\alpha_-(1-x+2k) + \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{k+1}\alpha_+(-1-x-2k) = 0$.

QED

65. Buď $\mu_1, \mu_2 \in C^2([0,+\infty))$. Řešte úlohu $u_{tt} - a^2u_{xx} = 0$ pro $(x,t) \in (0,l) \times \mathbb{R}$, $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$ pro $x \in (0,l)$, $u(0,t) = \mu_1(t)$, $u(l,t) = \mu_2(t)$ pro $t \in [0,+\infty)$. Proveďte homogenizaci okrajových podmínek a použijte Fourierovu metodu.

66. Řešte Fourierovou metodou úlohu $u_{tt} - a^2u_{xx} = 0$ pro $(x,t) \in (0,l) \times \mathbb{R} =: \Omega$, $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$ pro $x \in (0,l)$, $u_x(0,t) = 0$, $u_x(l,t) = 0$ pro $t \in \mathbb{R}$. Určete, za jakých předpokladů na funkce φ, ψ Fourierova řada stejnoměrně konverguje ke klasickému řešení, a sečtěte ji. Jaké jsou nutné a postačující podmínky pro existenci klasického řešení?

67. Spočtěte řešení Cauchyovy úlohy pro vlnovou rovnici v 1d, je-li $c = 1$, $u_0 = 0$ a $u_1 = \sin^3 \chi_{(2\pi,3\pi)}$.

68. Spočtěte řešení Cauchyovy úlohy pro vlnovou rovnici v 1d, je-li $c = 1$, $u_0 = \sin^3 \chi_{(2\pi,3\pi)}$ a $u_1 = 0$.

69. Za předpokladů Věty 16 sečtěte

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{l} \int_0^l u_0(y) \sin(\frac{n\pi y}{l}) dy \cos(\frac{n\pi c}{l} t) \sin(\frac{n\pi x}{l}).$$

Uvažme Cauchyovu úlohu pro vlnovou rovnici ve 3d. Řešení je dáno Větou 26.

70. Buď $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hladká, sudá funkce s kompaktním nosičem. Položme $u_0(x) = \varphi(|x|)$, $u_1(x) = 0$. Ukažte, že řešení vlnové rovnice definované Kirchhoffovým vzorcem, je sféricky symetrické.

71. Za situace z předchozího příkladu spočtěte hodnoty řešení pro $x = 0$, tj. $u(t,0)$.

72. Spočtěte $u(t,0)$, je-li $\varphi(s) = \exp(-\alpha s^2)$ pro jisté $\alpha \in \mathbb{R}$. Příklad je z [Čihák et al., 2002, Sekce 9.2, 8a].

Uvažme Cauchyovu úlohu pro vlnovou rovnici ve 2d. Řešení je dáno Větou 26.

73. Buď $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hladká, sudá funkce s kompaktním nosičem. Položme $u_0(x) = \varphi(|x|)$, $u_1(x) = 0$. Ukažte, že řešení vlnové rovnice definované Poissonovým vzorcem, je osově symetrické.

74. Za situace z předchozího příkladu spočtěte hodnoty řešení pro $x = 0$, tj. $u(t,0)$.

75. Spočtěte $u(t,0)$, je-li $\varphi(s) = |s|^n$ pro jisté $n \in \mathbb{N}$. Příklad je z [Čihák et al., 2002, Sekce 9.2, 7a].

76. Spočtěte $u(t,0)$, je-li $\varphi(s) = (1 - \cos(\omega s)/s$ pro jisté $\omega > 0$. Příklad je z [Čihák et al., 2002, Sekce 9.2, 7b].

2.10 Vlnová rovnice s nenulovou pravou stranou

77. Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a $\partial_1 f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou spojité. Pak

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^t f(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau = f(t,t) + \int_0^t f_t(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

78. Nechť $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ a $a > 0$. Buď

$$u(x,t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\sigma,\tau)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau.$$

Ukažte, že $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ a že $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f$ v $\mathbb{R}^2$, $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}$.

2.11 Rovnice vedení tepla

79. Buď $G = (a,b) \times (0,T)$, $\Gamma = \partial G \setminus ((a,b) \times \{T\})$. Nechť $u \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$ je řešením rovnice $u_t = a(x,t)u_{xx} + 2b(x,t)u_x + c(x,t)u$ v G, kde $a(x,t) \geq 0$, $c(x,t) \leq 0$ v $x \in G$. Dokažte, že $\max_{\overline{G}} |u| = \max_\Gamma |u|$.

80. Buď $G = (a,b) \times (0,T)$, $\Gamma = \partial G \setminus ((a,b) \times \{T\})$. Nechť $u \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$ je řešením rovnice $u_t = a(x,t)u_{xx} + 2b(x,t)u_x + c(x,t)u$ v G, kde $a(x,t) \geq 0$ v $x \in G$. Dokažte, že $\max_{\overline{G}} |u| = e^{CT} \max_\Gamma |u|$, kde $C = \max\{0, \max_{\overline{G}} c\}$.

81. Najděte pomocí Duhamelova principu řešení úlohy $u_t - a^2 u_{xx} = f$ v $\Omega := \mathbb{R} \times (0,+\infty)$, $u(x,0) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}$, kde $f \in C^2(\overline{\Omega}) \cap L^\infty(\overline{\Omega})$.

82. Řešte Fourierovou metodou úlohu $u_t - a^2 u_{xx} = 0$ pro $(x,t) \in (0,l) \times (0,+\infty)$, $u(x,0) = \varphi(x)$ pro $x \in (0,l)$, $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$ pro $t \in (0,+\infty)$. Speciálně položte $\varphi(x) = \min(x, l-x)$ pro $x \in (0,l)$.

83. Řešte Fourierovou metodou úlohu $u_t - a^2 u_{xx} = 0$ pro $(x,t) \in (0,l) \times (0,+\infty)$, $u(x,0) = \varphi(x)$ pro $x \in (0,l)$, $u_x(0,t) = 0$, $u_x(l,t) = 0$ pro $t \in (0,+\infty)$. Speciálně položte $\varphi(x) = x$ pro $x \in (0,l)$.

84. Řešte Fourierovou metodou úlohu $u_t - a^2 u_{xx} = 0$ pro $(x,t) \in (0,l) \times (0,+\infty)$, $u(x,0) = \varphi(x)$ pro $x \in (0,l)$, $u(0,t) = 0$, $u_x(l,t) = 0$ pro $t \in (0,+\infty)$. Speciálně položte $\varphi(x) = \min(x, l/2)$ pro $x \in (0,l)$.

85. Řešte Fourierovou metodou úlohu $u_t - a^2 u_{xx} = 0$ pro $(x,t) \in (0,l) \times (0,+\infty)$, $u(x,0) = \varphi(x)$ pro $x \in (0,l)$, $u_x(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$ pro $t \in (0,+\infty)$. Speciálně položte $\varphi(x) = x^2 - l^2$ pro $x \in (0,l)$.

86. Řešte Fourierovou metodou úlohu $u_t - a^2 u_{xx} = 0$ pro $(x,t) \in (0,l) \times (0,+\infty)$, $u(x,0) = \varphi(x)$ pro $x \in (0,l)$, $u_x(0,t) = 0$, $K_1 u_x(l,t) + K_2 u(l,t) = 0$ pro $t \in (0,+\infty)$.

87. Řešte Fourierovou metodou úlohu $u_t - a^2 \Delta u = 0$ pro $(x,t) \in G \times (0,+\infty)$, $G = (0,l_1) \times (0,l_2)$, $u(x,0) = \varphi(x)$ pro $x \in G$, $u(x,t) = 0$ pro $x \in \partial G$, $t > 0$.

Reference

[Carleman, 1926] Carleman, T. (1926). *Les fonctions quasi analytiques.* Gauthier-Villars.

[Evans, 2010] Evans, L. C. (2010). *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, second edition.

[Kurzweil, 1978] Kurzweil, J. (1978). *Obyčejné diferenciální rovnice.* TKI, SNTL, Praha.

[M. Renardy, 1993] M. Renardy, R. R. (1993). *An Introduction to Partial Differential Equations.* Springer-Verlag, New York.

[Pick et al., 2019] Pick, L., Hencl, S., Spurný, J., and Zelený, M. (2019). Matematická analýza 1. skript k přednášce, verze 14.10.2019, `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kaplicky/texts/MA-skript-211014.pdf`.

[Tichonov, 1935] Tichonov, A. (1935). Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur. *Matematiceskij sbornik*, 42(2):199–216.

[Čihák et al., 2002] Čihák, P., Čerych, J., and Kopáček, J. (2002). *Příklady z matematiky pro fyziky V*. matfyzpress.