2. zápočtová písemka

Písemka je na 90 minut a můžete používat libovolné písemné materiály, ale nikoli techniku. Hodně štěstí.

1. (10 bodů) Spočtěte primitivní funkci na maximálním možném intervalu
$$\int x \operatorname{arctg}(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. (10 bodů) Spočtěte primitivní funkci na maximálním možném intervalu
$$\int \frac{1}{x+2-\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x.$$

3. (10 bodů) Spočtěte primitivní funkci na intervalu $(\arcsin(-4/5), \pi + \arcsin(4/5))$
$$\int \frac{1}{5\sin(x)+4}\,\mathrm{d}x.$$

4. (10 bodů) Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá na $\mathbb{R}$ a F je primitivní funkce k f na $\mathbb{R}$. Rozhodněte zda platí

   A) F je periodická $\implies$ f je periodická,

   B) f je periodická $\implies$ existuje $C \in \mathbb{R}$, že $F + C$ je periodická.

2. zápočtová písemka – varianta 102 – 2024

1) $$\int x \operatorname{arctg} x \, dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx$$

$$\downarrow i \quad \downarrow d$$

$$\frac{x^2}{2} \qquad \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x \quad \text{na } \mathbb{R}$$

2) $$\int \frac{1}{x+2-\sqrt{x-1}}\,dx$$ … chceme prim. fci na $(1,+\infty)$, protože $x+2 > \sqrt{x-1}$ na $(1,+\infty)$.

$$\parallel$$

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \, \frac{2\cdot\sqrt{x-1}}{3+\left(\sqrt{x-1}\right)^2-\sqrt{x-1}}\,dx = I$$

substituce 1. druhu: $\varphi(x) = \sqrt{x-1}$; $\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

3

$$\longrightarrow \int \frac{2t}{t^2-t+3}\,dt = \int \frac{2t-1}{t^2-t+3}\,dt + \int \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}\,dt$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-12}}{2} \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$$

2

$$= \lg\left(t^2-t+3\right) + \frac{2}{\sqrt{11}}\,\frac{2}{\sqrt{11}} \int \frac{1}{\left(\frac{2t-1}{\sqrt{11}}\right)^2+1}\,dt$$

3

$$= \lg\left(t^2-t+3\right) + \frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{11}} \quad \text{na } \mathbb{R}$$

2

$$I = \lg\left(x+2-\sqrt{x-1}\right) + \frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{11}} \quad \text{na } (1,+\infty).$$

3) $\int \underbrace{\frac{1}{5\sin x+4}}_{f(x)}\,dx$ na $\left(-\arcsin\frac{4}{5}, \pi+\arcsin\frac{4}{5}\right)$

(2)

$$\int \frac{1}{5\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+4}\,dx = \int \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,\frac{1}{5\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}+2\left(1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}\right)}\,dx$$

substituce 1. druhu $\varphi(x) = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$, $\varphi'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$ (2)

$$\int \frac{1}{2t^2+5t+2}\,dt \qquad = \int \frac{2}{2t+1} - \frac{1}{t+2}\,dt\ \frac{1}{3}$$

$$t_{1,2} = \frac{-5 \pm \overbrace{\sqrt{25-16}}^{3}}{4} = \left\langle \begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ -2 \end{matrix}\right.$$

(2)

$$= \frac{1}{3}\lg\left|\frac{2t+1}{t+2}\right|$$ na $(-\infty, -2)$ a $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ a $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

$\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$, $\frac{x}{2} = -\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}$, $x = -2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}$

(2)

$$\int \frac{1}{5\sin x+4}\,dx = \frac{1}{3}\lg\left|\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+2}\right|$$ na $(-\pi, -2\,\mathrm{arctg}\,2)$ a $\left(-2\,\mathrm{arctg}\,2, -2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}\right)$ a $\left(-2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}, \pi\right) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{def. } F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}\lg\left|\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+2}\right| & \text{na } \left(-2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}, \pi\right) \\ \frac{1}{3}\lg 2 & \text{v } x = \pi \\ \frac{1}{3}\lg\left|\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+2}\right| & \text{na } (\pi, 2\pi - 2\,\mathrm{arctg}\,2) \end{cases}$$

(2)

Pak $F(x) = \int \frac{1}{5\sin x+4}\,dx$ na $\left(-2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}, 2\pi - 2\,\mathrm{arctg}\,2\right)$, protože

F i f jsou ale spojité, protože $-2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} \overset{a)}{=} -\arcsin\frac{4}{5}$ a

$\pi + \arcsin\frac{4}{5} \overset{b)}{=} -2\,\mathrm{arctg}\,2 + 2\pi$

ad a) $\sin\left(2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}\right) = 2\sin\left(\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}\right)\cos\left(\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}\right) = 2\cdot\mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}\right)\left(1+\mathrm{tg}^2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}\right)$

$= 2\,\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4}$ a navíc $2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

ad b) $\arcsin\frac{4}{5} \overset{?}{=} \pi - 2\,\underbrace{\mathrm{arctg}\,2}_{\frac{\pi}{2} > \ > \frac{\pi}{4}} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ a $\sin(\pi - 2\,\mathrm{arctg}\,2) = \sin(2\,\mathrm{arctg}\,2) =$

$2\sin(\mathrm{arctg}\,2)\cos\mathrm{arctg}\,2 = 2\,\mathrm{tg}\,\mathrm{arctg}\,2\ \overline{\left(1+\mathrm{tg}^2\,\mathrm{arctg}\,2\right)}^{\,1} =$

$= 4\cdot\overline{(1+4)}^{\,1} = \frac{4}{5}$

4) A: Platí $F' = f$ na $\mathbb{R}$

Je-li F periodická s periodou $p > 0$, je pro $x \in \mathbb{R}$

$$F'(x+p) = f(x+p) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+p+h) - F(x+p)}{h} \overset{\text{periodicita}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Tedy f je p periodická.

B: Fce $f(x) := 1$ je 1-periodická. Primitivní fce na $\mathbb{R}$ je $x + C$, pro $C \in \mathbb{R}$. Tedy je rostoucí a není periodická pro každé C.