Zápočtová písemka z UPDR, ZS 2020-21

(1) Mějme diferenciální rovnici $\partial_x^2 u + 4\partial_x\partial_y u + 8\partial_y^2 u + \partial_x u + 2\partial_y u = 0$. a) Určete typ rovnice. b) Převeďte rovnici na tvar, který neobsahuje smíšené druhé parciální derivace. c) Je-li to možné odstraňte z rovnice první derivace.

Můžete využít toho, že

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Buď $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$. Uvažme úlohu $x\partial_x u + (x+y)\partial_y u = 0$ pro neznámou funkci $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s počáteční podmínkou $u(x,0) = u_0(x)$ pro $x \in \mathbb{R}$. a) Najděte řešení zadané úlohy na jistém okolí bodu $(1,0)$. b) Pro která u_0 existují řešení úlohy na jistém okolí bodu $(0,0)$?

(3) Uvažme úlohu $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$ v $(0,+\infty) \times (0,2\pi)$ s okrajovou podmínkou $u(t,0) = u(t,2\pi)$, $\partial_x u(t,0) = \partial_x u(t,2\pi)$ pro $t > 0$ a počáteční podmínkou $u(0,x) = u_0(x)$ pro $x \in (0,2\pi)$ a dané u_0. a) Najděte kandidáta na řešení úlohy, víte-li, že řešení má tvar

$$u(t,x) = \alpha_0(t) + \sum_{k=1}^{+\infty}(\alpha_k(t)\cos(kx) + \beta_k(t)\sin(kx)).$$

b) Najděte řešení úlohy pro $u_0(x) = \cos^2(x)$.

1) Budeme hledat řešení ve tvaru $u(x,t) = v\left(x, -x + \frac{y}{2}\right)$.

Dosadíme do rce: $\partial_x u(x,y) = \partial_1 v - \partial_2 v$

$$\partial_x^2 u = \partial_1^2 v - 2\partial_1\partial_2 v + \partial_2^2 v$$

$$\partial_x\partial_y u = \frac{\partial_1\partial_2 v - \partial_2\partial_2 v}{2}$$

$$\partial_y u = \frac{1}{2}\partial_2 v$$

$$\partial_y^2 u = \frac{1}{4}\partial_2 v$$

$$\Rightarrow \partial_1^2 v \cancel{- 2\partial_1\partial_2 v} + \partial_2^2 v + \frac{4}{2}\left(\cancel{\partial_1\partial_2 v} - \cancel{\partial_2^2 v}\right) + \cancel{2\partial_2^2 v} + \partial_1 v \cancel{- \partial_2 v}$$

$$\cancel{+ \frac{2}{2}\partial_2 v} = \partial_1^2 v + \partial_2^2 v + \partial_1 v$$

a) rovnice je vždy eliptická

b) tvar bez smíšených 2. derivací je $\partial_1^2 v + \partial_2^2 v + \partial_1 v = 0$

c) položme $v(\xi,\zeta) = e^{\alpha\xi} w(\xi,\zeta)$: $\partial_\xi v = e^{\alpha\xi}(\partial_1 w + \alpha w)$

$$\partial_\xi^2 v = e^{\alpha\xi}\left(\partial_1^2 w + 2\alpha\partial_1 w + \alpha^2 w\right)$$

$$\Rightarrow \partial_1^2 w + \underline{2\alpha\partial_1 w} + \alpha^2 w + \partial_2^2 w + \underline{\partial_1 w} + \alpha w = (*)$$

Volíme: $2\alpha = -1$, $\alpha = -\frac{1}{2}$. Pak

$$(*) = \partial_1^2 w + \partial_2^2 w - \frac{1}{4} w = 0$$

je tvar bez 1. derivací

2) Najdeme charakteristiky:

$$x' = x \implies x(t) = Ce^{t}$$

$$y' = x + y \implies y' - y = Ce^{t} \implies (e^{-t}y)' = e^{-t}y' - e^{-t}y = C$$

$$\implies y(t) = (Ct + D)e^{t}$$

a) Fixujme (x,y) v okolí bodu $(1,0)$, najdeme charakteristiku, která prochází tímto bodem pro $t=0$: $C = x$

$D = y$

Je to tedy $t \longmapsto (xe^{t}; (xt+y)e^{t})$

Kdy protne osu x? $xt + y = 0$ tj. $t = -\frac{y}{x}$ pro $x \neq 0$

v bodě: $(x e^{-\frac{y}{x}}, 0)$

Hledané řešení tedy je $u_0(x e^{-\frac{y}{x}})$.

b) Řešení musí být konstantní podél charakteristik a pro každou charakteristiku platí: $\lim_{t \to -\infty} p(t) = (0,0)$.

Pokud tedy má ex. řešení na okolí bodu $(0,0)$ spojité v $(0,0)$, musí být konstantní a rovno u_0. Pro konstantní u_0 řešení na okolí bodu $(0,0)$ ex. (a je konstantní)

Tím řešení dosadíme do r-ce:

$$\alpha_0'(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\alpha_k'(t) + k^2\alpha_k(t)\right)\cos kx + \left(\beta_k'(t) + k^2\beta_k(t)\right)\sin kx = 0$$

Musí tedy platit

$$\alpha_0'(t) = 0, \quad \alpha_k'(t) + k^2\alpha_k(t) = 0, \quad \beta_k'(t) + k^2\beta_k(t) = 0, \quad \text{tj. } \alpha_0(t) = \tilde{\alpha}_0 \in \mathbb{R}$$

$$\alpha_k(t) = \tilde{\alpha}_k e^{-k^2 t}; \quad \beta_k(t) = \tilde{\beta}_k e^{-k^2 t}$$

Kandidát na řešení je:

$$\tilde{\alpha}_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{\alpha}_k e^{-k^2 t}\cos kx + \tilde{\beta}_k e^{-k^2 t}\sin kx$$

Dosadíme $t=0$ a chceme dostat Fourierovu řadu pro u_0, tj.

$$\tilde{\alpha}_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_0(s)\,ds, \quad \tilde{\alpha}_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u_0(s)\cos ks\,ds, \quad \tilde{\beta}_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u_0(s)\sin(ks)\,ds.$$

b) Platí $\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}$.

Hledané řešení tedy je: $u(t,x) = \frac{1}{2} + e^{-4\cancel{k^2}t}\frac{\cos(2x)}{2}$.