§ 1. MNOŽINY, ZOBRAZENÍ

K označení obecného kvantifikátoru užíváme dále symbol $\bigwedge$, k označení existenčního kvantifikátoru symbol $\bigvee$. (V literatuře se čtenář setká také se symboly $\forall$, Π pro obecný kvantifikátor a se symboly $\exists$, Σ pro existenční kvantifikátor.) Negaci výroku a značíme non a. K označení konjunkce, alternativy, implikace a ekvivalence užíváme po řadě symbolů $\wedge$, $\vee$, $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$.

Množiny značíme zpravidla velkými tiskacími písmeny, např. A, B, M apod. Symbol $\{a\}$ značí množinu o jediném prvku a, symbol $\emptyset$ prázdnou množinu.

Pro některé množiny, s nimiž budeme dále často pracovat, budeme užívat stále téhož symbolu: tak např. N značí množinu všech přirozených čísel $\{1,2,\dots\}$, Q značí množinu všech racionálních čísel, E_1 značí množinu všech čísel reálných. Symbol E_1^* značí množinu $E_1 \cup \{-\infty, \infty\}$, ve které jsou operace a uspořádání zavedeny obvyklým způsobem.

K označení množinových operací užíváme symbolů $A \cup B$, $A \cap B$ a $A - B$ pro sjednocení, průnik a rozdíl množin A, B. Symboly

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \, , \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \, , \quad \bigcup_{t\in T} A_t$$

značí postupně sjednocení množin systémů

$$\{A_i \, ; i \in N, 1 \leq i \leq n\}, \; \{A_i \, ; i \in N\} \, , \; \{A_t \, ; t \in T\} \, .$$

Obdobného označení užíváme i pro průnik systémů množin.

Symbol $f: A \longrightarrow B$ značí zobrazení neprázdné množiny A do neprázdné množiny B. Je-li C množina, značíme symbolem $f_{-1}(C)$ množinu $\{x; f(x) \in C\}$. Místo $f_{-1}(\{y\})$ píšeme stručněji pouze $f_{-1}(y)$. Platí-li $B = f(A)$, kde $f(A) = \{y \in B \, ; \text{ existuje } x \in A \, , f(x) = y\}$, říkáme, že f je zobrazením množiny A na množinu B (stručněji též: f zobrazuje A na B).

Jestliže je $f: A \longrightarrow B$, $C \subset A$ a pro každé $x, y \in C$, $x \neq y$, platí $f(x) \neq f(y)$, říkáme, že zobrazení f je prosté na množině C (stručněji též: f je prosté na C). Jestliže k zobrazení f existuje zobrazení inversní, značíme je f_{-1}.

Jestliže je $f: B \longrightarrow C$, $g: A \longrightarrow B$, značíme symbolem $f * g$ zobrazení $h: A \longrightarrow C$, pro které platí $h(x) = f(g(x))$ pro každé $x \in A$.

1. Dosadíme-li za a, b libovolné výroky, platí

(a) $(a \Longrightarrow b) \Longleftrightarrow (\text{non } a \vee b)$,

(b) $(a \Longleftrightarrow b) \Longleftrightarrow ((a \Longrightarrow b) \wedge (\text{non } a \Longrightarrow \text{non } b))$,

(c) $(\text{non}(a \wedge b)) \Longleftrightarrow (\text{non } a \vee \text{non } b)$.

Dokažte.

2. Dokažte, že platí výrok

$$\text{non}\left(\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x} (0 < |x-1| < \delta) \Longrightarrow (|x-3| < \varepsilon)\right).$$

3. Dokažte, že pro $a = 1$ je číslo 5 řešením rovnice

$$|||x| - 1| - 3| = a .$$

Řešte v E_1 tuto rovnici, v níž x je neznámá, a je parametr, $a \in E_1$ (tj. pro všechna $a \in E_1$ najděte množinu $M_a = \{x \in E_1 ;\ |||x| - 1| - 3| = a\}$).

4. Určete všechna $a \in E_1$, pro něž množina M_a z úlohy 3 má lichý počet prvků.

5. Sestrojte množinu (resp. omezenou množinu) v E_1, která je sjednocením nekonečně mnoha otevřených po dvou disjunktních intervalů.

6. Sestrojte v E_1 intervaly I_n, $n \in N$, tak, aby platilo: $I_{n+1} \subset I_n$ pro všechna $n \in N$ a $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$.

Je tato úloha řešitelná i v případě, že bychom požadovali navíc, aby intervaly I_n, $n \in N$, byly vesměs omezené a uzavřené ?

7. Nechť je dán systém množin M_i, $i \in N$.

Dokažte:

(a) $\{x; \{i; x \notin M_i\}$ je konečná množina$\} =$

$$= \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{i=j}^{\infty} M_i ;$$

(b) $\{x; \{i; x \in M_i\}$ není konečná množina$\} =$

$$= \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=j}^{\infty} M_i .$$

8. Nechť I, J jsou intervaly v E_1. Najděte nutné a postačující podmínky pro to, aby

(a) $I \cup J$, (b) $I \cap J$, (c) $I - J$,

byl opět interval.

9. Nechť $\mathcal{R}$ je systém všech množin M v E_1, které lze vyjádřit jako sjednocení konečného počtu intervalů tvaru $\langle a, b)$, kde $-\infty < a < b \leq +\infty$. Potom platí: Je-li $M, N \in \mathcal{R}$, pak též $M \cup N \in \mathcal{R}$, $M - N \in \mathcal{R}$. Dokažte.

10. Pro množiny A, B platí: Rovnost $A \cup B = B$ platí právě tehdy, je-li $A \subset B$. Dokažte.

11. Pro množiny A, B jsou následující podmínky (a) - (d) ekvivalentní:

(a) $B \subset A$; (c) $A \cup B = B$;

(b) $B - A = \emptyset$; (d) $A \cap B = A$.

Dokažte.

12. Nechť U, A, B jsou množiny, $A, B \subset U$. Označme $A' = U - A$, $B' = U - B$. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:

(a) $A \subset B$;

(b) $A \cap B' = \emptyset$;

(c) $A' \cup B = U$.

Dokažte.

13. Nechť X, A, B jsou libovolné množiny. Potom platí

$$X - (A \cup B) = (X - A) \cap (X - B),$$

$$X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B).$$

Je-li $A, B \subset X$, označíme $A' = X - A$, $B' = X - B$. Potom platí

$$A \cup B = X - (A' \cap B'),$$

$$A \cap B = X - (A' \cup B').$$

(Tyto formule se nazývají de Morganova pravidla.) Dokažte.

14. Ukažte, že předpoklad $A, B \subset X$ je pro platnost posledních dvou formulí z úlohy 13 podstatný, tj. najděte množiny X, A, B tak, aby např. neplatilo

$$A \cup B = X - [(X - A) \cap (X - B)].$$

15. Nechť $M \subset E_1$ je neomezená množina a $\beta > 0$. Potom existuje nekonečná množina $A \subset M$ taková, že pro všechna $x, y \in A$, $x \neq y$, platí $|x - y| > \beta$. Dokažte.

16. Nechť $R, S \subset E_1$ a množina S je neomezená. Nechť existuje $\beta > 0$ takové, že platí podmínka

$$\bigwedge_{x \in S} \bigvee_{y \in R} |x - y| < \beta .$$

Potom množina R není omezená. Dokažte.

17. Rozhodněte o platnosti věty:

Nechť $R, S \subset E_1$, množina S není omezená. Nechť pro žádné $\beta > 0$ neplatí podmínka

$$\bigwedge_{x \in S} \bigvee_{y \in R} |x - y| < \beta .$$

Potom množina R je omezená.

(Všimněte si vztahu této věty a věty z úlohy 16.)

18. Rozhodněte o platnosti věty:

Nechť R, S $\subset E_1$, množina S není omezená. Potom množina R je omezená právě tehdy, platí-li podmínka

$$\bigvee_{\beta>0} \bigwedge_{x\in S} \bigvee_{y\in R} |x - y| < \beta \ .$$

Srovnejte tuto větu s větami z úloh 16, 17 .

19. Rozhodněte o platnosti věty:

Nechť R, S $\subset E_1$ jsou neprázdné množiny a nechť platí podmínka

$$\bigwedge_{x\in R} \bigwedge_{\beta>0} \bigvee_{y\in S} |x - y| > \beta \ .$$

Potom množina S není omezená.

(Zaručují předpoklady této věty též neomezenost množiny R ?)

20. V souvislosti s větou z úlohy 19 rozhodněte o platnosti následující věty, která má slabší předpoklady:

Nechť R, S $\subset E_1$ jsou neprázdné množiny a nechť platí podmínka

$$\bigvee_{x\in R} \bigwedge_{\beta>0} \bigvee_{y\in S} |x - y| > \beta \ .$$

Potom množina S není omezená.

21. Rozhodněte o platnosti věty:

Nechť R, S $\subset E_1$ jsou neprázdné množiny a nechť platí podmínka

$$\bigwedge_{\beta>0} \bigvee_{x\in R} \bigvee_{y\in S} |x - y| > \beta \ .$$

Potom množina S není omezená.

Srovnejte tuto větu s větou z úlohy 20.

KNIHOVNA MAT.-FYZ. FAKULTY
Matematické oddělení
Sokolovská 83
186 75 Praha 8

22. Zesílíme-li předpoklady věty z úlohy 21 doplněním jejích předpokladů o podmínku " R je omezená množína", rozhodněte, zda platí věta, která z věty v úloze 21 takto vznikne.

23. Nechť $x, y \in E_1$. Dokažte, že platí:

(a) $\max(x, y) = \dfrac{x+y}{2} + \dfrac{|x-y|}{2}$;

(b) $\min(x, y) = \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{|x-y|}{2}$.

24. Najděte omezenou množinu $M \subset E_1$, pro niž neexistuje $\max M$.

25. Buď M neprázdná omezená množina v E_1 . Označme $M^+ = M \cup \{\sup M\}$, $M^- = M \cup \{\inf M\}$. Dokažte, že platí

$$\max M^+ = \sup M , \quad \min M^- = \inf M .$$

26. Nechť R, S jsou neprázdné shora omezené množiny v E_1 . Rozhodněte, zda platí

(a) $\sup(R \cup S) = \max(\sup R, \sup S)$;

(b) je-li $R \cap S \neq \emptyset$, je

$$\sup(R \cap S) = \min(\sup R , \sup S) .$$

Je-li $R - S \neq \emptyset$, najděte vztah mezi $\sup(R - S)$, $\sup R$ a $\sup S$.

27. Nechť $M \subset E_1$ je neprázdná omezená množina. Potom platí

$$\sup M - \inf M = \sup \{x - y;\ x , y \in M\} .$$

Dokažte.

28. Nechť M je neprázdná množina v E_1 . Označme $-M$ množinu $\{x;\ -x \in M\}$. Potom platí

$$\sup (-M) = -\inf M , \qquad \inf (-M) = -\sup M .$$

Dokažte.

29. Nechť $M \subset E_1^*$; položme

$$A = \{x \in E_1^* ;\ \bigwedge_{y \in M} y \leq x\} .$$

Charakterizujte všechny množiny $M \subset E_1^*$, pro něž množina A obsahuje právě jeden prvek (máme tedy zjistit, zda množina M žádané vlastnosti existuje a nalézt nutné a postačující podmínky, které splňují všechny množiny této vlastnosti).

30. Řešte úlohu analogickou úloze 29, definujeme-li množinu A předpisem

$$A = \{x \in E_1^* ;\ \bigwedge_{y \in M} y < x\} .$$

31. Nechť $M \subset E_1^*$. Charakterizujte všechny množiny M , pro něž existuje

$$\min \{x;\ \bigwedge_{y \in M} y < x\} , \text{ resp.}$$

$$\min \{x;\ \bigwedge_{y \in M} y \leq x\} .$$

32. Dokažte, že pro $M \subset E_1^*$ libovolně zvolenou obsahují množiny

$$\{x \in E_1^* ;\ \bigwedge_{y \in M} y \leq x ,\ \bigwedge_{x' < x} \bigvee_{y \in M} y > x'\} ,$$

$$\{x \in E_1^* ;\ \bigwedge_{y \in M} y \leq x ,\ \bigwedge_{x' < x} \bigvee_{y \in M} y \geq x'\}$$

právě jeden prvek a jsou si rovny.

33. Charakterizujte všechny množiny $M \subset E_1^*$, pro něž množina

$$\{x \in E_1^* ;\ \bigwedge_{y \in M} y \leq x ,\ \bigwedge_{x' < x, x' \in M} \bigvee_{y \in M} y \geq x'\} ,\ \text{resp.}$$

$$\{x \in E_1^* ;\ \bigwedge_{y \in M} y \leq x ,\ \bigwedge_{x' < x, x' \in M} \bigvee_{y \in M} y > x'\}$$

obsahuje právě jeden prvek.

34. Charakterizujte všechny množiny $M \subset E_1^*$, pro něž množina $A \cap B$, kde A má týž význam jako v úloze 30 a B je určena předpisem

(a) $B = \{x \in E_1^* ;\ \bigwedge_{x' < x} \bigvee_{y \in M} y > x'\}$,

(b) $B = \{x \in E_1^* ;\ \bigwedge_{x' < x} \bigvee_{y \in M} y \geq x'\}$,

(c) $B = \{x \in E_1^* ;\ \bigwedge_{x' < x, x' \in M} \bigvee_{y \in M} y > x'\}$,

(d) $B = \{x \in E_1^* ;\ \bigwedge_{x' < x, x' \in M} \bigvee_{y \in M} y \geq x\}$,

obsahuje právě jeden prvek.

35. Nechť $M \subset E_1^*$; potom platí

$$\sup M = \inf A ,$$

kde A má týž význam jako v úloze 29 . Dokažte.

36. Úlohy 29 - 35 souvisely s definicí sup M pro $M \subset E_1^*$. Formulujte obdobné úlohy související s definicí, resp. existencí inf M a najděte jejich řešení.

37. Buď K množina o n prvcích, M = {0,1} . Určete počet prvků množiny všech zobrazení množiny K do množiny M (resp. množiny K na množinu M).

38. Buď K množina o n prvcích. Určete počet prvků množiny všech podmnožin množiny K . Všimněte si souvislosti s úlohou 37 .

39. Nechť M je množina o m prvcích. Určete počet prvků množiny všech zobrazení f množiny M do množiny M (resp. všech zobrazení množiny M na množinu M).

40. Nechť R, S jsou konečné množiny o r , resp. s prvcích. Určete počet prvků množiny všech zobrazení f množiny R do množiny S .

41. Zformulujte úlohu analogickou k úloze 40 pro množinu všech zobrazení R na S , resp. všech prostých zobrazení R do S a řešte tyto úlohy. Najděte nutné a postačující podmínky, které musí splňovat čísla r , s , aby zformulované úlohy měly řešení.

42. Sestrojte zobrazení $f: M \longrightarrow P$, prosté na množině M a pro něž je $f(M) = P$, je-li

(a) $M = N$, $P = \{2n; n \in N\}$;

(b) $M = \{2n; n \in N, n \geq 3\}$,
$P = \{3n; n \in N, n > 11\}$;

(c)* $M = E_1$, $P = \langle 0, +\infty)$;

(d)* $M = (0,1)$, $P = \langle 0,1 \rangle$;

(e)* $M = N \times N$, $P = N$.

43. Nechť M je konečná množina, $f: M \longrightarrow M$. Rozhodněte o platnosti tvrzení:

(a) Je-li $M - f(M) = \emptyset$, je zobrazení f prosté.

(b) Je-li $M - f(M) \neq \emptyset$, zobrazení f není prosté.

44. Nechť $f: N \longrightarrow N$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

(a) Je-li $f(N)$ konečná množina, není zobrazení f prosté.

(b) Je-li množina $f(N)$ nekonečná, je zobrazení f prosté.

(c) Je-li $N - f(N) = \emptyset$, je zobrazení f prosté.

(d) Je-li f prosté zobrazení, je $N - f(N) = \emptyset$.

45. Dokažte:
Nechť existuje zobrazení $f: M \longrightarrow M$, které je prosté na množině M a pro které platí $f(M) \neq M$. Potom množina M není konečná.

46. Nechť $f: X \longrightarrow Y$. Dokažte, že vztahy

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) ,$$

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) ,$$

platí pro libovolné podmnožiny A, B množiny X.

47. Ukažte, že ve druhém vztahu z úlohy 46 nemusí obecně nastat rovnost, tj. existují množiny $A, B \subset X$ a zobrazení $f: X \longrightarrow Y$ takové, pro něž neplatí

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) .$$

48. Zformulujte tvrzení obdobné tvrzení z úlohy 46 pro vzory podmnožin C , D množiny Y a dokažte je.

49. Nechť $f: X \longrightarrow Y$, f je prosté zobrazení na množině X . Potom pro libovolné množiny $A, B \subset X$, pro něž je $B \subset A$, platí

$$f(A - B) = f(A) - f(B) .$$

Dokažte.

50. Dokažte "obrácenou" větu k větě z úlohy 49 , tj. dokažte tvrzení:

Nechť $f: X \longrightarrow Y$ a pro libovolné množiny A , $B \subset X$, pro něž platí $B \subset A$, je

$$f(A - B) = f(A) - f(B) .$$

Potom zobrazení f je prosté na X .

51. Z řešení úloh 49 , 50 vyplývá tvrzení:
Nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby $f: X \longrightarrow Y$ bylo prosté zobrazení na množině X , je podmínka

$$\bigwedge_{A} \bigwedge_{B} (A, B \subset X, B \subset A) \Longrightarrow (f(A - B) = f(A) - f(B)) .$$

52. Nechť zobrazení f je prosté na množině M , zobrazení g je prosté na množině P a $g(P) \subset M$. Potom je zobrazení $f * g$ prosté na množině P .

53. Najděte zobrazení f, g množiny M na množinu M takové, že pro složená zobrazení platí

$$f * g \neq g * f .$$

Řadu dalších úloh obdobného charakteru lze nalézt ve sbírce [4] .

§ 2. POSLOUPNOSTI

V tomto paragrafu pracujeme pouze s posloupnostmi reálných čísel, i když některá z uvedených tvrzení platí např. i pro posloupnosti komplexních čísel apod. Pro stručnost píšeme někdy místo symbolu $+\infty$ pouze ∞. Podobně místo symbolu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kterým značíme posloupnost, píšeme v případě, že nemůže dojít k nedorozumění, pouze $\{a_n\}$ (např. tedy nejde o množinu obsahující pouze prvek a_n). Analogicky též často píšeme $\lim a_n$ místo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Je-li $a \in E_1^*$, $\lim a_n = a$, říkáme, že posloupnost má limitu. Je-li navíc $a \in E_1$, říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní (konverguje). Posloupnost, která není konvergentní, se nazývá divergentní.

Je-li $x \neq 0$, položíme $\operatorname{sgn} x = \dfrac{x}{|x|}$, dále klademe $\operatorname{sgn} 0 = 0$.

Některé další příklady o posloupnostech jsou uvedeny v § 9.

54. Rozhodněte, zda každá posloupnost $\{a_n\}$ s následující vlastností je konvergentní:

    Existuje $a \in E_1$ tak, že pro každé $n \in N$ existuje $k \geq n$ tak, že $|a_k - a| < \dfrac{1}{n}$.

55. Nechť $\lim a_n = a \in E_1$. Je-li $k \in N$, buď n_k nejmenší přirozené číslo s touto vlastností: Pro všechna $n \in N$, $n \geq n_k$, platí $|a_n - a| < k^{-1}$. Potom je $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ neklesající posloupnost. Dokažte a charakterizujte všechny posloupnosti $\{a_n\}$, pro něž

je posloupnost $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ konvergentní.

56. Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost kladných čísel. Rozhodněte, zda pak platí podmínka

(a) $\lim (a_{n+1} - a_n) = 0$, resp.

(b) $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

57. Sestrojte posloupnost racionálních (resp. iracionálních) čísel, která konverguje k číslu iracionálnímu (resp. racionálnímu).

58. Sestrojte posloupnost $\{a_n\}$, která je omezená, neklesající a pro každé $n \in N$ je

$$a_{n+1} > \frac{a_n + a_{n+2}}{2} .$$

Má tuto vlastnost každá neklesající posloupnost ?

59. Sestrojte posloupnost $\{a_n\}$ kladných čísel, pro niž $\lim a_n = 0$ a pro všechna $n \in N$ platí

$$(-1)^{n+1} a_{n+1} > (-1)^{n+1} \frac{a_n + a_{n+2}}{2} .$$

60. Sestrojte posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ tak, aby $\lim a_n = +\infty$ a zároveň byla splněna některá z podmínek:

(a) $\lim (a_{n+1} - a_n) = +\infty$;

(b) $\lim (a_{n+1} - a_n) = 1$;

(c) $\lim (a_{n+1} - a_n) = 0$.

61. Nechť $q < 1$ a nechť pro posloupnost $\{a_n\}$ kladných čísel platí pro všechna $n \in N$ podmínka

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q .$$

Potom platí $\lim a_n = 0$.

Rozhodněte, zda za uvedených předpokladů platí

$$\lim n\, a_n = 0 .$$

62. Rozhodněte o platnosti tvrzení:
Nechť pro posloupnost kladných čísel $\{a_n\}$ platí pro všechna $n \in N$ nerovnost $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Potom je $\lim a_n = 0$.

63. Rozhodněte, pro která $a \in E_1^*$ existuje posloupnost $\{a_n\}$ čísel z $E_1 - \{0\}$ tak, že platí $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$.

64. Rozhodněte, pro která $a \in E_1^*$ existuje posloupnost $\{a_n\}$ čísel z $E_1 - \{0\}$, která má limitu (resp. která konverguje) a pro kterou platí

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = a .$$

65. Sestrojte příklad omezené posloupnosti reálných čísel $\{a_n\}$, pro kterou neexistuje ani $\max\{a_n ; n \in N\}$ ani $\min\{a_n ; n \in N\}$.

66. Sestrojte konvergentní posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$, pro kterou existuje $\max\{a_n ; n \in N\}$ a neexistuje $\min\{a_n ; n \in N\}$.

67. Rozhodněte o platnosti tvrzení:
Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost reálných čísel; pak existuje $\max\{a_n ; n \in N\}$ nebo $\min\{a_n ; n \in N\}$.

68. Nechť pro posloupnost $\{a_n\}$ platí

$$\lim a_n = +\infty \qquad (\text{resp. } \lim a_n = -\infty).$$

Potom je posloupnost $\{a_n\}$ zdola (resp. shora) omezená. Dokažte.

69. Charakterizujte všechny posloupnosti $\{a_n\}$, pro které platí

$$\lim a_n = \lim \frac{a_n^2 + 1}{a_n} .$$

70. Nechť $\lim x_n = x \in E_1$ a nechť rovnost $y = x_n$ platí pro nekonečně mnoho různých přirozených čísel n. Potom $y = x$. Dokažte.

71. Buď $\{a_n\}$ posloupnost kladných čísel a nechť $\inf\{a_n;\ n \in N\} = 0$. Potom existují $k_1 < k_2 < \dots$ přirozená tak, že

$$\lim_{n \to \infty} (1/a_{k_n}) = \infty .$$

Dokažte.

72. Buď $a_n > 0$ pro každé $n \in N$, $\lim a_n = 0$. Dokažte, že z posloupnosti $\{a_n\}$ lze vybrat posloupnost klesající, ale nelze vybrat posloupnost neklesající.

73. Nechť $\{a_n\}$ je taková posloupnost, pro kterou neexistuje $\lim a_n$ a existuje $\lim |a_n| = a$ Potom je $a \neq 0$, množiny $N^+ = \{n \in N;\ a_n > 0\}$, $N^- = \{n \in N;\ a_n < 0\}$ jsou nekonečné a množina $N^0 = N - (N^+ \cup N^-)$ je konečná. Dokažte.

74. Buď $\{a_n\}$ posloupnost taková, pro kterou $\lim a_n$ neexistuje a $\lim |a_n| = \infty$. Potom pro každou vybranou posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ (z posloupnosti $\{a_n\}$), pro niž existuje $\lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k}$, je buď $\lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k} = \infty$, nebo $\lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k} = -\infty$. Dokažte.

75. Nechť $\{a_n\}$ je taková posloupnost, pro niž neexistuje $\lim (\operatorname{sgn} a_n)$. Potom buď $\lim a_n = 0$, nebo posloupnost $\{a_n\}$ nemá limitu. Dokažte.

76. Nechť $\{a_n\}$ je taková posloupnost, pro kterou $\lim a_n$ neexistuje a $\lim |a_n| = a$. Potom existují čísla $\varepsilon_n \in \{-1,1\}$, $n \in N$, tak, že $\lim a_n \varepsilon_n = a$ Pro každou posloupnost $\{\varepsilon_n\}$ s uvedenými vlastnostmi neexistuje $\lim \varepsilon_n$. Dokažte.

77. Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní a $\{b_n\}$ divergentní posloupnost. Rozhodněte, zda pak konverguje, resp. diverguje posloupnost

$$\{a_n + b_n\} .$$

Vyšetřete, za jakých podmínek pak konverguje, resp. diverguje posloupnost $\{a_n \cdot b_n\}$.

78. Jestliže dvě z posloupností

$$\{a_n\}, \{b_n\}, \{a_n + b_n\}$$

jsou konvergentní, potom konvergují všechny tři tyto posloupnosti. Dokažte.

79. Sestrojte omezené posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ tak, aby z posloupností $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{a_n \cdot b_n\}$ konvergovaly právě dvě.

80. Sestrojte posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ takové, že $\lim a_n$, $\lim b_n$ neexistují a přitom obě posloupnosti $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n \cdot b_n\}$ konvergují.

81. Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel. Potom následující výroky jsou ekvivalentní:

(a) Obě posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ konvergují.

(b) Obě posloupnosti $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n - b_n\}$ konvergují.

82. Sestrojte omezené posloupnosti kladných čísel $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ tak, aby každá z posloupností

$$\{a_n\}, \{b_n\}, \{a_n \cdot b_n\}, \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$$

byla omezená a žádná nebyla konvergentní.

83. Buď $\{b_n\}$ posloupnost reálných čísel. Jestliže pro každou posloupnost $\{a_n\}$, pro niž $\lim a_n = 0$, platí $\lim a_n \cdot b_n = 0$, potom je $\{b_n\}$ omezená posloupnost. Dokažte.

84. Buď $q \in N$. Sestrojte posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ kladných čísel tak, aby platilo

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} n^k a_n = 0$ pro všechna $k \in \{1,2,\dots,q\}$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} n^k b_n = 0$ pro všechna $k \in N$.

85. Nechť $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$. Potom posloupnost $\{x_1, y_1, x_2, y_2, \dots\}$ má limitu, právě když $x = y$. Dokažte.

86. Nechť $\{a_n\}$ je taková posloupnost, pro niž existuje $\lim \frac{1}{a_n}$.

Je-li $\lim b_n = 0$, potom platí

$$\lim \frac{1}{a_n + b_n} = \lim \frac{1}{a_n} .$$

Dokažte.

87. Rozhodněte, zda lze z každé posloupnosti reálných čísel $\{a_n\}$, pro niž je $\{a_n \; ; \; n \in N\}$ nekonečná, vybrat ryze monotonní posloupnost.

88. Sestrojte posloupnost kladných čísel $\{a_n\}$, pro niž $\lim a_n = 0$ a pro každé $k \in N$ není posloupnost $\{a_{n+k}\}_{n=1}^{\infty}$ monotonní.

89. Sestrojte posloupnost $\{a_n\}$, pro niž $\lim a_n = \infty$ a pro každé $k \in N$ není posloupnost $\{a_{n+k}\}_{n=1}^{\infty}$ monotonní.

90. Dokažte tvrzení:

Nechť pro posloupnost $\{a_n\}$ reálných čísel platí $\lim a_n = \infty$. Potom existuje nekonečně mnoho $n \in N$ takových, že pro všechna $m > n$ platí $a_m > a_n$.

91. Nechť posloupnost $\{b_n\}$ není shora omezená, nechť $\lim a_n = \infty$. Potom existují přirozená čísla $k_1 < k_2 < \dots$ tak, že $a_{k_n} > b_n$ pro všechna $n \in N$. Dokažte.

92.* Rozhodněte, zda ke každé konvergentní posloupnosti $\{a_n\}$ existují omezené neklesající posloupnosti $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ tak, že $a_n = b_n - c_n$ pro všechna $n \in N$.

93. Dokažte tvrzení:

Nechť $f: N \longrightarrow N$, $f(N) = N$. Potom posloupnost $\{f(n)\}$ není konvergentní.

94. Dokažte, že pro $f: N \longrightarrow N$, $f(N) = N$, nemusí platit $\lim f(n) = \infty$.

95. Nechť platí $\lim a_n = a \in E_1^*$, $f: N \longrightarrow N$, $f(N) = N$, f je prosté zobrazení na množině N. Potom platí

$$\lim_{n \to \infty} a_{f(n)} = a .$$

Dokažte.

96. Rozhodněte, zda je v odstavci 95 předpoklad $f(N) = N$ podstatný, tj. zda platí tvrzení:

Nechť $f: N \longrightarrow N$ je prosté zobrazení na množině N. Jestliže $\lim a_n = a \in E_1^*$, potom $\lim\limits_{n \to \infty} a_{f(n)} = a$.

97. Najděte zobrazení $f: N \longrightarrow N$, $f(N) = N$ a posloupnost $\{a_n\}$, $\lim a_n = 0$ tak, že neexistuje $\lim a_{f(n)}$.

98. Rozhodněte, zda existuje zobrazení $f: N \longrightarrow N$ takové, aby pro každou konvergentní posloupnost $\{a_n\}$ neexistovala $\lim a_{f(n)}$.

99. Nechť je $f: N \longrightarrow N$ takové zobrazení, pro které je $\lim f(n) = + \infty$. Potom platí: Je-li $\lim a_n = a \in E_1^*$, je též $\lim a_{f(n)} = a$. Dokažte.

100. Rozhodněte, zda platí tvrzení:
Nechť $f: N \longrightarrow N$ je takové zobrazení, pro které platí: Je-li $\lim a_n = a \in E_1^*$, je též $\lim a_{f(n)} = a$. Potom pro každé $n \in N$ je množina $f_{-1}(n)$ konečná a $\lim f(n) = + \infty$.

101. Dokažte tvrzení:
Nechť pro posloupnost $\{a_n\}$ je množina $\{a_n ; n \in N\}$ konečná. Potom tato posloupnost konverguje, právě když existuje $n_0 \in N$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $a_n = a_{n_0}$.

102. Buď $k \in N$ a $\{a_n\}$ taková posloupnost, že pro všechna $n \in N$ je $a_{n+k} = a_n$. Potom $\lim a_n$ existuje, právě když $a_n = a_1$ pro všechna $n \in N$. Dokažte.

103. Nechť pro posloupnost $\{a_n\}$ existuje $K < \infty$ tak, že pro každé $k \in N$ platí

$$|a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \ldots + |a_k - a_{k-1}| < K .$$

Potom posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní. Dokažte.

104. Sestrojte konvergentní posloupnost $\{a_n\}$ takovou, že ke každému $K \in (0, +\infty)$ existuje $k \in N$ tak, že platí

$$|a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \ldots + |a_k - a_{k-1}| > K .$$

105. Nechť $\lim a_n = a \in E_1^*$. Definujeme pro $k \in N$

$$b_k = \frac{a_1 + \ldots + a_k}{k} .$$

Potom $\lim b_k = a$. Dokažte.

106. V souvislosti s úlohou z odstavce 105 sestrojte omezenou posloupnost $\{a_n\}$ tak, aby neexistovala $\lim a_n$, avšak existovala $\lim b_k$ (kde opět $b_k = \dfrac{a_1 + \ldots + a_k}{k}$).

107. Najděte kladná čísla $a_{n,k}$, n, $k \in N$, tak, aby platilo:

$$\lim_{n \to \infty} a_{n,k} = 0 \text{ pro každé } k \in N \text{ a}$$

$$\lim_{k \to \infty} a_{n,k} = 1 \text{ pro každé } n \in N .$$

§ 3. FUNKCE

Funkce znamená dále vždy "konečnou reálnou funkci". Budeme říkat, že "funkce f je definována na množině A ", jestliže f je zobrazení množiny B do E_1 , $A \subset B$, $A \neq \emptyset$. Zpravidla budeme pracovat s funkcemi reálné proměnné (definovanými na jisté podmnožině E_1).

Jestliže f je funkce, značíme symbolem $|f|$ funkci, která každému $x \in f_{-1}(E_1)$ přiřazuje číslo $|f(x)|$. Jsou-li f, g funkce, $M = f_{-1}(E_1) \cap g_{-1}(E_1) \neq \emptyset$, značí symboly $f + g$, $f \cdot g$, $\max(f, g)$ zobrazení množiny M do E_1 (tj. funkce), které každému $x \in M$ přiřazují po řadě čísla $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\max(f(x), g(x))$. Symbol $1/f$ značí funkci, která každému $x \in f_{-1}(E_1 - \{0\})$ přiřazuje číslo $1/f(x)$, pokud ovšem není funkce f zobrazením na jednobodovou množinu $\{0\}$. Symbolem D značíme dále Dirichletovu funkci, tj. funkci, definovanou předpisem

$$f(x) = 0 \quad \text{pro} \quad x \in E_1 - Q ,$$

$$f(x) = 1 \quad \text{pro} \quad x \in Q .$$

Užíváme slovních spojení následujícího tvaru: "funkce f je kladná na množině M ", "funkce f je monotonní v intervalu $\langle a, b \rangle$ " apod. Chápeme je takto: např. "funkce f je kladná na množině M " znamená, že funkce f je definovaná na množině M a pro každé $x \in M$ je $f(x) > 0$. Podobně je nutno chápat tato spojení v analogických slovních vyjádřeních.

Slovo interval znamená vždy nedegenerovaný interval (tj. takový, který obsahuje alespoň dva různé body). Je-li $x \in E_1$, rozumíme okolím bodu x každý otevřený interval $I \subset E_1$, pro který je $x \in I$. Okolí bodu x značíme dále v textu symbolem $U(x)$. Je-li $\delta > 0$, označíme $U_\delta(x) = (x - \delta , x + \delta)$. Okolím $U(+\infty)$ bodu $+\infty$ rozumíme interval tvaru $(a, +\infty)$, kde je $-\infty \leq a < +\infty$. Obdobný význam má symbol $U(-\infty)$.

Existuje-li $a \neq 0$ takové, že pro funkci f definovanou v E_1 platí podmínka

$$\bigwedge_{x \in E_1} f(x) = f(a + x),$$

říkáme, že funkce f je periodická a číslo a nazýváme periodou funkce f.

108. Rozhodněte o platnosti tvrzení:

Nechť f je funkce definovaná v E_1 a každá množina $M \subset E_1$, na které je funkce f prostá, je konečná. Potom je $f(E_1)$ konečná množina.

109. Nechť f je funkce definovaná v E_1 taková, že $f(E_1)$ je konečná množina. Jestliže $M \subset E_1$ a funkce je prostá na M, potom M je konečná množina. Dokažte; uvědomte si, že v takovém případě obsahuje množina M nejvýše tolik prvků jako množina $f(E_1)$.

110. Rozhodněte, zda platí toto tvrzení:

Nechť f je funkce definovaná v E_1 a ke každému $x \in E_1$ existuje okolí $U(x)$ tak, že funkce f je prostá na $U(x)$. Potom f je prostá v E_1.

111. Jestliže f, φ jsou funkce definované a prosté v E_1, potom funkce $f * \varphi$ je prostá v E_1. Dokažte.

123. Buďte f, g takové nezáporné funkce definované v E_1, že funkce f^2, g^2 jsou rostoucí v E_1. Potom je funkce $f \cdot g$ rostoucí v E_1. Dokažte.

124.* Rozhodněte, zda platí toto tvrzení:

Je-li f rostoucí funkce v E_1, potom existuje interval I, pro který je $I \subset f(E_1)$.

125. Buď c kladné číslo, f funkce definovaná v E_1; pro $x \in E_1$ položme

$$f_c(x) = \min(c, \max(f(x), -c)) .$$

Funkce f je neklesající v E_1, právě když pro každé $c \in E_1$, $c > 0$, je funkce f_c neklesající v E_1. Dokažte.

126. Dokažte následující tvrzení:

Nechť f, f^2 jsou rostoucí funkce v E_1. Potom je funkce f kladná v E_1.

127. Rozhodněte, zda platí tvrzení:

Nechť f je funkce definovaná v E_1 a ke každému $x \in E_1$ existuje okolí $U(x)$ tak, že funkce f je rostoucí na $U(x)$. Potom je f rostoucí v E_1.

128. Sestrojte funkci f definovanou v E_1, která je rostoucí v bodě 0 a klesající v každém bodě $x \in E_1 - \{ \frac{(-1)^n}{n} ; n \in N \}$.

129. Sestrojte funkci rostoucí v bodě x_0, která není rostoucí v žádném okolí $U(x_0)$.

130.* Dokažte, že funkce f, která je v každém bodě $x \in E_1$ ryze monotonní zprava i zleva, je alespoň v jednom bodě $x \in E_1$ ryze monotonní.

131. Sestrojte funkci f definovanou v E_1 s touto vlastností: Pro každý interval $I \subset E_1$ není množina $\{ f(x);\ x \in J \}$ shora omezená (resp. omezená shora ani zdola).

132. Buď f zobrazení množiny $M \neq \emptyset$ do $(0, \infty)$. Potom je funkce $1/f$ omezená na množině M právě tehdy, když $\inf \{ f(x);\ x \in M \} > 0$. Dokažte.

133. Nechť f je funkce definovaná v E_1. Rozhodněte, které z následujících podmínek zaručují omezenost funkce f v E_1:

(a) Funkce f je omezená na každé množině $M \subset E_1$.

(b) Funkce f je omezená na každém omezeném intervalu $I \subset E_1$.

(c) Funkce f je omezená na množině M_i, $i \in N$ a $E_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$.

(d) Funkce f je omezená na množině M_i , $i = 1,2,\dots, n$, a

$$E_1 = \bigcup_{i=1}^{n} M_n .$$

134. Nechť f , g , h jsou omezené funkce definované v E_1 ; nechť pro každé $x \in E_1$ je $h(x) \neq 0$. Rozhodněte, zda funkce $f + g$, $f \cdot g$, $1/h$, g/h jsou omezené v E_1 , resp. formulujte postačující podmínky pro omezenost těchto funkcí.

135. Buď f funkce definovaná v intervalu $I \subset E_1$. Potom je funkce f omezená na I tehdy a jen tehdy, když existuje $M \in E_1$ tak, že $|f(x) - f(y)| \leq M$, kdykoli $x , y \in I$. Dokažte.

136. Buďte f_1, f_2 sudé funkce definované v E_1 , g_1 , g_2 liché funkce definované v E_1 . Rozhodněte, která z uvedených funkcí je sudá (resp. lichá): $f_1 + f_2$, $g_1 + g_2$, $f_1 \cdot f_2$, $g_1 \cdot g_2$, $f_1 + g_1$, $f_1 \cdot g_1$.

137. Rozhodněte, zda existuje funkce definovaná v E_1 , která je zároveň sudá i lichá.

138. Nechť f , g jsou konkávní funkce v E_1 . Položme $h_1 = \max (f,g)$, $h_2 = \min (f,g)$. Rozhodněte, zda h_1 , h_2 jsou konkávní funkce v E_1 .

139. Nechť funkce f definovaná v E_1 má tuto vlastnost: Je-li I interval délky $\frac{1}{2}$, je funkce f ryze konvexní na I. Rozhodněte, zda je funkce f ryze konvexní v E_1.

140. Sestrojte funkce f, g, definované na množině M tak, aby pro každé $x \in M$ platilo $f(x) \cdot g(x) = 0$ a neplatilo ani $f(M) = \{0\}$, ani $g(M) = \{0\}$.

Je možno nalézt takové funkce f, g pro libovolnou neprázdnou množinu M?

141. Sestrojte funkce f, g, definované v E_1 tak, aby pro každé $x \in E_1$ bylo $(f \cdot g)(x) \neq (f * g)(x)$. Rozhodněte, zda existují funkce f, g, definované v E_1, pro něž $f \cdot g = f * g$ v E_1, eventuálně najděte všechny dvojice funkcí f, g s touto vlastností.

142. Sestrojte funkce f, φ, definované v E_1, které jsou obě nekonstantní na každém intervalu $I \subset E_1$ a funkce $f * \varphi$ je konstantní v E_1.

Lze tyto funkce sestrojit tak, aby pro všechna $x \in E_1$ platilo $\varphi(x) \neq f(x)$?

143. Rozhodněte, zda platí toto tvrzení:

Je-li funkce f definována v E_1 a pro každý otevřený interval I platí $f(I) \subset I$, potom je $f(x) = x$ pro každé $x \in E_1$.

144. Nechť $a, b, c, d \in E_1$, $a < b$, $c < d$. Sestrojte lineární funkci f, pro niž platí

$$f(\langle a,b \rangle) = \langle c,d \rangle .$$

145. Buďte $f_1, \dots, f_k$ lineární funkce definované v E_1. Potom je funkce $f = f_k * f_{k-1} * \dots * f_1$ lineární v E_1 a f je nekonstantní, právě když je každá z funkcí $f_1, \dots, f_k$ nekonstantní. Dokažte a vypočtěte směrnici funkce f pomocí směrnic funkcí $f_1, \dots, f_k$.

146. Buďte M_1, M_2 neprázdné množiny, množina M_2 nechť je konečná. Nechť f je omezená funkce na $M_1 \cup M_2$. Potom

$$\sup_{x \in M_1 \cup M_2} f(x) = \max \left(\sup_{x \in M_1} f(x), \max_{x \in M_2} f(x)\right).$$

Dokažte.

147. Rozhodněte, zda platí toto tvrzení:

Je-li funkce f omezená na intervalu $I \subset E_1$, potom

$$\sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x) = \sup_{x,y \in I} |f(x) - f(y)| .$$

148. Buď f funkce shora omezená na E_1. Položme $a_n = \sup_{x \in \langle -n,n \rangle} f(x)$.

Potom je

$$\sup_{x \in E_1} f(x) = \lim a_n .$$

Dokažte.

149. Buďte f , g omezené funkce v E_1 . Potom

$$\left| \sup_{x \in E_1} |f(x)| - \sup_{x \in E_1} |g(x)| \right| \leq \sup_{x \in E_1} |f(x) - g(x)| \ .$$

Dokažte.

150. Nechť f a g jsou shora omezené funkce v E_1 . Potom je

$$\sup_{x \in E_1} (f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in E_1} f(x) + \sup_{x \in E_1} g(x) \ .$$

Dokažte.

151. Nechť f , g jsou funkce definované v E_1 . Potom platí

$$\sup_{x \in E_1} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in E_1} |f(x)| + \sup_{x \in E_1} |g(x)| \ .$$

Dokažte.

Sestrojte funkce f , g tak, aby v dokazovaném vztahu neplatila rovnost.

152. Nechť f je omezená funkce definovaná v E_1 , nechť $x_0 \in E_1$. Pro $\delta > 0$ položíme

$$\psi(\delta) = \sup \{ f(x) \ ; \ x \in (x_0 - \delta , x_0 + \delta) \} ,$$

$$\varphi(\delta) = \inf \{ f(x) \ ; \ x \in (x_0 - \delta , x_0 + \delta) \} .$$

Potom je funkce φ (resp. ψ) nerostoucí (resp. neklesající) na $(0, +\infty)$ a platí $\psi - \varphi \geq 0$. Dokažte a sestrojte f a x_0 tak, aby

$$\inf \{ \psi(\delta) - \varphi(\delta) \ ; \ \delta \in (0, +\infty) \} > 0 \ .$$

153. Nechť f je definována v E_1. Jestliže není $f(E_1)$ jednobodová množina, potom existuje $a > 0$ tak, že a není periodou funkce f. Dokažte.

154. Sestrojte nekonstantní periodickou funkci v E_1, pro niž je každé kladné racionální číslo periodou.

155.* Rozhodněte, zda platí toto tvrzení:

Je-li f periodická funkce v E_1, pro niž je každé kladné racionální číslo periodou, potom existují $a, b \in E_1$ tak, že pro každé $x \in E_1$ je

$$f(x) = a \, . \, D(x) + b \, .$$

156. Nechť f, g jsou funkce definované v E_1. Potom

$$\{x \in E_1 \, ; \, f(x) > g(x)\} = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \left(\{x \in E_1 \, ; \, f(x) > \frac{n}{m}\} \cap \right.$$

$$\left. \cap \, \{x \in E_1 \, ; \, g(x) < \frac{n}{m}\} \right) .$$

Dokažte.

157.* Nechť f je funkce definovaná v E_1. Potom existují funkce f^+, f^-, definované v E_1, s těmito vlastnostmi:

(a) $f = f^+ - f^-$;

(b) $f^+ \geq 0$, $f^- \geq 0$;

(c) Je-li $f = f_1 - f_2$, kde $f_1 \geq 0$, $f_2 \geq 0$, potom existuje funkce $h \geq 0$ tak, že $f_1 = f^+ + h$, $f_2 = f^- + h$.

Dále platí $|f| = f^+ + f^-$. Dokažte.

§ 4. LIMITA A SPOJITOST FUNKCE

Pro $x \in E_1$ užíváme postupně symbolů

$$\lim_{t \to x} f(t) \ , \ \lim_{t \to x+} f(t) \ , \ \lim_{t \to x-} f(t)$$

pro označení limity funkce f v bodě x, resp. limit funkce f v bodě x zprava a zleva. Posledním dvěma říkáme jednostranné limity funkce f v bodě x. K označení limit v bodech $+\infty$ a $-\infty$ užíváme symbolů $\lim_{t \to \infty} f(t)$ a $\lim_{t \to -\infty} f(t)$.

Zřejmým způsobem zavádíme podobně spojitost funkce f v bodě x zprava, resp. zleva a mluvíme pak o jednostranné spojitosti funkce f.

Dále užíváme této obvyklé konvence: např. výrok "funkce f je spojitá v intervalu $\langle a,b)$" znamená, že f je spojitá v každém bodě $x \in (a,b)$ a f je zprava spojitá v bodě a. Podobně chápeme výrok "funkce f je spojitá v intervalu I" pro případ, že I je uzavřený nebo polouzavřený interval.

Připomínáme ještě, že např. výrok "funkce f je v bodě x rostoucí zprava" znamená, že existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $t \in (x, x+\delta)$ platí $f(x) < f(t)$; analogicky jsou definovány "ostatní případy" jednostranné monotonie funkce f v bodě x.

Budeme říkat, že funkce f má v intervalu I Darbouxovu vlastnost, jestliže pro každé dva body $x, y \in I$, $x < y$, a každé číslo t mezi hodnotami $f(x)$, $f(y)$ (tj. každé t, pro něž platí

$$\min(f(x), f(y)) \leq t \leq \max(f(x), f(y))\ )$$

existuje $z \in \langle x,y \rangle$ tak, že $f(z) = t$.

Ostatní označení a pojmy považujeme za běžné a čtenáři je nepřipomínáme.

158. Najděte nutné a postačující podmínky, kterým musí vyhovovat konvergentní posloupnost reálných čísel $\{x_n\}$, aby existovala limita

$$\lim x_n D(x_n) .$$

159. Rozhodněte, zda existuje posloupnost $\{x_n\}$, pro niž platí některá z následujících podmínek:

(a) právě jedna z posloupností $\{x_n\}$, $\{D(x_n)\}$, je konvergentní;

(b) obě posloupnosti $\{x_n\}$, $\{D(x_n)\}$ jsou konvergentní;

(c) žádná z posloupností $\{x_n\}$, $\{D(x_n)\}$ není konvergentní.

160. Rozhodněte, zda existuje posloupnost $\{x_n\}$ taková, pro niž neexistuje $\lim D(D(x_n))$.

161. Sestrojte posloupnost kladných racionálních čísel (resp. iracionálních čísel) $\{x_n\}$ tak, aby platilo

$$\lim \left(\frac{1}{x_n} \cdot \sin \frac{1}{x_n}\right) = +\infty .$$

162. Sestrojte posloupnost $\{x_n\}$ racionálních čísel (resp. iracionálních čísel) tak, aby $\lim x_n = 0$ a pro každé $n \in N$ je $\cos \frac{1}{x_n} > \frac{1}{2}$.

163. Nechť $a \in E_1$, $x_0 \in E_1^*$. Rozhodněte, zda existují funkce f, g takové, aby platilo

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = a ,$$

přičemž je splněna některá z následujících podmínek:

(a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$;

(b) existuje právě jedna z limit

$$\lim_{x \to x_0} f(x) , \quad \lim_{x \to x_0} g(x) ;$$

(c) obě limity $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ neexistují.

164. Úloha 163 byla motivována větou o limitě součtu dvou funkcí. Zformulujte a řešte analogickou úlohu, související s větou o limitě součinu funkcí.

165. Nechť $x_0 \in E_1^*$. Rozhodněte, zda pro každé $a, b \in E_1$ existují funkce f , g , pro které platí

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = a ,$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) . g(x)) = b .$$

166. Nechť $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Sestrojte funkci g tak, aby byla splněna tato podmínka: Ke každému $a \in E_1^*$ existuje posloupnost $\{x_n\}$, pro niž je

$$\lim x_n = +\infty \quad \text{a} \quad \lim (f(x_n) + g(x_n)) = a .$$

167. Nechť funkce f je definována v okolí $U(0)$ bodu 0 a nenabývá v něm hodnoty 0 . Sestrojte funkci g definovanou v $U(0)$ tak, aby byla splněna podmínka: Ke každému $a \in E_1^*$ existuje posloupnost $\{x_n\}$, pro niž je

$$\lim x_n = 0 \quad \text{a} \quad \lim (f(x_n) \cdot g(x_n)) = a .$$

168. Nechť platí $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$. Sestrojte funkci g , pro kterou existuje $\lim_{x \to 0} g(x)$ různé od nuly a neexistuje

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} .$$

Existuje funkce g vyhovující podmínkám úlohy taková, pro kterou je $\lim_{x \to 0} g(x)$ vlastní ?

169. Rozhodněte, zda existuje funkce f definovaná na E_1 , pro kterou v každém bodě $y \in E_1$ existuje $\lim_{x \to y} f(x)$, která není vlastní pro žádné $y \in E_1$ (resp. která není vlastní pro žádné $y \in E_1 - \{0\}$ a je $\lim_{x \to 0} f(x) \in E_1$) .

170. Nechť pro $y \in E_1$ a funkci f platí

$$\lim_{x \to y} f(x) = +\infty .$$

Sestrojte funkci g takovou, aby existovala vlastní limita

$$\lim_{x \to y} g(f(x)) .$$

Lze volit funkci g tak, aby nebyla konstantní na žádném okolí $U(\infty)$?

171. Nechť $y \in E_1$. Sestrojte funkci f definovanou v E_1, pro kterou existuje vlastní limita $\lim_{x \to y} f(x)$ a pro každé $y' \neq y$ neexistuje vlastní $\lim_{x \to y'} f(x)$.

172. Nechť $y \in E_1$. Sestrojte funkci f definovanou v E_1 tak, aby existovala $\lim_{x \to z} f(x)$ právě pro $z = y$ a aby platilo

$$\lim_{x \to y} f(x) = +\infty \quad (\text{resp. } \lim_{x \to y} f(x) = 0) .$$

173. Sestrojte funkci f definovanou v E_1 tak, aby posloupnost $\{f(n)\}$ měla limitu a neexistovala $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Existuje spojitá funkce f , splňující shora uvedené podmínky?

174. Sestrojte funkci f definovanou v E_1 tak, aby pro každé $r \in Q$ existovala

$$\lim_{n \to \infty} f(n + r) = 0 \quad , \; n \in N \, ,$$

a neexistovala $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Existuje spojitá (resp. stejnoměrně spojitá) funkce f , splňující shora uvedené podmínky ?

175. Dokažte pomocí " ε - δ definice" spojitost funkce f určené předpisem

$$f(x) = 2x^2 - 3x - 1 \, , \quad x \in E_1 \, ,$$

v bodě $x_0 = 2$.

176. Rozhodněte, zda existuje funkce f definovaná v E_1 , která splňuje podmínku

$$\bigwedge_{y \in M} \bigvee_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x} [(0 < |x - y| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon] \, ,$$

přičemž volte:

(a) $M = \{0\}$; (b) $M = N$; (c) $M = \{1/n \, ; \, n \in N\}$.

* Jaké nutné a postačující podmínky musí množina $M \subset E_1$ splňovat, aby funkce f uvedené vlastnosti existovala ?

177.* Rozhodněte, zda existuje funkce definovaná v E_1 , která splňuje podmínku

$$\bigwedge_{y \in E_1} \bigvee_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x} [(0 < |x - y| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon)] \, .$$

178. Nechť f je spojitá funkce na $\langle 0,1 \rangle$, pro niž $f(\langle 0,1\rangle) \subset \langle 0,1 \rangle$. Potom existuje $x_0 \in \langle 0,1 \rangle$ tak, že $f(x_0) = x_0$. Dokažte.

179. Rozhodněte o platnosti tvrzení:

Nechť funkce f definovaná v E_1 je prostá v E_1 , $f(E_1) = E_1$. Potom funkce f je spojitá alespoň v jednom bodě $x \in E_1$.

180. Sestrojte funkci f definovanou v E_1 tak, aby každý otevřený interval $I \subset E_1$ obsahoval bod, v němž je funkce f spojitá, a bod, v němž je funkce f nespojitá.

181. Nechť funkce f je definována na intervalu $\langle 0,1 \rangle$, zobrazuje tento interval na interval $\langle 0,1 \rangle$ a je na $\langle 0,1 \rangle$ prostá. Rozhodněte, zda f je spojitá (resp. jednostranně spojitá) alespoň v jednom bodě $x \in \langle 0,1 \rangle$.

182. Rozhodněte o platnosti věty:

Nechť funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in E_1$ a funkce g je omezená v jistém okolí $U(x_0)$ bodu x_0 . Potom funkce $f \cdot g$ je spojitá v bodě x_0 .

183. Nechť funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in E_1$, $f(x_0) = 0$ a funkce g je omezená v jistém okolí $U(x_0)$ bodu x_0 . Potom je funkce $f.g$ spojitá v bodě x_0 .

Dokažte a porovnejte s tvrzením uvedeným ve cvičení 182.

184. Dokažte následující větu:

Nechť f je spojitá funkce v E_1. Potom je funkce $D \cdot f$ spojitá právě v bodech množiny

$$\{x \in E_1 \; ; \; f(x) = 0\} .$$

185. Nechť $A \subset E_1$ je konečná množina. Sestrojte funkci f definovanou v E_1, která je spojitá právě ve všech bodech množiny A.

186. Sestrojte funkci f definovanou v E_1, která je spojitá právě v bodech množiny $M \subset E_1$, přičemž za množinu M postupně volte množiny $\emptyset$, N, $\{1/n \; ; \; n \in N\}$, $E_1 - Q$.

187.* V souvislosti s úlohou 186 rozhodněte, zda existuje množina $A \subset E_1$ taková, aby neexistovala funkce f definovaná v E_1 a spojitá právě ve všech bodech množiny A.

188. Sestrojte funkci f definovanou v E_1, která je nespojitá v každém bodě $x \in E_1$, přičemž je jednostranně spojitá právě v bodech množiny $M \subset E_1$. Za množinu M volte postupně množiny $\emptyset$, $\{0\}$, $\{1/n \; ; \; n \in N\}$, N.

189. Rozhodněte o platnosti věty:

Následující podmínky jsou pro funkci f definovanou v E_1 ekvivalentní:

(a) funkce f je spojitá v bodě x_0 ;

(b) pro každou monotonní posloupnost $\{x_n\}$, $\lim x_n = x_0$, je $\lim f(x_n) = f(x_0)$.

190. Nahraďte v úloze 189 podmínku (b) podmínkou

(b_1) pro každou posloupnost $\{x_n\}$, $\{x_n ; n \in N\} \subset Q$, $\lim x_n = x_0$, je $\lim f(x_n) = f(x_0)$, resp.

(b_2) pro každou posloupnost $\{x_n\}$, pro niž $\{x_n ; n \in N\}$, je podmnožinou Q nebo $E_1 - Q$ a $\lim x_n = x_0$, je $\lim f(x_n) = f(x_0)$;

zkoumejte platnost takto vzniklých vět.

191. Sestrojte funkci f , která je definována v E_1 a je spojitá v bodě 0 , přičemž obrazem žádného okolí $U(0)$ není ani interval ani jednobodová množina.

192. Sestrojte funkci f definovanou v E_1 , která má některou z uvedených vlastností:

(a) f je spojitá v bodě 0 ;

(b) f je spojitá právě v bodě 0 ;

(c) f je spojitá právě v bodě 0 a zobrazuje každé okolí $U_\delta(0)$, $\delta > 0$, na interval;

(d)* f je spojitá právě v bodě 0 a zobrazuje každé okolí $U(0)$ na interval.

193. Sestrojte funkci f definovanou v E_1, která splňuje některou z následujících podmínek:

(a) f není spojitá v bodě 0 ;

(b) f není spojitá právě v bodě 0 ;

(c) f je spojitá v $E_1 - \{0\}$ a neexistují obě jednostranné limity funkce f v bodě 0 .

194. Dokažte tvrzení:

Jsou-li f_1, f_2, f_3 funkce takové, že funkce $f_1 + f_2 + f_3$ je spojitá v bodě $x_0 \in E_1$, pak jsou buď všechny tyto tři funkce spojité v bodě x_0 nebo alespoň dvě z nich nejsou spojité v bodě x_0 .

Ukažte na příkladech, že mohou nastat obě možnosti.

195. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

(a) Nechť funkce f definovaná v E_1 není shora omezená v žádném okolí $U(0)$. Potom $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

(b) Nechť je $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$. Potom existuje $U(0)$ takové, že funkce f je zdola omezená v $U(0)$.

196. Nechť funkce f je definována v E_1. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

(a) Nechť existuje okolí $U(0)$, na němž funkce f není omezená. Potom funkce f není spojitá v bodě 0.

(b) Nechť funkce f není omezená na žádném okolí bodu 0. Potom funkce f není spojitá v bodě 0.

197. Nechť funkce f je definována v E_1 a pro každé $y \in E_1$ je $\lim_{x \to y} f(x) = 0$. Rozhodněte, zda pak platí některá z následujících podmínek:

(a) $f(E_1) = \{0\}$;

(b) funkce f je spojitá v E_1;

(c) funkce f je omezená v E_1;

(d) funkce f je omezená na každém omezeném intervalu $I \subset E_1$.

198.* Nechť funkce f je definována v E_1 a pro každé $y \in E_1$ platí

$$\lim_{x \to y} f(x) = 0 .$$

Potom množina $\{x \in E_1 ; f(x) \neq 0\}$ je spočetná. Dokažte.

199.* Pro každou spočetnou množinu $M \subset E_1$ sestrojte funkci f definovanou v E_1 takovou, že funkce f je nespojitá právě v bodech množiny M a pro každé $y \in E_1$ platí

$$\lim_{x \to y} f(x) = 0 .$$

200.* Rozhodněte, zda existuje funkce f definovaná v E_1 taková, že pro každé $y \in E_1$ existuje limita $\lim\limits_{x \to y} f(x)$ a platí

$$\lim_{x \to y} f(x) \neq f(y) .$$

201. Nechť f je funkce definovaná v E_1, která je neomezená na každém otevřeném intervalu $I \subset E_1$. Rozhodněte, zda platí některá z následujících podmínek:

(a) f je nespojitá v každém bodě $y \in E_1$;

(b) pro každé $y \in E_1$ neexistuje vlastní $\lim\limits_{x \to y} f(x)$;

(c) pro každé $y \in E_1$ neexistuje $\lim\limits_{x \to y} f(x)$.

202.* Rozhodněte, zda existuje funkce f definovaná v E_1, pro niž v každém bodě $y \in E_1$ platí

(a) $\lim\limits_{x \to y} f(x) < f(y)$.

Řešte obdobnou úlohu pro případ, že nahradíte podmínku (a) podmínkou

(b) $\lim\limits_{x \to y} f(x) \leq f(y)$.

203. V souvislosti s úlohou 202 řešte tuto úlohu:

Rozhodněte, zda lze k dané množině $M \subset E_1$ nalézt funkci f definovanou v E_1, která ve všech bodech $y \in E_1$ splňuje podmínku (b) a právě v bodech $y \in M$ podmínku (a) z úlohy 202 .

* Hledejte nějaké postačující, eventuálně nutné a postačující podmínky, které musí splňovat množina M, aby funkce f uvedených vlastností existovala.

204. Nechť pro funkci f definovanou v E_1 a bod $y \in E_1$ platí

(a) $\lim\limits_{x \to y} f(x) \leq f(y)$.

Potom platí podmínka

(b) $\bigwedge\limits_{c > f(y)} \bigvee\limits_{U(y)} \bigwedge\limits_{x \in U(y)} (f(x) < c)$.

Dokažte.

205. Zkoumejte vzájemnou závislost podmínek (a) a (b) z předchozí úlohy, tj. rozhodněte, zda platí:

Nechť funkce f splňuje podmínku (b) z úlohy 204 . Pak též splňuje podmínku (a) z téže úlohy.

(Uvědomte si, že jsme v úlohách 202, 204 mohli pracovat s funkcí f , definovanou na nějakém okolí $U(y)$ bodu y .)

206. O funkci f , definované v jistém okolí bodu $y \in E_1$ a splňující podmínku (b) z úlohy 204 říkáme, že je shora polospojitá v bodě y . Splňuje-li funkce f podmínku

(b') $\bigwedge\limits_{c < f(y)} \bigvee\limits_{U(y)} \bigwedge\limits_{x \in U(y)} (f(x) > c)$,

říkáme, že je zdola polospojitá v bodě y . Rozhodněte, zda funkce f , která splňuje (b) i (b'), je spojitá v bodě y .

207. Sestrojte rostoucí nespojitou funkci f, definovanou v intervalu $\langle a,b \rangle \subset E_1$ a funkci g monotonní na intervalu $\langle f(a), f(b) \rangle$ tak, aby funkce $g * f$ byla spojitá v intervalu $\langle a,b \rangle$.

Rozhodněte, zda lze navíc požadovat, aby g byla ryze monotonní.

208. Dokažte následující tvrzení:

Nechť g je kladná spojitá funkce v E_1, f je spojitá funkce definovaná v E_1 a pro každé $x \in E_1$ platí $f^2(x) = g^2(x)$. Potom existuje $\varepsilon \in \{-1,1\}$ takové, že pro každé $x \in E_1$ platí

$$f(x) = \varepsilon \cdot g(x) .$$

209. Platí tvrzení, které dostaneme z věty v úloze 208 záměnou předpokladu " g je kladná spojitá funkce" za předpoklad " g je nezáporná spojitá funkce" ?

210. Zkoumejte, zda předpoklad spojitosti funkce f v úloze 208 je podstatný, tj. zda platí obdobná věta, kterou z věty v úloze 208 obdržíme vynecháním předpokladu "funkce f je spojitá".

211. Dokažte tvrzení:

Je dán interval $\langle a,b \rangle \subset E_1$ a funkce f spojitá na $\langle a,b \rangle$. Je-li pro každé $y \in E_1$ množina $f_{-1}(y)$ konečná, je funkce f v každém bodě $x \in (a,b \rangle$ ryze monotonní zleva.

Jsou všechny předpoklady této věty podstatné ? V souvislosti s touto otázkou řešte následující úlohy.

212. Na intervalu $\langle a,b \rangle \subset E_1$ definujte funkci f tak, aby pro každé $y \in E_1$ byla množina $f_{-1}(y)$ konečná a funkce f nebyla pro žádné $x \in \langle a,b \rangle$ ani zleva ani zprava ryze monotonní.

213. Na intervalu $\langle a,b \rangle \subset E_1$ definujte spojitou funkci f tak, aby existoval bod $y \in E_1$, pro který množina $f_{-1}(y) \cap \langle a,b \rangle$ je nekonečná.

214. Nechť je dán interval $\langle a,b \rangle \subset E_1$ a funkce $f: \langle a,b \rangle \longrightarrow E_1$, která je v každém bodě $x \in \langle a,b)$ ryze monotonní zprava a v každém bodě $x \in (a,b \rangle$ ryze monotonní zleva. Rozhodněte, zda pak platí některá z podmínek ;

(a) funkce f je spojitá v $\langle a,b \rangle$;

(b) množina $f_{-1}(y)$ je konečná pro každé $y \in E_1$.

215. Jako poslední v sérii úloh bezprostředně souvisejících s úlohou 211 řešte tento problém:

Nechť f je spojitá funkce na $\langle a,b \rangle \subset E_1$ a nechť f nabývá alespoň jedné své hodnoty jen v konečně mnoha bodech z intervalu $\langle a,b \rangle$. Rozhodněte, zda existuje bod $x_0 \in \langle a,b \rangle$, v němž je funkce f ryze monotonní zprava nebo zleva.

216. Sestrojte funkci f spojitou v E_1, která není ani shora ani zdola omezená. Zjistěte pak, zda je množina

$$A = \{x \in E_1 \ ; \ f(x) = 0\}$$

neprázdná, resp. konečná, resp. omezená a podobně. Rozhodněte, zda množina A je neprázdná pro každou funkci f shora uvedených vlastností.

217. Sestrojte funkci f spojitou na intervalu $\langle 0, +\infty)$, která není shora ani zdola omezená. Zjistěte pak, zda je množina

$$A = \{x \in \langle 0, +\infty) \ ; \ f(x) = 0\}$$

neprázdná, resp. konečná, resp. omezená apod. Rozhodněte, zda množina A je neomezená pro každou funkci f shora uvedených vlastností.

218. Nechť $\{x_n\}$ je klesající posloupnost, $\lim x_n = 0$. Sestrojte funkci f definovanou v E_1 takovou, že $f(x) = 0$, právě když $|x| \in \{x_n \ ; \ n \in N\}$ nebo $x = 0$, přičemž f je spojitá v E_1 (resp. spojitá v $E_1 - \{0\}$ a nespojitá v bodě 0).

219. Sestrojte funkci f definovanou v E_1, pro kterou platí $f(E_1) \subset Q$ (množina racionálních čísel). Charakterizujte všechny funkce spojité v E_1, které mají tuto vlastnost.

220. Dokažte, že funkce spojitá v E_1, která je rovna nule v každém racionálním čísle, je rovna nule v celém E_1.

221. Rozhodněte, zda existuje funkce f spojitá v E_1, $f(E_1) \neq \{0\}$, a pro kterou platí: Pro každý interval $I \subset E_1$ existuje $x \in I$ tak, že $f(x) = 0$.

222. Buď f funkce definovaná v E_1 a nechť pro každé $x \in E_1$ existuje konečná $\lim_{t \to x} f(t)$. Dokažte, že funkce g definovaná předpisem

$$g(x) = \lim_{t \to x} f(t) \quad \text{pro} \quad x \in E_1$$

je spojitá v E_1.

223. Dokažte tvrzení:

Nechť f je monotonní v intervalu $I \subset E_1$. Potom existuje alespoň jeden bod $x_0 \in I$, v němž je funkce f spojitá.

224.* Existuje spojitá funkce $f: \langle 0,1 \rangle \longrightarrow \langle 0,1 \rangle$, která není monotonní na žádném intervalu $I \subset \langle 0,1 \rangle$. Dokažte.

225. Nechť f je spojitá funkce v intervalu $\langle a,b \rangle \subset E_1$, $f(a) > 0$. Označme

$$y = \sup \{t \in \langle a,b) \; ; \; f(t) > 0\}.$$

Potom je $f(y) = 0$ nebo $y = b$. Dokažte.

226. Sestrojte spojitou nezápornou funkci f definovanou v E_1 takovou, že pro každé $n \in N$ platí $0 \in f(\langle n, +\infty))$ a f není omezená na intervalu $\langle n, +\infty)$.

227. Rozhodněte, zda platí toto tvrzení:

Nechť funkce f definovaná v E_1 má tuto vlastnost: Pro každý interval $I \subset E_1$ je $I - f(E_1) \neq \emptyset$. Potom f je konstantní nebo není spojitá v žádném bodě $x \in E_1$.

228. Dokažte tvrzení:

Nechť funkce f definovaná v E_1 je nekonstantní a neklesající v E_1 . Označme $(\inf f(E_1), \sup f(E_1)) = I$. Jestliže pro libovolný otevřený interval $J \subset I$ je $J \cap f(E_1) \neq \emptyset$, je funkce f spojitá.

229. Nechť I je otevřený interval v E_1 . Sestrojte kladnou funkci f, definovanou na I tak, aby funkce $1/f$ byla neomezená na každém otevřeném intervalu $J \subset I$.

Lze sestrojit tuto funkci f tak, aby byla spojitá v I ?

230. Sestrojte prostou spojitou funkci f definovanou na E_1 , pro niž platí $f(E_1) = (-1,1)$.

231. Rozhodněte, zda existuje funkce f prostá v intervalu $(-1, 1)$, pro kterou platí $f((-1, 1)) = E_1$ a f_{-1} není spojitá v E_1 .

232. Rozhodněte, zda existuje funkce f prostá na $(-1, 1)$,pro niž $f((-1, 1)) = E_1$ a f_{-1} není spojitá v žádném bodě z E_1 .

233. Sestrojte spojitou funkci f , která zobrazuje interval $(a,b) \subset$ $\subset E_1$ na interval $\langle a,b \rangle$.

Lze tuto funkci f nalézt tak, aby byla navíc prostá na (a,b) ?

234. Sestrojte funkce f, g rostoucí a spojité v E_1 tak, aby pro každé $x \in E_1$ platilo

$$x^2 = f(x) - g(x) .$$

235. Dokažte následující tvrzení:

Nechť funkce f , g jsou spojité v intervalu $I \subset E_1$. Potom funkce $|f|$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ jsou spojité v intervalu I.

236. Nechť funkce f je spojitá v E_1. Pro libovolná α, $\beta \in E_1$, $\alpha < \beta$, definujeme funkci f_α^β předpisem

$$f_\alpha^\beta(x) = \min(\max(f(x), \alpha), \beta), \quad x \in E_1 .$$

Potom funkce f_α^β je spojitá v E_1. Dokažte.

237. Nechť f, g jsou spojité funkce v intervalu $\langle 0,1 \rangle$. Potom

$$\max_{x \in \langle 0,1 \rangle} |f(x) + g(x)| \leq \max_{x \in \langle 0,1 \rangle} |f(x)| + \max_{x \in \langle 0,1 \rangle} |g(x)| .$$

Dokažte.

238. Sestrojte funkce f, g v úloze 237 tak, aby v dokazované nerovnosti platila ostrá nerovnost.

239. Dokažte tvrzení:

Nechť každé $a \in E_1$ je periodou funkce f. Potom funkce f je konstantní.

240. Dokažte tvrzení:

Nechť $a \in E_1$ je periodou funkce f. Pak též číslo $-a$ je periodou funkce f.

241. Dokažte tvrzení:

Nechť f je nekonstantní periodická funkce v E_1. Potom neexistuje $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

242. Rozhodněte o platnosti tvrzení:

Nechť $\{a_n\}$ je prostá posloupnost, $\lim a_n = a \in E_1$. Je-li pro každé $n \in N$ číslo a_n periodou funkce f, je též a periodou funkce f.

243. Rozhodněte o platnosti tvrzení:

Nechť $I \subset (0, +\infty)$ je otevřený interval a nechť každé $a \in I$ je periodou funkce f. Potom funkce f je konstantní.

244. Dokažte tvrzení:

Nechť $x_0 \in E_1$ a nechť nekonstantní periodická funkce f je spojitá v bodě x_0. Potom existuje nejmenší kladná perioda funkce f.

245. Sestrojte funkce f, g definované v E_1 a nespojité ve všech bodech $x \in E_1$ tak, aby $f + g$, resp. $f \cdot g$, resp. $|f|$ byly funkce spojité v E_1.

246. Sestrojte funkci f definovanou v E_1 tak, aby $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ a pro každé $n \in N$ existoval otevřený interval $I_n \subset (n, +\infty)$

tak, že funkce f je klesající na I_n .

247. Pro funkci f spojitou v intervalu $\langle a,b \rangle \subset E_1$ položme

$$\omega(f ; \langle a,b \rangle) = \sup_{x \in \langle a,b \rangle} f(x) - \inf_{x \in \langle a,b \rangle} f(x) .$$

Dokažte, že platí:

(a) $\omega(f ; \langle a,b \rangle) \geq 0$;

(b) $\omega(f ; \langle a,b \rangle) = 0$, právě když funkce f je konstantní v intervalu $\langle a,b \rangle$.

248. Nechť f je spojitá funkce na intervalu $\langle a,b \rangle \subset E_1$. Pro $x \in (a,b \rangle$ položme

$$g(x) = \omega(f ; \langle a,x \rangle) , \quad g(a) = 0 .$$

Rozhodněte, zda funkce g je spojitá na intervalu $\langle a,b \rangle$.

249. Nechť f je omezená funkce definovaná v E_1 a $M \subset E_1$. Potom klademe

$$\omega(f ; M) = \sup \{f(x); x \in M\} - \inf \{f(x) ; x \in M\} .$$

Číslo $\omega(f ; M)$ nazýváme oscilací funkce f na množině M . Dokažte, že platí

(a) $\omega(\alpha f ; M) = |\alpha| \, \omega(f ; M)$ pro všechna $\alpha \in E_1$;

(b) $\omega(f + g ; M) \leq \omega(f ; M) + \omega(g ; M)$.

250. V souvislosti s úlohami 247, 249 zavedeme pro omezenou funkci f definovanou v E_1 a $x \in E_1$

$$\omega f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \omega(f\ ;\ U_\varepsilon(x))\ .$$

Hodnotu $\omega f(x)$ nazýváme oscilací funkce f v bodě x. Nechť $x_0 \in E_1$. Potom platí $\omega f(x_0) = 0$, právě když je funkce f spojitá v bodě x_0. Dokažte.

251. Nechť f je rostoucí funkce v E_1. Definujme

$$g(t) = \inf_{x \in (t,\infty)} f(x) - \sup_{x \in (-\infty,t)} f(x)\ .$$

Potom funkce f je spojitá v E_1, právě když $g(t) = 0$ pro všechna $t \in E_1$. Dokažte a porovnejte ωf (z úlohy 250) a g.

252. Budiž $n \in N$. Sestrojte funkci f definovanou v E_1, která každé hodnoty $y \in E_1$ nabývá v právě n různých bodech.

Sestrojte dále funkci f definovanou v E_1, pro niž množina $f_{-1}(y)$ je nekonečná pro každé $y \in E_1$.

253. Sestrojte spojitou funkci f definovanou v E_1, pro niž množina $f_{-1}(y)$ obsahuje právě 5 prvků pro každé $y \in E_1$.

254.* Sestrojte spojitou funkci f definovanou v E_1, pro kterou množina $f_{-1}(y)$ je nekonečná pro každé $y \in E_1$.

Existuje funkce f žádané vlastnosti taková, aby existovaly obě limity $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$?

255. Rozhodněte, pro která $n \in N$ existuje funkce f spojitá v E_1, pro kterou množina $f_{-1}(y)$ obsahuje pro každé $y \in E_1$ právě n prvků.

256.* V souvislosti s úlohou 255 se vrátíme ještě jednou k úloze 252. K danému $n \in N$ označme F_n množinu všech funkcí f definovaných v E_1, které jsou řešením úlohy 255. Každé funkci $f \in F_n$ přiřadíme d_f $(0 \leq d_f \leq +\infty)$ tak, že d_f určuje počet všech bodů nespojitosti funkce f. Najděte pro všechna $n \in N$

$$\inf \{ d_f \, ; \, f \in F_n \} .$$

257. Nechť f je kladná konvexní funkce na intervalu $I \subset E_1$. Rozhodněte, zda funkce $\log f$ je konvexní v I.

258.* Nechť funkce f je konkávní a nezáporná v E_1. Potom je f konstantní v E_1. Dokažte.

259.* Je-li f funkce definovaná v E_1 taková, že f a $|f|$ jsou konvexní funkce v E_1, je f nezáporná nebo konstantní v E_1. Dokažte.

260. Rozhodněte, zda platí tvrzení:

Nechť funkce f je spojitá v intervalu $\langle 0, +\infty)$ a existuje $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. Potom funkce f je stejnoměrně spojitá v intervalu $\langle 0, +\infty)$.

Platí obdobné tvrzení, budeme-li předpokládat, že uvažovaná $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ je vlastní?

261. Rozhodněte, zda platí tvrzení:

Nechť $a \in (0, +\infty)$ a funkce f je spojitá v intervalu $\langle 0,a)$, $\lim_{x \to a-} f(x) = +\infty$. Potom funkce f není stejnoměrně spojitá v intervalu $\langle 0,a)$.

Platí obdobné tvrzení pro případ $a = +\infty$?

262. Rozhodněte, zda platí tvrzení:

Nechť $a \in (0, +\infty)$ a funkce f je spojitá v intervalu $\langle 0,a)$, $\lim_{x \to a-} f(x)$ neexistuje. Potom f není stejnoměrně spojitá v intervalu $\langle 0,a)$.

Platí obdobné tvrzení pro případ $a = +\infty$?

263. Nechť f je spojitá funkce v E_1 a nechť $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = a$.

Je-li $a \in E_1$, nabývá funkce f svého maxima či minima. Je-li $a = +\infty$, nabývá funkce f svého minima a nenabývá maxima. Je-li $a = -\infty$, nabývá funkce f svého maxima a nenabývá svého minima. Dokažte.

264. Nechť f je spojitá funkce v E_1 a nechť existují vlastní limity $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \beta$, $\alpha < \beta$. Jestliže $f(E_1) - (\alpha, \beta) \neq \emptyset$, nabývá funkce f svého maxima nebo minima. Dokažte toto tvrzení a formulujte např. nutnou a postačující podmínku, kterou musí splňovat funkce f shora uvedených vlastností, aby nabývala svého maxima.

265. Sestrojte funkci f spojitou na intervalu $\langle 0, +\infty)$ tak, aby $f(\langle 0, +\infty))$ byl otevřený interval v E_1 .

Lze nalézt tuto funkci f tak, aby splňovala ještě podmínku

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = f(0) \ ?$$

266. Dokažte tvrzení:

Nechť funkce f je spojitá v intervalu $\langle 0, +\infty)$ a nechť platí $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(0)$. Potom funkce f nabývá v intervalu $\langle 0, +\infty)$ svého maxima i minima.

267. Dokažte:

Nechť funkce f je spojitá v intervalu $\langle 0, +\infty)$ a nechť existuje $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Potom funkce f nabývá v intervalu $\langle 0, +\infty)$ svého maxima nebo minima.

Sestrojte příslušné příklady k tomuto tvrzení.

268. Nechť f je spojitá funkce v intervalu $(a,b) \subset E_1$ a nechť limity $\lim_{x \to a+} f(x)$, $\lim_{x \to b-} f(x)$ jsou nevlastní. Potom funkce f nabývá buď svého maxima v (a,b) , nebo nabývá svého minima v (a,b) , nebo $f((a,b)) = E_1$; nastává právě jeden z těchto tří případů. Dokažte.

269. Dokažte tvrzení:

Nechť f je spojitá funkce v E_1 . Jestliže f není omezená v E_1 , potom alespoň jedna z limit $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ neexistuje nebo není vlastní. Srovnejte tuto úlohu s úlohami 264 a 268 .

270. Sestrojte funkce f, g stejnoměrně spojité na intervalu $I \subset E_1$ tak, aby funkce $f \cdot g$ nebyla stejnoměrně spojitá v I .

Má tato úloha řešení pro každý interval $I \subset E_1$?

271. Rozhodněte, zda platí věta:

Nechť $I \subset E_1$ je interval a funkce f , $\operatorname{sgn} f$ jsou spojité na tomto intervalu. Potom $\inf \{ |f(x)| ; x \in I \} > 0$.

272. Nechť funkce f a $\operatorname{sgn} f$ jsou spojité na intervalu $\langle a,b \rangle \subset E_1$. Potom $\inf \{ |f(x)| ; x \in \langle a,b \rangle \} > 0$. Dokažte.

273. Rozhodněte o platnosti tvrzení:

Nechť $I \subset E_1$ je otevřený interval a nechť obě funkce f, $1/f$ jsou stejnoměrně spojité v I. Potom $\operatorname{sgn} f$ je spojitá funkce v I a $\inf\{|f(x)| ; x \in I\} > 0$.

Zkoumejte platnost tvrzení, které vznikne z předcházejícího tvrzení doplněním o předpoklad " I je omezený interval".

274. Nechť f, g jsou spojité funkce, definované na intervalu $I \subset E_1$ a nechť pro každé $x \in I$ platí $f(x) \cdot g(x) > 0$. Potom obě funkce f, g jsou kladné nebo obě záporné v intervalu I. Dokažte.

275. Nechť funkce f je spojitá v intervalu $\langle a,b \rangle$. Potom

$$\sup\{f(t) ; t \in \langle a,b \rangle\} = \sup\{f(t) ; t \in \langle a,b \rangle \cap Q\} .$$

Dokažte.

276. Rozhodněte, zda pro každou funkci f spojitou v E_1, platí

$$\sup\{x ; f(x) > 0\} = \sup\{x ; f(x) \geq 0\} .$$

277. Nechť $I \subset E_1$ je libovolný interval. Nechť funkce f je monotonní, spojitá a omezená v intervalu I. Potom je funkce f stejnoměrně spojitá v I. Dokažte.

278. Buď $I \subset E_1$ interval. Potom I je omezený a uzavřený interval právě tehdy, nabývá-li každá funkce spojitá na I svého maxima v I. Dokažte.

279. Nechť $I \subset E_1$ je interval. Potom I je omezený a uzavřený interval, právě když každá lineární funkce nabývá na I svého maxima. Dokažte.

280. Nechť $I \subset E_1$ je interval. Potom I je omezený a uzavřený interval, právě když funkce $f(x) = x$, $x \in I$, nabývá v I svého maxima a minima. Dokažte.

Srovnejte tvrzení z úloh 279, 280 s tvrzením: Nechť $I \subset E_1$ je omezený a uzavřený interval. Potom každá spojitá funkce, definovaná na I, nabývá svého maxima i minima.

281. Sestrojte funkci f spojitou na $\langle 0,1 \rangle$ a nabývající maxima v bodě 0, která však není v žádném pravém okolí bodu 0 monotonní.

282. Rozhodněte o platnosti tvrzení:

Nechť φ je spojitá a nekonstantní funkce definovaná na otevřeném intervalu $I \subset E_1$, f spojitá na intervalu $\varphi(I)$. Nechť

(a) funkce φ je stejnoměrně spojitá v intervalu I nebo

(b) funkce f je stejnoměrně spojitá v intervalu $\varphi(I)$.

Potom je funkce $f * \varphi$ stejnoměrně spojitá v intervalu I.

283. Doplňte předpoklady věty z předcházející úlohy o předpoklad " I je omezený interval" a zkoumejte platnost takto vzniklého tvrzení.

284. Nechť $I \subset E_1$ je interval. Potom I je omezený, právě když každá stejnoměrně spojitá funkce na I je na tomto intervalu omezená. Dokažte.

285. Sestrojte funkci f, definovanou na neomezeném otevřeném intervalu $I \subset E_1$, která není spojitá (resp. je nespojitá) ve všech bodech tohoto intervalu a nabývá svého maxima i minima na I.

286. Dokažte, že existuje $y \in (0,2)$ takové, že platí

$$y^5 + y^4 + y^3 + y^2 - y - 1 = 0 .$$

287. Nechť f je polynom lichého stupně, Potom existuje $x_0 \in E_1$ tak, že platí $f(x_0) = 0$. Dokažte.

288. Nechť f, g jsou spojité v intervalu $\langle a,b \rangle \subset E_1$, f je rostoucí a g klesající v tomto intervalu. Nechť $f(a) < g(a)$, $f(b) > g(b)$. Dokažte, že pak existuje právě jedno $x \in (a,b)$ takové, že pro ně platí

$$f(x) = g(x) .$$

289. Dokažte následující tvrzení:

Pro každé nezáporné celé číslo k existuje právě jedno

$x_k \in \langle k\pi , \frac{2k+1}{2}\pi)$ tak, že platí $\operatorname{tg} x_k = x_k$. Dále je

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{2n+1}{2} \cdot \pi - x_n \right) = 0 .$$

290. Nechť $\{x_n\}$ je prostá monotonní posloupnost bodů z intervalu $I \subset E_1$, f je spojitá funkce v intervalu I. Nechť platí pro každé $n \in N$

$$f(x_n) \cdot f(x_{n+1}) < 0 ;$$

potom existuje nekonečně mnoho bodů $x \in I$, pro něž je $f(x) = 0$. Dokažte.

291. Dokažte, že platí:

Nechť funkce f je monotonní v intervalu $I \subset E_1$. Potom funkce f má v I Darbouxovu vlastnost, právě když $f(I)$ je interval nebo jednobodová množina.

292. Dokažte, že platí:

Funkce f má Darbouxovu vlastnost v intervalu I právě tehdy, když zobrazuje každý interval $J \subset I$ buď na interval nebo na jednobodovou množinu.

293. Dokažte, že platí:

Zobrazuje-li funkce f definovaná v E_1 každý interval I na interval $\langle 0,1 \rangle$, není f v žádném bodě $x \in E_1$ monotonní ani spojitá, má však Darbouxovu vlastnost.

294.* Rozhodněte o platnosti tvrzení:

Nechť f, g jsou funkce definované v E_1, f je spojitá a g má Darbouxovu vlastnost. Potom $f \cdot g$ má Darbouxovu vlastnost.

295.* Rozhodněte o platnosti tvrzení:

Nechť f, g jsou funkce definované v E_1, které mají Darbouxovu vlastnost. Potom též funkce $f + g$ má Darbouxovu vlastnost.

296. Dokažte tvrzení:

Nechť funkce f je prostá a spojitá v intervalu $I \subset E_1$. Potom f je v I ryze monotonní.

297. Dokažte tvrzení:

Nechť funkce f je prostá a má Darbouxovu vlastnost v intervalu $I \subset E_1$. Potom f je ryze monotonní v I.

Srovnejte toto tvrzení s tvrzením z úlohy 296.

298. Dokažte, že platí:

Má-li funkce f Darbouxovu vlastnost v jistém $U(x_0)$ (kde $x_0 \in E_1$) a existují-li jednostranné limity $\lim_{x \to x_0+} f(x)$, $\lim_{x \to x_0-} f(x)$, je f spojitá v bodě x_0.

Vyslovte a dokažte analogické tvrzení pro jednostrannou spojitost.

299. Sestrojte spojitou funkci f definovanou v E_1, pro kterou platí $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ a pro každé $n \in N$ funkce f není na intervalu $\langle n, +\infty)$ ani konvexní ani konkávní.

300. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

(a) Nechť funkce f je omezená (resp. spojitá, resp. stejnoměrně spojitá) v E_1. Pak ke každému $x \in E_1$ existuje okolí $U(x)$ bodu x tak, že f je omezená (resp. spojitá, resp. stejnoměrně spojitá) v $U(x)$.

(b) Nechť pro funkci f definovanou v E_1 platí: Pro každé $x \in E_1$ existuje okolí $U(x)$ bodu x tak, že f je omezená (resp. spojitá, resp. stejnoměrně spojitá) v $U(x)$. Potom funkce f je omezená (resp. spojitá, resp. stejnoměrně spojitá) v E_1.

§ 5. DERIVACE

Symbol $f'(x)$ značí derivaci funkce f v bodě x, symboly $f'_+(x)$, resp. $f'_-(x)$ značí derivaci funkce f v bodě x zprava, resp. derivaci funkce f v bodě x zleva. Místo "existuje derivace funkce f v bodě x" říkáme též "funkce f má derivaci v bodě x" apod. Derivace (jednostranné derivace) funkce v bodě jsou čísla z E_1^*. Je-li tedy $f'(x) \in E_1$, resp. $f'_+(x) \in E_1$, resp. $f'_-(x) \in E_1$, mluvíme o vlastní derivaci, resp. vlastní derivaci zprava, resp. vlastní derivaci zleva funkce f v bodě x. Mluvíme-li o derivaci, máme vždy na mysli vlastní nebo nevlastní derivaci.

Jestliže každému bodu $x \in E_1$, ve kterém existuje vlastní $f'(x)$, přiřadíme $f'(x)$, značíme takto získané zobrazení symbolem f' a říkáme, že funkce f' je derivací funkce f. V textu pracujeme s derivací f' zpravidla na nějakém intervalu; např. výrok "derivace f' je omezená v (a,b)" znamená, že funkce f je definovaná v (a,b), pro každé $x \in (a,b)$ existuje vlastní $f'(x)$ a funkce f' definovaná shora uvedeným způsobem je omezená v intervalu (a,b).

Derivace vyšších řádů značíme symboly $f''(x)$, $f'''(x)$, resp. též $f^{(n)}(x)$, $n \in N$, nebo f'', f''', $f^{(n)}$, $n \in N$, a platí pro ně stejné úmluvy jako pro derivaci prvního řádu $f'(x)$, resp. f'. Je užitečné položit $f^{(0)} = f$.

301. Sestrojte funkci f spojitou v E_1, která má vlastní derivaci všude v $E_1 - \{0\}$ a $f'(0)$ neexistuje.

302. Dokažte toto tvrzení:

Nechť funkce f má v bodě x_0 vlastní obě jednostranné derivace. Potom je funkce f spojitá v bodě x_0 a existuje $U(x_0)$ tak, že f je omezená v $U(x_0)$.

303. Sestrojte funkci f v E_1 , která je spojitá v bodě 0 , přičemž neexistují obě jednostranné derivace funkce f v bodě 0 .

Lze sestrojit funkci f tak, aby vyhovovala uvedeným podmínkám a neexistovala ani jedna jednostranná derivace funkce f v bodě 0 ?

304. Nechť $x_0 \in E_1$. Sestrojte funkci f , pro niž $f'(x_0) = +\infty$ a f není (resp. je) spojitá v bodě x_0 .

305. Nechť $n \geq 2$. Sestrojte funkci f definovanou v E_1 , pro kterou existuje vlastní $f^{(n)}(x)$ právě pro všechna $x \in E_1 - \{0\}$ a pro kterou $f^{(n-1)}$ je spojitá funkce v E_1 .

306. Dokažte, že neplatí následující tvrzení:

Jestliže existuje vlastní $f'(x_0)$, potom je funkce spojitá v jistém okolí $U(x_0)$.

307. Rozhodněte, zda platí tvrzení:

Nechť funkce f je definována v okolí $U(0)$ bodu 0. Nechť existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro každé $x \in U(0)$ je

$$|f(x)| \leq |x|^{1+\varepsilon} .$$

Potom $f'(0) = 0$.

308. Dokažte tvrzení:

Nechť $\varepsilon > 0$ a g je omezená funkce na $U(0)$. Funkci f definujme na $U(0)$ předpisem

$$f(x) = g(x) \cdot |x|^{1+\varepsilon} .$$

Potom $f'(0) = 0$.

309. Nechť funkce f je definována v $U(0)$ a má tam derivace všech řádů; nechť existuje $c \in E_1$ tak, že pro všechna $x \in U(0) - \{0\}$ platí

$$|f(x)| \leq c \cdot e^{-1/x^2} .$$

Potom pro každé nezáporné celé číslo k platí $f^{(k)}(0) = 0$. Dokažte.

310. Buď $\{a_n\}$ posloupnost reálných čísel. Sestrojte funkci f definovanou v E_1 mající derivaci f' spojitou v E_1 tak, aby $f(n) = a_n$ pro každé $n \in N$.

311. Sestrojte funkci f definovanou v E_1 tak, aby funkce $|f|$ byla nekonstantní, měla derivace všech řádů v E_1, přičemž f není spojitá v žádném bodě $x \in E_1$.

312. Sestrojte funkce f, g definované v E_1, které nejsou spojité v žádném bodě z E_1, přičemž funkce $f * g$ má derivace všech řádů v E_1.

313. Nechť funkce f je spojitá v bodě x_0 a nechť funkce $g = f \cdot D$ má v bodě x_0 vlastní derivaci. Potom je $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) = 0$. Dokažte.

314. Sestrojte funkci f spojitou a rostoucí na intervalu $\langle 0,1 \rangle$ takovou, že pro každé $n \in N$ neexistuje $f'\left(\frac{1}{n}\right)$.

315. Nechť $K \subset E_1$ je konečná množina. Sestrojte funkci f definovanou v E_1, která má vlastní derivaci právě v bodech množiny K.

316. Sestrojte spojitou rostoucí funkci f definovanou v E_1, pro niž existuje $f'(x)$ pro každé $x \in E_1$ a $f'(y) = +\infty$ pro každé celé číslo y.

317. Sestrojte spojitou funkci f , která má všude v E_1 derivaci, přičemž $f'(x) = +\infty$ pro každé sudé číslo x , $f'(y) = -\infty$ pro každé liché číslo y .

318. Sestrojte funkci f definovanou v E_1 , pro niž je $f'(x) = +\infty$ pro všechna $x \in \left\{\frac{1}{2n} \, ; \, n \in N\right\}$, $f'(y) = -\infty$ pro všechna $y \in \left\{\frac{1}{2n+1} \, ; \, n \in N\right\}$, $f'(0) = 0$ a platí jedna z následujících podmínek:

(a) funkce f je spojitá v E_1 ;

(b) funkce f je nespojitá právě ve všech bodech množiny $\left\{\frac{1}{n} \, ; \, n \in N\right\}$.

319. Sestrojte funkci f definovanou v E_1 , která není v žádném bodě $x \in E_1$ monotonní a pro kterou platí $f'(y) = 0$ pro každé $y \in \left\{\frac{1}{n} \, ; \, n \in N\right\} \cup \{0\}$.

320. Sestrojte funkci f definovanou v E_1 , která je klesající v bodě 0 , $f'(0) = 0$ a $f'(x) = f'(-x) = +\infty$ pro všechna $x \in \left\{\frac{1}{n} \, ; \, n \in N\right\}$.

321. Nechť $a \in E_1$. Sestrojte funkci f definovanou v E_1, která má všude v E_1 vlastní derivaci, přičemž funkce f' je nespojitá právě v bodech množiny N a pro každé $n \in N$ platí $f'(n) = a$.

322. Sestrojte spojitou funkci f definovanou v E_1 tak, aby existovala vlastní derivace $f'(0)$, přičemž v každém okolí bodu 0 existuje nekonečně mnoho bodů, v nichž derivace funkce f neexistuje.

323. Sestrojte funkci f, která má spojitou derivaci f' v E_1, platí pro ni $f(0) = f'(0) = 0$ a vyhovuje některé z následujících podmínek:

(a) funkce f je rostoucí v E_1;

(b) funkce f je klesající v E_1;

(c) $\max\limits_{x \in E_1} f(x) = 0$;

(d) $\min\limits_{x \in E_1} f(x) = 0$;

(e) funkce f je v bodě 0 monotonní zprava a není v bodě 0 monotonní zleva;

(f) funkce f není v bodě 0 monotonní zprava ani zleva.

324.* Sestrojte funkci f definovanou v E_1, která má derivaci f' omezenou v intervalu $\langle -1,1 \rangle$ a pro kterou neexistuje

$$\max \{ f'(x) \,;\, x \in \langle -1,1 \rangle \} .$$

325. Nechť $0 \leq d \leq +\infty$. Sestrojte funkci f definovanou v E_1 , pro kterou $f'(0) = d$ a funkce f není rostoucí v žádném okolí bodu 0 .

326. Sestrojte funkci f definovanou v E_1 , která má všude v E_1 konečnou derivaci, funkce f je klesající v bodě 0 a funkce f' zobrazuje každé okolí bodu 0 na E_1 .

327. Nechť funkce g má omezenou derivaci v E_1 . Buď $\varepsilon > 0$; pro $x \in E_1$ položme $f_\varepsilon(x) = x + \varepsilon\, g(x)$. Dokažte, že existuje $\varepsilon_0 > 0$ tak, že funkce f_{ε_0} je prostá v E_1 .

328. Nechť $0 \leq a \leq +\infty$. Sestrojte funkci f rostoucí v E_1 , pro kterou platí $f(0) = 0$, $f'(0) = a$ a pro kterou inversní funkce f_{-1} nemá v bodě 0 derivaci.

329. Dokažte následující tvrzení:

Nechť funkce f je definována v intervalu $\langle 0, \delta)$, $\delta > 0$, $f'(x)$ existuje pro každé $x \in \langle 0, \delta)$, $f'_+(0) = 0$. Nechť dále f není monotonní zprava v bodě 0 . Potom pro každé $n \in N$ existují body x_n , y_n , $z_n \in (0, \delta)$, $\lim x_n = \lim y_n = \lim z_n = 0$, tak, že platí

$$f'(x_n) = 0 \ , \quad f'(y_n) > 0 \ , \quad f'(z_n) < 0$$

pro každé $n \in N$.

330. Sestrojte funkci f, která má derivaci na E_1 a je klesající v bodě 0, přičemž derivace funkce f zobrazuje každé okolí bodu 0 na E_1^*.

331. Sestrojte funkci f definovanou v intervalu $\langle a,b)$ tak, aby existovala $f'_+(a)$, $f'(x)$ pro každé $x \in (a,b)$, a neexistovala $\lim\limits_{x \to a+} f'(x)$.

332. Sestrojte funkci f definovanou v intervalu $\langle a,b)$ tak, aby existovala vlastní $\lim\limits_{x \to a+} f'(x)$ a aby neplatila rovnost

$$\lim_{x \to a_+} f'(x) = f'_+(a) .$$

333. Sestrojte funkci f definovanou v E_1, pro niž neexistují $\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0-} f(x)$ a existuje derivace funkce f v bodě 0.

334. Sestrojte funkci f, která má vlastní derivaci všude v intervalu $(0, +\infty)$, platí $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = +\infty$ a neplatí $\lim\limits_{x \to 0+} f'(x) = -\infty$.

335. Rozhodněte, zda existuje funkce f, která má v každém bodě intervalu $(0, +\infty)$ konečnou derivaci, přičemž platí

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty \ , \quad \lim_{x \to 0+} f'(x) = 1 .$$

336. Sestrojte funkci f definovanou v E_1, pro niž neexistuje $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ a existuje $\lim_{x\to+\infty} f'(x) \in E_1$.

337. Sestrojte funkci f definovanou v E_1, která má vlastní derivaci všude v E_1, pro niž existuje $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ a platí jedna z následujících podmínek:

(a) $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ neexistuje;

(b) $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$;

(c) funkce f' není omezená shora ani zdola na každém okolí bodu ∞.

338. Nechť funkce f má vlastní derivaci v $(0, \infty)$, $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. Položme $g(x) = f(x+1) - f(x)$. Dokažte, že $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$.

339. Dokažte toto tvrzení:

Nechť funkce f je definovaná v intervalu $\langle 0, +\infty)$, existuje vlastní $\lim_{x\to\infty} f'(x) = a$, $a \neq 0$. Potom existuje nevlastní $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Uvažte, zda platí analogické tvrzení, které vznikne z předcházející věty vynecháním předpokladu $a \neq 0$.

340. Sestrojte funkci f ryze monotonní na intervalu $(0, +\infty)$, pro niž $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, existuje $f'(x)$ pro každé $x \in (0, +\infty)$ a neexistuje $\lim_{x \to \infty} f'(x)$.

341. Buďte ε, K kladná reálná čísla. Sestrojte funkci f definovanou v E_1, která má všude derivaci a platí $\sup_{x \in E_1} |f(x)| < \varepsilon$, $\inf_{x \in E_1} |f'(x)| > K$.

342. Rozhodněte, zda platí toto tvrzení:

Nechť funkce f je omezená v intervalu (a,b) a existuje vlastní derivace funkce f všude v intervalu (a,b). Potom je funkce f' omezená v (a,b).

343. Pro $x \in E_1$ položme

$$f(x) = \inf \{ |x - n| ; n \in N \}.$$

Potom je funkce f spojitá v E_1. Dokažte.

Určete množinu všech $x \in E_1$, pro něž existuje $f'(x)$.

344. Rozhodněte, zda platí toto tvrzení:

Jestliže funkce f má vlastní derivaci v každém bodě $x \in (a,b)$ a platí $f'(x) \neq 0$ pro každé $x \in (a,b)$, potom je funkce f prostá v (a,b).

345. Dokažte tvrzení:

Je-li f funkce, která má vlastní derivaci všude v intervalu $(0, \infty)$ a platí $\inf_{x \in (0,\infty)} f'(x) > 0$, potom je

$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$.

346. Sestrojte funkci f, která má vlastní derivaci všude v intervalu $I = (0, \infty)$, f je neomezená a f' omezená v I.

Rozhodněte, zda lze funkci s těmito vlastnostmi sestrojit i v případě, že I je omezený otevřený interval.

347. Sestrojte funkci f definovanou v E_1, která má všude v E_1 vlastní derivaci a platí: Je-li $J \subset E_1$ interval délky 1, funkce f' není omezená na J.

348. Sestrojte funkci f, která je prostá v E_1, není v žádném intervalu monotonní a pro kterou existuje $f'(0)$.

349. Sestrojte funkci f definovanou v E_1, která není v žádném intervalu $I \subset E_1$ omezená (resp. shora omezená).

Lze funkci f sestrojit tak, aby existovala $f'(0)$?

350. Nechť pro funkci f a pro každé $x \in (a,b)$ existuje vlastní derivace $f'(x)$ a nechť platí $f(x) \neq 0$. Potom funkce $g = \log |f|$

má vlastní derivaci pro každé $x \in (a,b)$ a platí

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} .$$

Dokažte.

351. Nechť funkce g má vlastní derivaci v E_1. Potom existuje funkce f definovaná v E_1 tak, že pro každé $x \in E_1$ platí

$$g(x) \cdot g'(x) = f'(x) .$$

Dokažte.

352.° Sestrojte nekonstantní funkce f, g tak, aby pro každé $x \in E_1$ platilo

$$f'(x) \cdot g'(x) = (f \cdot g)'(x) .$$

Lze sestrojit tyto funkce tak, aby funkce $f \cdot g$ nebyla konstantní ?

353. Dokažte tvrzení:

Nechť $f(x) = x^3 + a x^2 + b x + c$ $(a, b, c \in E_1)$ a buď M množina všech bodů, v nichž je funkce f klesající. Je-li množina M neprázdná, je M otevřený omezený interval.

354. Je-li p polynom stupně $n \geq 1$ a $x_0 \in E_1$ takové, že platí $p'(x_0) = 0$, potom existuje okolí $U(x_0)$ tak, že pro všechna $x \in U(x_0) - \{x_0\}$ je $p'(x) \neq 0$. Dokažte.

355. Sestrojte funkci f definovanou v E_1, která má derivace všech řádů všude v E_1 a platí $f^{(n)}(x) > 0$ (resp. $(-1)^n f^{(n)}(x) > 0$) pro každé $x \in E_1$ a $n \in N$.

356. Rozhodněte, zda platí tato věta:

Nechť funkce f má derivace všech řádů v intervalu $(0,1)$. Jestliže množina $\{x \in (0,1) ; f(x) = 0\}$ je nekonečná, potom je též množina $\{x \in (0,1) ; f^{(k)}(x) = 0\}$ nekonečná pro každé $k \in N$.

357. Dokažte tvrzení:

Nechť funkce f je definována v $U(0)$ a existuje vlastní $f'(0)$. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost záporných čísel z $U(0)$, $\{b_n\}$ posloupnost kladných čísel z $U(0)$ a je $\lim a_n = \lim b_n$. Potom platí

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(0) .$$

Platí obdobné tvrzení i pro nevlastní $f'(0)$?

358.* Sestrojte funkci f, která má vlastní derivaci všude v E_1, a posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ takové, že platí $0 \leq a_n < b_n$ pro všechna $n \in N$ a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \neq f'(0) .$$

Lze sestrojit posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ splňující uvedené podmínky tak, aby limita existovala (neexistovala) ?

Lze sestrojit posloupnosti uvedených vlastností i v případě, kdybychom požadovali spojitost funkce f' v bodě 0 (resp. v E_1) ?

359. Dokažte tvrzení:

Nechť existuje vlastní derivace funkce f v bodě 0 . Potom platí

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(-h)}{2h} .$$

Rozhodněte, zda z existence této limity vyplývá existence $f'(0)$ (resp. spojitost funkce f v bodě 0) .

360. Dokažte tvrzení:

Nechť funkce f je definována v E_1 a buď $f(0) = 0$. Jestliže existuje $f''(0)$, potom

$$f''(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) + f(-h)}{h^2} .$$

Plyne z existence této limity existence $f''(0)$ ($f'(0)$, resp. spojitost funkce f bodě 0) ?

361. Sestrojte funkci f, pro kterou f'' je spojitá v E_1, je $f(0) = f'(0) = f''(0)$ a v žádném okolí bodu 0 f není ani rostoucí, ani klesající, ani nezáporná a ani nekladná.

362. Sestrojte funkci f, která má spojitou druhou derivaci f'' v E_1, platí pro ni $f(0) = f'(0) = f''(0)$ a vyhovuje některé z následujících podmínek:

(a) funkce f je rostoucí v E_1;

(b) funkce f je klesající v E_1;

(c) $\max\limits_{x \in E_1} f(x) = 0$;

(d) $\min\limits_{x \in E_1} f(x) = 0$.

363. Nechť funkce f má derivaci f' spojitou v E_1 a nechť $f''(x) \geq 2$ pro každé $x > 0$. Je-li $f(0) = f'(0) = 0$, potom pro každé $x \geq 0$ platí $f(x) \geq x^2$. Dokažte.

364. Nechť funkce f, g jsou spojité v intervalu $\langle 0, +\infty)$, mají vlastní derivaci v $(0, +\infty)$, $f(0) = g(0)$ a $f'(x) \geq g'(x)$ pro každé $x \in (0, +\infty)$. Potom je $f(x) \geq g(x)$ pro každé $x \in \langle 0, +\infty)$. Dokažte.

365. Sestrojte funkci f definovanou v E_1 tak, aby f byla nezáporná v E_1, $\lim\limits_{x \to 0-} f''(x) = \lim\limits_{x \to 0+} f''(x) = 0$ a aby neexistovala $f'(0)$ (neexistovala vlastní $f'(0)$).

Lze sestrojit funkci f, vyhovující shora uvedeným požadavkům tak, aby byla spojitá v E_1 ?

366. Rozhodněte, zda existuje funkce f, jejíž druhá derivace je spojitá v E_1 a pro každý interval $I \subset E_1$ není funkce f ani konvexní ani konkávní na I.

367.* Nechť druhá derivace funkce f je spojitá v E_1, $f(0) = 1$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ a pro každé $x \in E_1$ platí $0 \leq f(x) \leq 1$. Potom existuje $x_1 \in (0, \infty)$ tak, že $f''(x_1) = 0$. Dokažte.

368. Sestrojte funkce f, g, které mají derivace všech řádů v E_1, $f(0) = g(0) = 0$, $g > 0$ na $E_1 - \{0\}$ tak, že

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

a limita

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

neexistuje.

369. Dokažte následující tvrzení:

Nechť f je funkce spojitá v intervalu $\langle a,b \rangle$ a má všude v intervalu (a,b) derivaci. Nechť existuje $y \in E_1$ tak, že $f(a) \neq y \neq f(b)$ a $f_{-1}(y) \cap (a,b)$ je nekonečná množina. Potom existuje bod $\xi \in (a,b)$ tak, že $f'(\xi) = 0$.

Jsou všechny předpoklady této věty podstatné ?

370. Rozhodněte, zda platí tvrzení :

Je-li funkce f spojitá v $\langle a,b \rangle$, $f(a) = f(b)$ a existují-li $f'_+(x)$ a $f'_-(x)$ pro každé $x \in (a,b)$, existuje bod $\xi \in (a,b)$ tak, že

$$\operatorname{sgn} f'_+(\xi) = - \operatorname{sgn} f'_-(\xi) .$$

371. Rozhodněte, zda každá funkce f spojitá v intervalu $\langle 0,1 \rangle$ má tuto vlastnost: Je-li $f(\xi) = \max_{x \in \langle 0,1 \rangle} f(x)$ a $\xi \in (0,1)$, potom existují vlastní $f'_+(\xi)$, $f'_-(\xi)$ a je $-\operatorname{sgn} f'_+(\xi) =$ $= \operatorname{sgn} f'_-(\xi)$.

372. Sestrojte funkci f definovanou v intervalu $\langle a,b \rangle$, pro niž je $f(a) = f(b)$, $f'(x)$ existuje vlastní pro každé $x \in (a,b)$ a $f'(x) \neq 0$ pro všechna $x \in (a,b)$.

Srovnejte vlastnosti zkonstruované funkce s předpoklady Rolleovy věty.

373. Sestrojte funkci f spojitou v intervalu $\langle a,b \rangle$, pro kterou je $f(a) = f(b) = 0$ a pro niž $f'(x) \neq 0$ v každém bodě $x \in$ $\in (a,b)$, ve kterém derivace $f'(x)$ existuje.

374. Sestrojte funkci f spojitou v intervalu $\langle a,b \rangle$ nekonstantní na každém intervalu $I \subset \langle a,b \rangle$, pro kterou $f(a) = f(b)$, $f'(x)$ existuje pro každé $x \in (a,b)$ a množina

$\{x \in (a,b) \; ; \; f'(x) = 0\}$ je nekonečná.

375. Nechť funkce f má vlastní derivaci v intervalu $(0, \infty)$ a nechť existují $\lim_{x \to 0+} f(x) = k_0$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = k_1$. Jestliže existuje $x_0 \in (0, \infty)$ tak, že $f(x_0) < \min(k_0, k_1)$, potom existuje $\xi \in (0, \infty)$ tak, že $f'(\xi) = 0$. Dokažte.

376. Buďte $a_0, \dots, a_n \in E_1$ a nechť

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{j+1} = 0 .$$

Potom polynom $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ má alespoň jeden kořen v intervalu $(0,1)$. Dokažte.

377. Nechť funkce f má vlastní derivaci $f'(x)$ všude v E_1 . Nalezněte nutné a postačující podmínky pro to, aby funkce $|f|$ měla vlastní derivaci všude v E_1 .

378. Nechť funkce f je definována v intervalu (a,b) a nechť existují čísla $K > 0$, $\beta > 1$ taková, že pro každé $x , y \in (a,b)$ platí

$$|f(x) - f(y)| \leq K |x - y|^{\beta}.$$

Potom f je konstantní v intervalu (a,b) . Dokažte.

379. Nechť funkce f má v intervalu (a,b) omezenou derivaci f'. Potom existuje číslo $K > 0$ tak, že je splněna podmínka: Je-li $x, y \in (a,b)$, platí

$$|f(x) - f(y)| \leq K |x - y| .$$

Rozhodněte, zda každá funkce f, splňující v intervalu (a,b) tuto podmínku, má všude v (a,b) derivaci (resp. je stejnoměrně spojitá v (a,b)).

380. Dokažte tvrzení:

Nechť funkce f má spojitou derivaci f' v E_1. Potom pro každý uzavřený interval $I \subset E_1$ existuje $K > 0$ tak, že je splněna podmínka: Je-li $x, y \in I$, platí

$$|f(x) - f(y)| \leq K |x - y| .$$

Rozhodněte, zda analogické tvrzení platí pro libovolný interval $I \subset E_1$.

381. Nechť funkce f má vlastní druhou derivaci v intervalu (a,b) a nechť pro každé $\varepsilon > 0$ je

$$|f''(x)| \leq \varepsilon (x - a)^{-1} (b - x)^{-1}$$

pro všechna $x \in (a,b)$. Potom je funkce f lineární v (a,b). Dokažte.

382. Nechť funkce f je lichá a má všude v E_1 vlastní derivaci. Potom je funkce f' sudá. Dokažte.

Formulujte analogické tvrzení pro případ, že funkce f je sudá.

383. Sestrojte funkci f (resp. g), která má vlastní derivaci v E_1 tak, aby $f(E_1) = \langle -1,1 \rangle$ (resp. $g(E_1) = \langle -1,1 \rangle$) a funkce $\arcsin f$ (resp. $\arcsin g$) nemá derivaci (resp. má vlastní derivaci) všude v E_1.

384. Nechť funkce f je neklesající a spojitá na $\langle a,b \rangle$. Potom existuje neklesající spojitá funkce f_1 v E_1 tak, že $f = f_1$ na $\langle a,b \rangle$. Je-li $\sup\limits_{x \in E_1} f_1(x) = \sup\limits_{x \in \langle a,b \rangle} f(x)$, potom buď neexistuje derivace funkce f_1 v bodě b, nebo je $f_-'(b) = 0$. Dokažte.

385. Nechť funkce f má vlastní derivaci v intervalu (a,b), je spojitá v $\langle a,b \rangle$ a existují vlastní $\lim\limits_{x \to a+} f'(x)$, $\lim\limits_{x \to b-} f'(x)$.

Dokažte, že existuje funkce g, která má vlastní derivaci v E_1 tak, že $f(x) = g(x)$ pro všechna $x \in \langle a,b \rangle$.

386. Dokažte, že funkce sgn není derivací žádné funkce.

387. Sestrojte funkci v E_1, která má Darbouxovu vlastnost a není derivací žádné funkce definované v E_1.

388. Sestrojte nekonstantní funkci f definovanou v E_1 tak, aby $f'(x) = 0$ pro každé $x \in E_1 - \{0\}$. Charakterizujte všechny funkce, pro něž navíc existuje derivace v bodě 0.

389. Nechť funkce f má vlastní derivaci všude v intervalu (a,b). Jestliže je funkce f' monotonní v (a,b), je f' spojitá v (a,b). Dokažte.

390. Nechť funkce f má vlastní druhou derivaci všude v E_1. Potom je f kvadratický polynom, právě když množina $\{f''(x);\ x \in E_1\}$ je konečná a neobsahuje nulu. Dokažte.

391. Nechť funkce f má konečnou derivaci v každém bodě otevřeného intervalu $J \subset E_1$. Je-li $\{f'(x)\ ;\ x \in J\}$ konečná množina, potom je f lineární funkce (v intervalu J). Dokažte.

392. Nechť funkce f má derivaci všude v E_1 a nechť existují $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = A^+$, $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = A^-$. Potom je

$$\min(A^+, A^-) \leq f(0) \leq \max(A^+, A^-).$$

Dokažte.

393. Buď $\varepsilon > 0$. Sestrojte funkci g definovanou v E_1 tak, že pro $x \in E_1$, $|x| \geq \varepsilon$, je $g(x) = |x|$ a pro $x \in E_1$, $|x| < \varepsilon$,

je $|g(x) - |x|| < \varepsilon$, přičemž g má spojitou derivaci v E_1 .

394. Nechť f , F jsou funkce, definované na otevřeném intervalu $I \subset E_1$, f je spojitá a pro každé $x , y \in I$, $x < y$, existuje $z \in (x, y)$ tak, že platí

$$F(x) - F(y) = (x - y) \cdot f(z) .$$

Potom na intervalu I platí $F' = f$. Dokažte.

§ 6. PRIMITIVNÍ FUNKCE, ZOBECNĚNÁ PRIMITIVNÍ FUNKCE

Nechť pro funkce f , F definované v intervalu (a,b) platí

$$F'(x) = f(x)$$

pro každé $x \in (a,b)$. Potom říkáme, že funkce F je primitivní funkce k funkci f v intervalu (a,b) . O funkci f též říkáme, že má v (a,b) primitivní funkci.

Nechť $K \subset E_1$ a $(a,b) - K$ je konečná množina. Nechť pro funkci f definovanou na K existuje funkce F spojitá v intervalu (a,b) a konečná množina $L \subset (a,b)$ tak, že platí

$$F'(x) = f(x)$$

pro každé $x \in (a,b) - L$. Potom říkáme, že funkce f má zobecněnou primitivní funkci v intervalu (a,b) a funkci F nazýváme zobecněnou primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a,b) .

395. Sestrojte funkci f definovanou v E_1 , která není spojitá, avšak má primitivní funkci v E_1 .

396. Dokažte, že funkce sgn (resp. | sgn |) nemá primitivní funkci v

žádném otevřeném intervalu, který obsahuje bod 0 .

397. Sestrojte funkci, která má Darbouxovu vlastnost v E_1 a nemá primitivní funkci v E_1 .

398. Dokažte tvrzení:

Buď g spojitá funkce v $E_1 - \{0\}$. Potom existuje nejvýše jedno $\alpha \in E_1$ tak, že funkce h , pro niž $h(0) = \alpha$ a $h(x) = g(x)$ pro $x \in E_1 - \{0\}$, má primitivní funkci v E_1 .

399. Nechť $\alpha \in E_1$. Najděte všechna $a \in E_1$ tak, aby pro funkci f definovanou v E_1 předpisem

$$f(x) = |x|^{\alpha} \sin \frac{1}{x} \quad \text{pro } x \neq 0 ,$$

$$f(0) = a ,$$

platila některá z následujících podmínek:

(a) f je spojitá v E_1 ;

(b) f má Darbouxovu vlastnost v E_1 ;

(c) f má primitivní funkci v E_1 ;

(d) f má zobecněnou primitivní funkci v E_1 .

400. Nechť funkce f má primitivní funkci F v E_1 . Buď $x \in E_1$. Potom

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} n \left(F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)\right) .$$

Dokažte.

401. Sestrojte funkci f definovanou v intervalu $I = (-1, 1)$, která nemá v I primitivní funkci, má však Darbouxovu vlastnost v I a existují funkce f_n $(n \in N)$ spojité v I tak, že pro každé $x \in I$ platí

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) .$$

402.* Neexistuje racionální lomená funkce, která by byla primitivní funkcí k funkci $1/x$ na intervalu $(0, +\infty)$. Dokažte.

403.* Neexistuje racionální lomená funkce, která by byla primitivní funkcí k funkci $\frac{1}{1 + x^2}$ na E_1. Dokažte.

404. Buď F primitivní funkce k funkci f v E_1, $F(0) = 0$. Je-li funkce f sudá (resp. lichá), potom F je lichá (resp. sudá) funkce. Dokažte.

405. Nechť funkce f má vlastní derivaci v intervalu (a,b) a nechť f' je rostoucí. Potom každá primitivní funkce k funkci f na (a,b) je konvexní v (a,b). Dokažte.

406. Dokažte tvrzení:

Nechť f je monotonní funkce definovaná na intervalu (a,b). Potom k f existuje na (a,b) primitivní funkce právě tehdy, je-li f spojitá v (a,b).

407. Rozhodněte o platnosti věty:

Nechť funkce f definovaná v intervalu (a,b) nabývá v každém intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle \subset \langle a,b \rangle$ svého maxima a minima. Potom existuje primitivní funkce k funkci f.

408. Rozhodněte, zda platí tvrzení:

Jestliže existuje k funkci $|f|$ v E_1 primitivní funkce, existuje primitivní funkce k funkci f v E_1.

409. Rozhodněte, zda platí toto tvrzení:

Jestliže funkce f má primitivní funkci v (a,b), potom $|f|$ má primitivní funkci v (a,b).

Platí analogické tvrzení, předpokládáme-li navíc, že f je omezená v (a,b)?

410. Rozhodněte, zda platí tvrzení:

Jestliže funkce f má primitivní funkci v (a,b) , potom funkce f^2 má primitivní funkci v (a,b) .

* Řešte úlohu pro případ, že f je navíc omezená v (a,b) .

411. Rozhodněte, zda platí věta:

Nechť f , g jsou funkce definované v E_1 , které mají primitivní funkci. Potom existuje primitivní funkce k funkci $f \cdot g$.

412. Rozhodněte, zda platí tvrzení:

Nechť f je stejnoměrně spojitá funkce, definovaná na omezeném intervalu $(a,b) \subset E_1$. Potom primitivní funkce F k funkci f je omezená na intervalu (a,b) .

413. Rozhodněte o platnosti tvrzení:

Nechť F je primitivní funkce k funkci f , definované na omezeném intervalu $(a,b) \subset E_1$ a nechť funkce F je omezená. Potom i funkce f je omezená na (a,b) .

414. Rozhodněte, zda platí tvrzení:

Nechť f je omezená spojitá funkce, definovaná na intervalu $(a,b) \subset E_1$. Potom primitivní funkce F k funkci f je omezená na intervalu (a,b) .

415. Nechť $-\infty < a < b < +\infty$ a nechť F je primitivní funkce v (a,b) k funkci f. Je-li f omezená v (a,b), je funkce F omezená v (a,b). Dokažte.

416. Rozhodněte, zda platí tvrzení:

Nechť F je primitivní funkce k funkci f na omezeném intervalu (a,b). Potom existuje funkce F_1 spojitá v $\langle a,b \rangle$, pro kterou platí $F(x) = F_1(x)$ pro každé $x \in (a,b)$.

Zkoumejte platnost analogického tvrzení pro funkci f spojitou v (a,b).

417. Dokažte tvrzení:

Nechť funkce f je stejnoměrně spojitá v omezeném intervalu (a,b). Potom existuje funkce F spojitá v $\langle a,b \rangle$, která je primitivní funkcí k funkci f v (a,b).

418. Rozhodněte o platnosti věty:

Nechť funkce f má v E_1 primitivní funkci, g je polynom. Potom k funkci $f \cdot g$ existuje primitivní funkce v E_1.

419. Rozhodněte o platnosti věty:

Nechť pro funkce F, G definované v intervalu (a,b) platí

$$F'(x) = G'(x)$$

pro každé $x \in (a,b)$. Potom existuje $c \in E_1$ tak, že pro každé $x \in (a,b)$ je

$$F(x) = G(x) + c .$$

* Rozhodněte, zda platí analogické tvrzení pro funkce F , G spojité v intervalu (a,b) , pro něž platí $F'(x) = G'(x)$ pro každé $x \in (a,b)$.

420. Rozhodněte, zda existuje zobecněná primitivní funkce k funkci $(|\sin x|)^{-1/2}$ na každém (omezeném) intervalu (a,b) .

421. Charakterizujte všechny množiny $M \subset E_1$, jejichž charakteristická funkce má zobecněnou primitivní funkci v E_1 .

422. Dokažte tvrzení:

Nechť f je polynom. Potom existuje zobecněná primitivní funkce k funkci $\operatorname{sgn} f$.

423. Charakterizujte všechny funkce f definované v intervalu $(0,1)$, pro něž má funkce $\operatorname{sgn} f$ v intervalu $(0,1)$ zobecněnou primitivní funkci.

424. Rozhodněte, zda ke každé funkci ryze monotonní v omezeném intervalu (a,b) existuje zobecněná primitivní funkce v (a,b) .

425. Funkce f monotonní v intervalu (a,b) má v (a,b) zobecněnou primitivní funkci, právě když množina bodů nespojitosti funkce f

v (a,b) je konečná. Dokažte.

426. Rozhodněte, zda existuje funkce f definovaná v (a,b), která má v (a,b) nekonečně mnoho bodů nespojitosti a ke které existuje zobecněná primitivní funkce (primitivní funkce) v intervalu (a,b).

Řešte úlohu také pro případ omezeného intervalu (a,b).

427. Rozhodněte, zda platí věta:

Nechť k funkci f definované v E_1 existuje na každém omezeném intervalu (a,b) zobecněná primitivní funkce k f v E_1. Potom existuje zobecněná primitivní funkce k f v E_1.

428. Dokažte tvrzení:

Nechť F je primitivní funkce a G zobecněná primitivní funkce k funkci f na intervalu (a,b). Potom existuje $c \in E_1$ tak, že pro všechna $x \in (a,b)$ platí

$$F(x) = G(x) + c .$$

429. Nechť $M \subset E_1$ je taková množina, že $M \cap I$ je konečná množina pro každý omezený interval $I \subset E_1$. Nechť F, G jsou spojité funkce v E_1 a nechť pro každé $x \in E_1 - M$ platí $F'(x) = G'(x) \in E_1$. Potom existuje $c \in E_1$ tak, že rovnost $F(x) = G(x) + c$ platí pro každé $x \in E_1$. Dokažte.

430. Nechť funkce f má v každém bodě x intervalu (a,b) derivaci $f'(x)$ $(\in E_1^*)$. Nechť množina $M = \{x \in (a,b) ; f'(x) \notin E_1\}$ je konečná a nechť $f'(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a,b)$. Potom funkce f má zobecněnou primitivní funkci v (a,b). Dokažte.

§ 7. NEWTONŮV INTEGRÁL

O funkci f říkáme, že je newtonovsky integrovatelná (má Newtonův integrál, apod.) v intervalu (a,b), jestliže

(a) funkce f je definována na množině M takové, že $(a,b) - M$ je konečná množina,

(b) existuje funkce F, která je zobecněnou primitivní funkcí k funkci f v intervalu (a,b),

(c) existují vlastní limity

$$\lim_{x \to a+} F(x) = F(a+), \qquad \lim_{x \to b-} F(x) = F(b-).$$

Potom klademe

$$N \int_a^b f = F(b-) - F(a+)$$

a toto číslo nazýváme Newtonův integrál funkce f od a do b. Nehrozí-li nebezpečí z nedorozumění, píšeme pouze $\int_a^b f$ místo $N \int_a^b f$.

431. Sestrojte funkci f spojitou na intervalu $\langle 0, \infty)$ tak, aby existoval $N \int_0^\infty f$ a neexistoval $N \int_0^\infty |f|$.

432. Rozhodněte, zda platí tato věta:

Je-li f funkce spojitá a nezáporná v intervalu $\langle 1, \infty)$ a existuje $N \int_1^\infty f$, potom je $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

433. Buď $\alpha \in E_1$. Sestrojte funkci f spojitou na $\langle 1, \infty)$ tak, aby $N \int_1^\infty f = \alpha$ a aby funkce f nebyla ani zdola ani shora omezená na intervalu $\langle 1, \infty)$.

434. Nechť f je spojitá funkce na (a,b) a nechť existuje $N \int_a^b |f|$. Potom platí: Je-li F primitivní funkce k f v (a,b), existují neklesající spojité funkce F_1, F_2 na $\langle a,b \rangle$ tak, že $F = F_1 - F_2$ v (a,b). Dokažte.

435. Nechť funkce f má spojitou druhou derivaci na intervalu $(0, \infty)$. Potom pro každé a, x, $0 < a < x$, platí

$$f'(a) = \frac{f(a) - f(x)}{x - a} + \frac{1}{x - a} \int_a^x (x - t) f''(t)\,dt \quad .$$

Dokažte.

436. Nechť funkce f má spojitou druhou derivaci v intervalu $(0, \infty)$ a nechť $\lim_{x \to \infty} f''(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$. Potom $\lim_{x \to \infty} f'(x) = 0$. Dokažte. (Užijte např. cvičení 435.)

437. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Nechť f je spojitá nezáporná funkce definovaná v interva
$\langle 0,1 \rangle$ a nechť existuje $\alpha \in E_1$ tak, že pro každé $n \in N$
platí

$$\int_0^1 f^n = \alpha$$

(f^n je n-tá mocnina funkce f). Potom platí $f(x) = 0$ pro
všechna $x \in \langle 0,1 \rangle$ nebo $f(x) = 1$ pro všechna $x \in \langle 0,1 \rangle$

438. Sestrojte funkci f definovanou v intervalu $(-1, 1)$, pro ni
platí

$$N\int_{-1}^{1} f = 0 \, , \qquad N\int_{-1}^{1} f^3 > 0 \, .$$

439.* Rozhodněte, zda existuje funkce f definovaná v intervalu (a,
taková, že existuje $N\int_a^b f$ a každý interval $I \subset (a,b)$ obsah
bod nespojitosti funkce f .

440. Rozhodněte, zda platí věta:

Nechť existuje $N\int_a^b f$. Potom

$$\sup \{ | N\int_\alpha^\beta f | \, ; \, (\alpha,\beta) \subset (a,b) \} < +\infty \, .$$

441. Sestrojte omezený interval (a,b) a funkce f, g spojité v (a,b) tak, aby integrály

$$N\int_a^b f \quad \text{a} \quad N\int_a^b g^2 \quad \text{existovaly}$$

a integrály

$$N\int_a^b g \quad \text{a} \quad N\int_a^b f^2 \quad \text{neexistovaly.}$$

442. Rozhodněte, zda platí věta:

Nechť (a,b) je omezený interval, f omezená funkce na intervalu (a,b) a $N\int_a^b f$ existuje. Potom existuje $N\int_a^b |f|$.

443. Rozhodněte, zda platí věta:

Nechť existují integrály

$$N\int_a^b f \quad \text{a} \quad N\int_a^b g .$$

Potom existuje integrál

$$N\int_a^b \max(f,g) .$$

444. Nechť existuje $N\int_0^\infty f$. Rozhodněte, zda pak platí některá z následujících podmínek:

(a)
$$\lim_{k\to\infty} N\int_k^{k+1} f = 0 ;$$

(b) $\lim_{k \to \infty} N \int_{k}^{\infty} f = 0$;

(c) $\lim_{k \to \infty} N \int_{k}^{\infty} k\, f = 0$.

445. Sestrojte funkce f , g omezené v intervalu $(0, +\infty)$, které mají v tomto intervalu derivace všech řádů, tak, aby existoval

$$N \int_{0}^{\infty} f \quad \text{a neexistoval} \quad N \int_{0}^{\infty} f \cdot g \; .$$

446. Sestrojte funkce f , g mající derivace všech řádů v intervalu $(0, \infty)$ tak, aby f měla omezenou primitivní funkci na $(0, \infty)$, $\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$ a

$$N \int_{0}^{\infty} f \cdot g \quad \text{neexistoval.}$$

447. Nechť R je racionální lomená funkce taková, že stupeň polynomu v čitateli je menší než stupeň polynomu ve jmenovateli. Nechť $b >$ … a nechť funkce f má omezenou primitivní funkci v (b, ∞) . Pot… existuje $a > b$ tak, že funkce R je spojitá na $\langle a, \infty)$ a ex… tuje $N \int_{a}^{\infty} f \cdot R$. Dokažte.

448. Buď f funkce definovaná v E_1. Rozhodněte, zda platí tato věta: Nechť pro každé $n \in N$ existuje

$$N \int_{-n}^{n} f \quad \text{a nechť existuje} \quad \lim_{n \to \infty} \int_{-n}^{n} f = A .$$

Potom existuje $N \int_{-\infty}^{\infty} f$ a je $\int_{-\infty}^{\infty} f = A$.

449. Rozhodněte, zda platí tato věta:

Nechť f je spojitá funkce v $\langle 0, \infty)$. Nechť existuje vlastní $\lim\limits_{x \to \infty} N \int_{0}^{x} f = A$. Potom existuje $N \int_{0}^{\infty} f$ a je $N \int_{0}^{\infty} f = A$.

450. Nechť funkce f je definována v intervalu $I = (a,b)$ a nechť existuje systém intervalů $\{J_\alpha\}_{\alpha \in A}$ takových, že f má Newtonův integrál na každém z intervalů J_α a $I \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} J_\alpha$. Rozhodněte, zda pak existuje Newtonův integrál z funkce f od a do b.

Existuje tento integrál v případě, že budeme předpokládat navíc, že interval I je omezený ?

§ 8. RIEMANNŮV INTEGRÁL

Horní (resp. dolní) Riemannův integrál funkce f od a do b značíme

$$\overline{\int_a^b} f \text{ , resp. } \underline{\int_a^b} f \text{ .}$$

Pro Riemannův integrál užíváme symbolu $R \int_a^b f$; kde nehrozí nebezpečí z nedorozumění, píšeme stručněji $\int_a^b f$ místo $R \int_a^b f$. Existuje-li $R \int_a^b f$, říkáme, že f je riemannovsky integrovatelná v intervalu $\langle a,b \rangle$ (má Riemannův integrál atd.). Oscilace omezené funkce f je zavedena v úloze 249.

451. Nechť α , $\beta \in E_1$, $\alpha \leq \beta$. Sestrojte funkci f definovanou v intervalu $\langle 0,1 \rangle$ tak, aby

$$\overline{\int_0^1} f = \beta \text{ , } \quad \underline{\int_0^1} f = \alpha \text{ .}$$

452. Nechť funkce f definovaná na intervalu $\langle a,b \rangle$ má tuto vlastnost: Existuje $M \in E_1$ tak, že

$$| f(x) - f(y) | \leq M | x - y | \text{ ,}$$

kdykoli $x, y \in (a,b)$. Potom

$$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f .$$

Dokažte.

453. Rozhodněte, zda platí toto tvrzení:

Nechť f je nezáporná omezená funkce definovaná na intervalu $\langle a,b \rangle$ taková, že

$$\overline{\int_a^b} f = 0 .$$

Potom existuje konečná množina $K \subset \langle a,b \rangle$ tak, že $f(x) = 0$ pro každé $x \in \langle a,b \rangle - K$.

454. Rozhodněte, zda platí tato věta:

Nechť f je funkce definovaná na intervalu $\langle 0,1 \rangle$. Potom

$R \int_0^1 f$ existuje, právě když existuje $R \int_0^1 |f|$.

455. Nechť existuje integrál $R \int_a^b f$. Potom existují též integrály

$$R \int_a^b |f| , \quad R \int_a^b f^2$$

a platí

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \leq \sqrt{b - a} \cdot \left(\int_a^b f^2 \right)^{1/2} .$$

Dokažte.

Vyšetřete, kdy v některé z uvedených nerovností nastává rovnost.

456. Dokažte tuto větu:

Nechť existuje $R \int_a^b f$ a $R \int_a^b g$. Potom existuje $R \int_a^b f \cdot g$.

(Užijte vztahu $f \cdot g = \frac{1}{4}[(f + g)^2 - (f - g)^2]$ a cvičení 455 .)

457. Nechť funkce f , g jsou riemannovsky integrovatelné na $\langle a,b \rangle$. Potom jsou funkce $\min(f,g)$ a $\max(f,g)$ riemannovsky integrovatelné na $\langle a,b \rangle$. Dokažte.

458. Sestrojte funkci f , která má nekonečně mnoho bodů nespojitosti v intervalu $\langle 0,1 \rangle$ a existuje $R \int_0^1 f$.

Je možné takovou funkci f sestrojit tak, aby navíc každý interval $I \subset \langle 0,1 \rangle$ obsahoval bod nespojitosti funkce f ?

459. Nechť funkce f je definována vztahy

$$f(1/k) = 1 \text{ pro všechna } k \in N ,$$

$$f(x) = 0 \text{ pro } x \in \langle 0,1 \rangle - \{1/k \; ; \; k \in N\} .$$

Dokažte, že existuje $R \int_0^1 f$.

460. Nechť $\{x_n\}$ je konvergentní posloupnost s limitou x_0 . Nechť f je omezená funkce na $\langle a,b \rangle$ a nechť $f(x) = 0$ pro všechna $x \in \in \langle a,b \rangle - \{x_n ; n \in N\}$.

Potom existuje $R \int_a^b f$. Dokažte.

461. Nechť $M \subset \langle a,b \rangle$ je spočetná množina. Na intervalu $\langle a,b \rangle$ definujte funkci f tak, aby byla nespojitá v každém bodě $x \in M$ a existoval integrál $R \int_a^b f$.

462. Buď f nezáporná omezená funkce definovaná na intervalu $\langle a,b \rangle$. Nechť pro každé $\alpha > 0$ je

$$\{ x \in \langle a,b \rangle ; f(x) \geq \alpha \}$$

konečná množina. Potom funkce f je riemannovsky integrovatelná v intervalu $\langle a,b \rangle$. Dokažte.

463.* Nechť f je omezená funkce, definovaná na intervalu $\langle a,b \rangle \subset E_1$ a nechť existuje interval $I \subset \langle a,b \rangle$ tak, že funkce f je nespojitá v každém bodě $x \in I$. Potom neexistuje

$$R \int_a^b f(x)\, dx .$$

Dokažte.

464.* Sestrojte funkci f definovanou v intervalu $\langle a,b \rangle$, pro kterou existuje $R \int_a^b f$ a množina bodů nespojitosti funkce f v $\langle a,b \rangle$ není spočetná.

465. Nechť funkce f je spojitá v E_1. Rozhodněte, zda platí implikace: Je-li pro každé $\alpha > 0$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f = 0 ,$$

potom je f lichá funkce.

466. Rozhodněte, zda platí toto tvrzení:

Nechť f je spojitá funkce na $\langle a,b \rangle$ a nechť pro každý interval $\langle \alpha , \beta \rangle \subset \langle a,b \rangle$ platí

$$\int_{\alpha}^{\beta} f = \beta - \alpha .$$

Potom je $f = 1$ na $\langle a,b \rangle$.

467. Sestrojte funkci f riemannovsky integrovatelnou v intervalu $\langle 0,1 \rangle$ s touto vlastností: Položíme-li $F(x) = R \int_0^x f$ pro $x \in \langle 0,1 \rangle$, potom $F'\left(\frac{1}{2}\right)$ existuje a je $F'\left(\frac{1}{2}\right) \neq f\left(\frac{1}{2}\right)$.

468. Sestrojte funkci f definovanou v intervalu $\langle 0,1 \rangle$ tak, že existuje $R \int_0^1 f$, f není spojitá na $(0,1)$ a pro funkci F,

definovanou na $\langle 0,1 \rangle$ rovností $F(x) = R \int_0^x f$, platí $F'(x) =$
$= f(x)$ pro všechna $x \in (0,1)$.

469. Buď f spojitá funkce v intervalu $\langle a,b \rangle$ a nechť $R \int_a^b f \cdot g =$
$= 0$ pro každou riemannovsky integrovatelnou funkci g na $\langle a,b \rangle$. Potom $f(x) = 0$ pro každé $x \in \langle a,b \rangle$. Dokažte.

470. Sestrojte posloupnost funkcí $\{f_n\}$ riemannovsky integrovatelných v intervalu $\langle 0,1 \rangle$, aby platilo: Pro každé $n \in N$ je $R \int_0^1 |f_n| =$
$= 1$ a $R \int_0^1 |f_n - f_m| = 2$, kdykoli $m \neq n$.

Lze navíc požadovat, aby funkce f_n byly spojité v $\langle 0,1 \rangle$?

471. Sestrojte funkce f_n , $n \in N$, riemannovsky integrovatelné v intervalu $\langle 0,1 \rangle$ tak, aby pro každé $x \in \langle 0,1 \rangle$ platilo
$\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0$ a neexistovala limita

$$\lim_{n \to \infty} R \int_0^1 f_n .$$

472. Buď $A \in E_1$. Sestrojte funkce f_n , $n \in N$, spojité v intervalu $\langle 0,1 \rangle$, pro něž $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0$ pro každé $x \in \langle 0,1 \rangle$ a

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n = A .$$

473. Rozhodněte, zda existují funkce f , f_n , $n \in N$, riemannovsky integrovatelné v intervalu $\langle a,b \rangle$ takové, že $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ pro každé $x \in \langle a,b \rangle$, existuje $\lim_{n \to \infty} R \int_a^b f_n = A$ a platí

$$A \neq R \int_a^b f \ .$$

474. Sestrojte funkce f_n riemannovsky integrovatelné v intervalu $\langle 0,1 \rangle$ a funkci f omezenou na $\langle 0,1 \rangle$ tak, aby $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ pro každé $x \in \langle 0,1 \rangle$ a neexistoval integrál

$R \int_0^1 f$.

475. Sestrojte posloupnost funkcí f_n riemannovsky integrovatelných na intervalu $\langle a,b \rangle$ tak,aby

$$\lim_{n \to \infty} R \int_a^b f_n = 0 \ ,$$

$$\lim_{n \to \infty} [\operatorname{osc} (f_n ; \langle a,b \rangle)] = + \infty \ .$$

476.* Sestrojte funkce f_n definované na intervalu $\langle 0,1 \rangle$ tak, aby existoval $R \int_0^1 f_n$ pro každé $n \in N$,

$$\lim_{n \to \infty} R \int_0^1 f_n = 0$$

a pro každé $x \in \langle 0,1 \rangle$ je posloupnost $\{ f_n (x) \}$ divergentní.

477. Sestrojte funkci f definovanou na intervalu $\langle a,b \rangle$, pro niž existuje $R \int_a^b f$ a neexistuje $N \int_a^b f$.

478. Nechť funkce f je omezená v intervalu $\langle a,b \rangle$ a nechť F je primitivní funkce k funkci f na (a,b). Buď $\mathcal{D}$ dělení intervalu $\langle a,b \rangle$ a $S(\mathcal{D})$ buď horní Riemannův součet příslušný k funkci f a k dělení $\mathcal{D}$. Potom

$$\lim_{x \to b-} F(x) - \lim_{x \to a+} F(x) \leq S(\mathcal{D}) .$$

Dokažte.

479.* Nechť f je funkce definovaná v intervalu $\langle a,b \rangle$ taková, že

(a) existuje $R \int_a^b f$,

(b) funkce f má zobecněnou primitivní funkci v (a,b).

Dokažte, že existuje $N \int_a^b f$ a platí

$$R \int_a^b f = N \int_a^b f .$$

480. Rozhodněte, zda existuje funkce f definovaná v intervalu $\langle 0,1 \rangle$ tak, že existují integrály

$$R \int_0^1 f , \qquad N \int_0^1 f$$

a neexistuje $N \int_0^1 |f|$.

481. Nechť f je monotonní funkce na intervalu $\langle a,b \rangle$. Rozhodněte, zda vždy existují integrály

$$R \int_a^b f \,, \qquad N \int_a^b f$$

a kdy z obou integrálů eventuálně existuje

(a) alespoň jeden;

(b) nejvýše jeden;

(c) právě jeden.

482. Rozmyslete si, které z úloh o Newtonově integrálu mají smysl i pro Riemannův integrál a eventuálně tyto úlohy pro Riemannův integrál řešte.

Podobně se pokuste formulovat a řešit úlohy z tohoto paragrafu pro integrál Newtonův.

§ 9. POSLOUPNOSTI - POKRAČOVÁNÍ

Pokud není v textu úloh tohoto paragrafu výslovně uvedeno něco jiného, znamená výraz "posloupnost" vždy posloupnost reálných čísel. Připomínáme, že limitou posloupnosti komplexních čísel $\{z_n\}$ rozumíme takové komplexní číslo z, pro něž je $\lim |z_n - z| = 0$.

Podobně jako v § 2 píšeme někdy místo $\liminf\limits_{n \to \infty} a_n$, $\limsup\limits_{n \to \infty} a_n$ stručněji pouze $\liminf a_n$, $\limsup a_n$. Říkáme, že bod $a \in E_1^*$ je hromadným bodem posloupnosti $\{a_n\}$, existuje-li posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ vybraná z posloupnosti $\{a_n\}$ tak, že $\lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k} = a$.

483. Buď $\{z_n\}$ posloupnost komplexních čísel taková, že $\limsup |z_n| = 0$. Potom $\lim z_n = 0$. Dokažte.

484. Sestrojte posloupnost komplexních čísel $\{z_n\}$, $z_n = x_n + i\, y_n$, pro kterou je $x_n > 0$ pro všechna $n \in N$, $\lim |z_n|$ existuje a $\lim z_n$ neexistuje.

Je-li $\alpha \geq 0$, rozhodněte, zda lze v řešené úloze požadovat navíc ještě $\lim |z_n| = \alpha$.

485. Rozhodněte o platnosti tvrzení:

Nechť je $\{z_n\}$ posloupnost komplexních čísel, $\{\rho_n\}$ posloupnost nezáporných čísel, $\{\varphi_n\}$ posloupnost čísel z intervalu

$\langle 0, 2\pi)$ a nechť pro každé $n \in N$ platí $z_n =$

$= \rho_n(\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n)$. Potom $\lim z_n$ existuje právě tehdy,

když konvergují posloupnosti $\{\rho_n\}$, $\{\varphi_n\}$.

486. Buď $\{z_n\}$ posloupnost komplexních čísel, $z_n = x_n + i\, y_n$, kde $x_n, y_n \in E_1$ pro všechna $n \in N$. Potom platí

$$\limsup |x_n| \leq \limsup |z_n| ,$$

$$\limsup |y_n| \leq \limsup |z_n| ,$$

$$\limsup |z_n| \leq \limsup |x_n| + \limsup |y_n| .$$

Dokažte.

487. Rozhodněte o platnosti věty:

Nechť $\{z_n\}$, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ mají týž význam jako v 486. Je-li $\lim z_n = \lim x_n$, platí $\lim y_n = 0$.

488. Rozhodněte, zda platí tato věta:

Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $\{z_n\}$ posloupnost komplexních čísel. Jestliže pro každé $n \in N$ platí $a_n \leq |z_n| \leq b_n$ a $\lim a_n = \lim b_n \in E_1$, potom $\{z_n\}$ je konvergentní posloupnost.

489. Buď a komplexní číslo, $|a| = 1$; pro $n \in N$ položme $b_n = a^n$.

Potom $\lim b_n$ existuje tehdy a jen tehdy, když $a = 1$. Dokažte.

490. Nechť $\{b_n\}$ je konvergentní posloupnost reálných čísel, $\lim b_n = 0$. Nechť $\{z_n\}$ je posloupnost komplexních čísel taková, že pro každé $n , p \in N$ platí

$$| z_{n+p} - z_n | \leq b_n .$$

Potom posloupnost $\{z_n\}$ konverguje. Dokažte.

491. Rozmyslete si, které úlohy z § 2 mají smysl i pro posloupnosti komplexních čísel a pokuste se eventuálně analogické úlohy v komplexním oboru řešit.

492. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a nechť pro každé $\varepsilon > 0$ je

$$\limsup a_n < \liminf a_n + \varepsilon .$$

Potom existuje $\lim a_n$. Dokažte.

493. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost, $A = \{a_n ; n \in N\}$. Rozhodněte, zda pak platí

$$\limsup a_n = \sup A ,$$

$$\liminf a_n = \inf A .$$

494. Nechť $\{a_n\}$, A mají stejný význam jako v úloze 493. Sestrojte posloupnost $\{a_n\}$ tak, aby platilo

$$\inf A < \liminf a_n < \limsup a_n < \sup A .$$

495. Rozhodněte o platnosti tvrzení:

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost, $A_k = \{a_n ; n \in N , n \geq k\}$ pro $k \in N$. Potom

$$\sup A_1 = \sup A_k$$

pro každé $k \in N$, právě když

$$\sup A_1 = \limsup a_n .$$

496. Nechť omezená $\{x_n\}$ má právě dva hromadné body. Buď $a = \liminf x_n$, $b = \limsup x_n$. Potom je $b > a$ a pro každé $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2} (b - a))$ je $\{n \in N ; x_n \in \langle a + \varepsilon , b - \varepsilon \rangle\}$ konečná množina. Dokažte.

497. Rozhodněte o platnosti tvrzení :

Nechť pro posloupnost $\{x_n\}$ platí $\lim |x_n| = +\infty$. Potom žádné $x \in E_1$ není hromadným bodem posloupnosti $\{x_n\}$.

498. Dokažte tvrzení:

Z každé divergentní posloupnosti lze vybrat alespoň jednu posloupnost, která má limitu.

499. Rozhodněte, zda platí tvrzení:

(a) Z každé posloupnosti, která nemá limitu,lze vybrat konvergentní posloupnost.

(b) Z každé posloupnosti, která nemá limitu, lze vybrat dvě posloupnosti (resp. konvergentní posloupnosti), které mají různé limity.

500. Posloupnost $\{x_n\}$ nemá limitu tehdy a jen tehdy, když existuje vybraná posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, pro niž

$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} > \liminf x_n$. Dokažte. Formulujte obdobné tvrzení pro $\limsup$.

501. Nechť $\liminf x_n = a \in E_1^*$. Potom pro každou posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ vybranou z $\{x_n\}$ platí $\liminf\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \geq a$ (speciálně $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \geq a$, pokud tato limita existuje); dále existuje posloupnost $\{x_{n_k}\}$ vybraná z $\{x_n\}$ tak, že $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Dokažte.

502. Nechť $a, b \in E_1^*$. Sestrojte posloupnost $\{a_n\}$ takovou, aby platilo

$$\liminf a_n = a , \qquad \limsup a_n = b .$$

Najděte nutnou a postačující podmínku pro řešitelnost této úlohy.

503. Nechť $M \subset E_1^*$ je konečná množina. Sestrojte posloupnost $\{a_n\}$, jejíž množina všech hromadných bodů je právě množina M.

504. Rozhodněte, zda lze sestrojit posloupnost $\{a_n\}$ z úlohy 503 tak, aby kromě požadovaných vlastností vyhovovala podmínce

$$M \cap \{a_n ; n \in N\} = \emptyset .$$

505. Sestrojte posloupnost $\{a_n\}$, jejíž množina hromadných bodů je právě množina N.

506. Nechť $M = \{1/n ; n \in N\}$. Rozhodněte, zda existuje posloupnost $\{a_n\}$, jejíž množina všech hromadných bodů je právě množina M.

507. Nechť posloupnost $\{a_n\}$ vyhovuje podmínce: Pro každé $m , n \in N$ platí

$$0 \leq a_{m+n} \leq a_m + a_n .$$

Potom existuje limita $\lim \frac{a_n}{n}$. Dokažte.

508. Dokažte toto tvrzení:

Nechť pro posloupnost $\{a_n\}$ kladných čísel platí

$$(\limsup a_n) \cdot (\limsup \frac{1}{a_n}) = 1 .$$

Potom posloupnost $\{a_n\}$ konverguje.

509. Dokažte, že pro posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ platí:

$$\liminf a_n + \liminf b_n \leq \liminf (a_n + b_n) \leq \liminf a_n +$$
$$+ \limsup b_n \leq \limsup (a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n ,$$

pokud mají všechny uvedené součty smysl.

510. Dokažte, že pro posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ nezáporných čísel platí:

$$\liminf a_n \cdot \liminf b_n \leq \liminf(a_n \cdot b_n) \leq \liminf a_n \cdot$$
$$\cdot \limsup b_n \leq \limsup(a_n \cdot b_n) \leq \limsup a_n \cdot \limsup b_n ,$$

pokud mají všechny uvedené součiny smysl.

511. Rozhodněte o platnosti věty:

Nechť $\lim a_n = a \in E_1$ a M je množina všech hromadných bodů posloupnosti $\{b_n\}$. Potom platí:

(a) $\{y ; y = a + x , x \in M\}$ je množina všech hromadných bodů posloupnosti $\{a_n + b_n\}$;

(b) je-li $a \neq 0$, pak $\{y ; y = ax , x \in M\}$ je množina všech hromadných bodů posloupnosti $\{a_n . b_n\}$.

512. Rozhodněte o platnosti tvrzení:

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost, $f: N \longrightarrow N$ zobrazení, pro které platí $\lim f(n) = +\infty$. Položme $b_n = a_{f(n)}$, $n \in N$. Potom platí

$$\lim\sup a_n = \lim\sup b_n \quad .$$

513. Rozhodněte o platnosti tvrzení:

Nechť f, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ mají týž smysl jako v úloze 512. Potom jsou si rovny množiny všech hromadných bodů posloupností $\{a_n\}$, $\{b_n\}$.

514. Rozhodněte o platnosti tvrzení:

Nechť je A množina všech hromadných bodů omezené posloupnosti $\{a_n\}$, B množina všech hromadných bodů omezené posloupnosti $\{b_n\}$. Potom $C = \{x + y ; x \in A , y \in B\}$ je množina všech hromadných bodů posloupnosti $\{a_n + b_n\}$.

515. Volíme-li označení stejné jako v předcházející úloze a je-li t hromadný bod posloupnosti $\{a_n + b_n\}$, rozhodněte, zda vždy platí $t \in C$.

516. Rozhodněte, zda existuje funkce f spojitá a ryze monotonní v E_1 a omezená posloupnost $\{a_n\}$, pro kterou platí

$$f(\liminf a_n) \neq \liminf f(a_n).$$

Charakterizujte všechny funkce f definované v E_1, které mají následující vlastnost: Je-li $\{a_n\}$ omezená posloupnost, potom platí

$$f(\liminf a_n) = \liminf f(a_n).$$

§ 10. ŘADY

V tomto paragrafu pracujeme opět s posloupnostmi a řadami reálných čísel; čtenář si může rozmyslet, které z úloh mají smysl i pro posloupnosti a řady komplexních čísel a eventuálně tyto úlohy v komplexním oboru řešit.

Pro zjednodušení některých zápisů píšeme v tomto paragrafu někdy místo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pouze $\sum a_n$. Permutací množiny N rozumíme prosté zobrazení $f: N \longrightarrow N$, pro něž je $f(N) = N$.

517. Dokažte tvrzení:

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost celých čísel. Potom $\sum a_n$ konverguje právě tehdy, když množina

$$\{k \; ; \; a_k \neq 0\}$$

je konečná.

518. Nechť řady $\sum a_n$, $\sum b_n$ jsou absolutně konvergentní. Potom jsou též řady $\sum (a_n + b_n)$, $\sum (a_n \cdot b_n)$ absolutně konvergentní. Dokažte.

519. Dokažte následující tvrzení:

Nechť řady $\sum a_n$, $\sum b_n$ jsou absolutně konvergentní. Nechť f je prosté zobrazení množiny N na množinu $N \times N$ (tj. množinu všech dvojic přirozených čísel). Je-li pro $n \in N$ $f(n) = (j,k)$, položme $c_n = a_j b_k$. Potom je řada $\sum c_n$ absolutně konvergentní a platí

$$(\sum a_n) . (\sum b_n) = \sum c_n .$$

520.* Rozhodněte, zda existují divergentní řady $\sum a_n$, $\sum b_n$, pro které řada (tzv. Cauchyův součin řad $\sum a_n$, $\sum b_n$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}) = \sum c_n$$

konverguje absolutně.

Lze volit řady $\sum a_n$, $\sum b_n$ tak, aby konvergovaly právě dvě z řad $\sum a_n$, $\sum b_n$, $\sum c_n$?

521. Sestrojte konvergentní řady $\sum a_n$, $\sum b_n$, pro které Cauchyův součin (viz předcházející úloha) je divergentní řada.

522. Pro $x \in E_1$ buď $x^+ = \max (x, 0)$, $x^- = x^+ - x$. Řada $\sum a_n$ konverguje absolutně, právě když konvergují řady $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$. Jestliže řada $\sum a_n$ konverguje absolutně, potom $\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^-$. Jestliže řada $\sum a_n$ konverguje a $\sum |a_n| = + \infty$, je $\sum a_n^+ = \sum a_n^- = + \infty$.

Dokažte.

523. Dokažte následující tvrzení:

Řada $\sum a_n$ konverguje absolutně právě tehdy, když řada $\sum a_{f(n)}$ konverguje pro každou permutaci f množiny N.

524. Nechť řada $\sum a_n$ konverguje a $\sum |a_n| = +\infty$. Potom ke každému $a \in E_1^*$ existuje permutace f množiny N taková, že

$$\sum a_{f(n)} = a .$$

525.* Rozhodněte o platnosti věty:

Nechť řada $\sum a_n$ konverguje a $\sum |a_n| = +\infty$. Potom ke každé konečné množině $M \subset E_1^*$ existuje permutace f množiny N taková, že každý bod množiny M je hromadným bodem posloupnosti

$$\left\{ \sum_{n=1}^{k} a_{f(n)} \right\}_{k=1}^{\infty} .$$

526. Charakterizujte všechny konvergentní řady, pro které platí

$$\sum a_n = a , \qquad \sum |a_n| = |a| .$$

527. Sestrojte posloupnost $\{a_n\}$ kladných čísel tak, aby

$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ a řada $\sum a_n$ konvergovala (divergovala).

528. Sestrojte posloupnost $\{a_n\}$ kladných čísel tak, aby

$\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ a $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$. Dokažte, že řada $\sum a_n$ konverguje.

529.* Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost kladných čísel. Jestliže existuje

$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$, potom existuje $\lim \sqrt[n]{a_n}$ a obě limity se rovnají.

Dokažte a pomocí tohoto tvrzení ukažte, že

$$\lim \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e .$$

530. Rozhodněte, zda platí věta:

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost nezáporných čísel, $\lim a_n = 0$. Potom řada $\sum (-1)^n a_n$ konverguje.

531. Rozhodněte, zda platí tato věta:

Buďte a_k, b_k, c_k, $k \in N$, taková reálná čísla, že řada $\sum c_k$ konverguje a pro každé $k \in N$ je $|a_k - b_k| \leq c_k$.

Potom řada $\sum a_k$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum b_k$.

532. Rozhodněte, zda platí tvrzení:

Nechť řada $\sum a_n$ konverguje, $\{b_n\}$ je omezená posloupnost. Potom $\sum(a_n \cdot b_n)$ konverguje.

533. Dokažte tuto větu:

Řada $\sum a_n$ je absolutně konvergentní tehdy a jen tehdy, když pro každou omezenou posloupnost $\{b_n\}$ konverguje řada $\sum(a_n \cdot b_n)$.

534. Buď $\{a_n\}$ posloupnost nezáporných čísel, $\mathcal{K}$ buď systém všech konečných podmnožin K množiny N . Potom

$$\sum a_n = \sup_{K \in \mathcal{K}} \{ \sum_{j \in K} a_j \} .$$

Dokažte. (Nejprve objasněte smysl symbolu $\sum_{j \in K} a_j$.)

535. Dokažte tuto větu:

Nechť $\sum a_n$ konverguje a nechť existuje $\lim n \cdot a_n$. Potom je $\lim n\, a_n = 0$.

Sestrojte příklad konvergentní řady $\sum a_n$ takové, aby $\lim n \cdot a_n$ neexistovala.

536. Rozhodněte, zda platí věta:

Nechť posloupnost $\{a_n\}$ je nerostoucí a nechť $a_n \geq 0$ pro každé $n \in N$. Jestliže $\sum a_n$ konverguje, potom platí $\lim n \cdot a_n = 0$.

Rozhodněte, zda za uvedených předpokladů o posloupnosti $\{a_n\}$ je podmínka $\lim n \cdot a_n = 0$ postačující pro konvergenci $\sum a_n$.

537. Rozhodněte, zda platí tvrzení:

Nechť $\sum a_n$ konverguje absolutně; potom konverguje též $\sum a_n^2$.

538. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

(a) Nechť $\sum a_n$ konverguje; potom konverguje $\sum a_n^2$.

(b) Nechť $\sum a_n^2$ konverguje; potom konverguje $\sum a_n$.

539. Dokažte následující tvrzení:

Je-li $\sum a_n$ konvergentní řada s nezápornými členy, potom

$$\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n} < \infty .$$

540. Buď $p' \in E_1$, $p' > 1$ a nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{p'}$ konverguje. Potom pro každé $p \geq p'$ konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{p}$. Dokažte a pro daná čísla p, p', $1 < p' < p$, najděte posloupnost $\{a_n\}$ tak, aby

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < +\infty \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{p'} = +\infty .$$

541. Najděte posloupnost $\{a_n\}$, pro niž $\lim a_n = 0$ a pro každé $p \geq 1$ je

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p = +\infty .$$

542. Nechť $\varepsilon > 0$. Sestrojte nerostoucí posloupnost nezáporných čísel $\{a_n\}$ tak, aby řada $\sum a_n$ konvergovala a $\lim n^{1+\varepsilon} a_n = +\infty$. (Porovnejte se cvičením 536.)

543. Sestrojte pro $k \in N$ posloupnosti $\{a_n^k\}_{n=1}^{\infty}$ tak, aby pro každé $k \in N$ bylo $0 \leq \limsup\limits_{n \to \infty} a_n^k < +\infty$ a

$$\limsup_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_n^k > \sum_{k=1}^{\infty} \limsup_{n \to \infty} a_n^k .$$

544. Buď f spojitá klesající funkce definovaná v intervalu $\langle 1, +\infty)$. Potom pro $m, n \in N$, $m \geq n$, je

$$\sum_{k=n}^{m} f(k) - \int_n^m f(t)dt \leq f(n) .$$

Dokažte.

545. Nechť $\{a_n\}$ je omezená posloupnost reálných čísel; položme pro

$$x \in \left(\frac{1}{n+1} \,,\, \frac{1}{n} \right\rangle, \; n \in N \,,$$

$$f(x) = a_n \,, \quad f(0) = 0 \,.$$

Potom platí

$$R \int_0^1 f = \sum \frac{a_n}{n\,(n+1)} \,.$$

Dokažte.

546. Předpokládejme, že funkce f je spojitá na $\langle 1, +\infty)$ a položme $a_n = \int_n^{n+1} f$ $(n = 1,2,\dots)$. Potom Newtonův integrál $\int_1^{+\infty} f$ existuje, právě když konverguje řada $\sum a_n$. Newtonův integrál $\int_1^{+\infty} |f|$ existuje, právě když řada $\sum a_n$ konverguje absolutně. Dokažte.

§ 11. POSLOUPNOSTI A ŘADY FUNKCÍ

Podobně jako u číselných posloupností značíme posloupnost funkcí f_n, $n \in N$, symbolem $\{f_n\}$. Symbol " $f_n \longrightarrow f$ na M " značí, že funkce f_n, $n \in N$, a f jsou vesměs definovány na množině M a pro každé $x \in M$ je $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$. Je-li navíc pro každé $x \in M$ posloupnost $\{f_n(x)\}$ neklesající (nerostoucí), píšeme $f_n \nearrow f$ na M ($f_n \searrow f$ na M).

Symbol " $f_n \rightrightarrows f$ na M " značí, že funkce f_n, $n \in N$, f jsou opět vesměs definovány na množině M a posloupnost $\{f_n\}$ konverguje k f stejnoměrně na množině M.

Jestliže ke každému $x \in M$ existuje okolí $U(x)$ tak, že platí $f_n \rightrightarrows f$ na $U(x) \cap M$, zapisujeme to symbolem $f_n \overset{lok}{\rightrightarrows} f$ na M. Říkáme pak, že posloupnost $\{f_n\}$ konverguje k funkci f lokálně stejnoměrně na množině M.

Potřebujeme-li vyjádřit, že existuje jistá funkce f, k níž posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje na množině M (konverguje stejnoměrně na množině M, konverguje lokálně stejnoměrně na množině M), užíváme k tomu symbolu $f_n \longrightarrow$ na M ($f_n \rightrightarrows$ na M, $f_n \overset{lok}{\rightrightarrows}$ na M).

U řad funkcí opět vynecháváme u sumačního symbolu meze a píšeme pouze $\sum f_n$ místo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, přičemž tento symbol může eventuálně znamenat jak řadu, tak i její součet.

Ostatní označení lze opět považovat za obvyklé, stejně jako pojmy, které se v textu vyskytují.

547. **Dokažte tvrzení:**

Nechť posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje (konverguje stejnoměrně) na intervalu (a,b) k funkci f. Potom každá vybraná posloupnost $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ z posloupnosti $\{f_n\}$ konverguje (konverguje stejnoměrně) na (a,b) k funkci f.

548. Rozhodněte, zda platí věta:

Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí, které mají Darbouxovu vlastnost v intervalu (a,b), $f_n \longrightarrow f$ na (a,b). Potom funkce f má Darbouxovu vlastnost v intervalu (a,b).

549. Rozhodněte, zda platí věta:

Nechť $f_n \longrightarrow f$ na (a,b). Potom existuje posloupnost $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ vybraná z posloupnosti $\{f_n\}$ tak, že $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně v (a,b) k funkci f.

550. Rozhodněte o platnosti vět:

Nechť f_n, $n \in N$, jsou vesměs neklesající funkce v intervalu (a,b).

(a) Nechť $f_n \rightrightarrows f$ v (a,b). Potom f je neklesající funkce v (a,b).

(b) Nechť $f_n \longrightarrow f$ v (a,b). Potom f je neklesající funkce v (a,b).

551. Nechť f_n , f jsou funkce definované v intervalu $\langle a,b \rangle$. Položme $g_n = f - f_n$. Potom je $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle a,b \rangle$, právě když je $g_n \rightrightarrows 0$ na $\langle a,b \rangle$. Dokažte.

552. Nechť f_n , $n \in N$, jsou vesměs lineární funkce a nechť $f_n \rightrightarrows f$ na $(0,1)$. Potom je funkce f lineární v $(0,1)$. Dokažte.

553. Nechť f_n , $n \in N$, jsou vesměs lineární funkce v E_1 , x , $y \in E_1$, $x \neq y$, $\{f_n(x)\}$, $\{f_n(y)\}$ jsou konvergentní posloupnosti; potom existuje funkce f lineární v E_1 tak, že platí $f_n \longrightarrow f$ v E_1 . Dokažte.

554. Buď $k \in N$ a nechť f_0 , f_n jsou polynomy stupně k . Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:

(a) $f_n \overset{lok}{\rightrightarrows} f_0$ na E_1 ;

(b) existuje množina M o $k + 1$ prvcích tak, že $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x)$ pro každé $x \in M$;

(c) označíme-li $f_j(x) = \sum\limits_{\kappa=0}^{k} a_\kappa^j x^\kappa$ $(x \in E_1$, $j = 0,1,\ldots)$, je pro každé $r \in \{0,\ldots, k\}$

$$\lim_{j\to\infty} a_\kappa^j = a_\kappa^0 .$$

Dokažte.

555. Rozhodněte, zda při označení a předpokladech shodných s předpoklady v úloze 553 platí

(a) $f_n \overset{lok}{\rightrightarrows} f$ na E_1, resp.

(b) $f_n \rightrightarrows f$ na E_1.

556. Rozhodněte, zda platí věta:

Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí spojitých v intervalu $\langle 0,1 \rangle$, f spojitá funkce v $\langle 0,1 \rangle$. Nechť $f_n \to f$ na $\langle 0,1 \rangle \cap Q$. Potom $f_n \to f$ na $\langle 0,1 \rangle$.

557. Rozhodněte, zda platí věta:

Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí spojitých v intervalu $\langle 0,1 \rangle$, $f_n \rightrightarrows 0$ na $\langle 0,1 \rangle \cap Q$. Potom $f_n \rightrightarrows 0$ na $\langle 0,1 \rangle$.

558. Nechť f_n, $n \in N$, jsou funkce definované v intervalu $\langle 0,1 \rangle$ a nechť $f_n \to 0$ na $\langle 0,1 \rangle$. Pro $\varepsilon > 0$ a $x \in \langle 0,1 \rangle$ buď $n_\varepsilon(x)$ nejmenší přirozené číslo takové, že platí

$$(n \geq n_\varepsilon(x)) \implies (|f_n(x)| < \varepsilon).$$

Potom je $f_n \rightrightarrows 0$ na $\langle 0,1 \rangle$, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ je funkce n_ε omezená na $\langle 0,1 \rangle$. Dokažte.

559. Nechť f_n jsou funkce definované v intervalu $(0,1\rangle$ a nechť pro každé $k \in N$ je $f_n \rightrightarrows 0$ na $\langle 1/k, 1\rangle$. Položme(pro $k, n \in N$)

$$\sigma_{k,n} = \sup\{|f_n(x)| ; x \in \langle 1/k , 1\rangle\} .$$

Dokažte, že pro každé $k \in N$ je $\lim_{n\to\infty} \sigma_{k,n} = 0$.

Jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in N$ tak, že pro všechna $k \in N$ a všechna $n \geq n_0$ je $\sigma_{k,n} < \varepsilon$, pak $f_n \rightrightarrows f$ na $(0,1\rangle$. Dokažte.

560. Rozhodněte o platnosti tvrzení:

Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí definovaných v E_1, $\{f_n(x)\}$ konverguje pro každé $x \in E_1$. Nechť $M \subset E_1$ je konečná množina.Potom platí

$$f_n \rightrightarrows \text{ na } M .$$

561. Nechť $M \subset E_1$, $x \in E_1 - M$. Nechť pro posloupnost funkcí f_n definovaných v E_1 platí: $\{f_n(x)\}$ je konvergentní posloupnost, $f_n \rightrightarrows$ na M. Potom

$$f \rightrightarrows \text{ na } M \cup \{x\} .$$

Dokažte.

562. Nechť funkce f_n, f $(n = 1,2,\dots)$ jsou spojité na $\langle a,b \rangle$ a nechť $f_n \rightrightarrows f$ na (a,b). Potom je $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle a,b \rangle$. Dokažte a rozhodněte, zda tvrzení platí, vypustíme-li předpoklad o spojitosti funkcí f_n, f.

563. Buďte $M_n \subset E_1$ a $M = \bigcup_{n=1}^{k} M_n$. Předpokládejme, že funkce f_n, f definované na M mají tuto vlastnost: Pro každé $i \in \{1,2,\dots,k\}$ je $f_n \rightrightarrows f$ na M_i. Potom $f_n \rightrightarrows f$ na M. Dokažte.

564. Nechť f_n $(n = 0,1,\dots)$ je spojitá funkce v E_1, $x_0 \in E_1$. Nechť $\lim x_n = x_0$ a $f_n \to f_0$ (resp. $f_n \rightrightarrows f_0$) v E_1. Rozhodněte, zda platí

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f_0(x_0).$$

565. Nechť funkce f je spojitá (resp. stejnoměrně spojitá) na E_1. Pro $n \in N$, $x \in E_1$, položme $g_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$. Rozhodněte, zda pak platí některá z těchto podmínek:

(a) $g_n \to f$ na E_1;

(b) $g_n \overset{lok}{\rightrightarrows} f$ na E_1;

(c) $g_n \rightrightarrows f$ na E_1.

566. Rozhodněte o platnosti tvrzení:

Buďte $M_n \subset E_1$, $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. Nechť pro každé $i \in N$ platí

$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } M_i .$$

Potom $f_n \rightrightarrows f$ na M .

567. Rozhodněte o platnosti tvrzení:

Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí definovaných v E_1 a $\langle a_k , b_k \rangle \subset \langle a_{k+1} , b_{k+1} \rangle$ pro všechna $k \in N$. Nechť dále pro každé $k \in N$ platí

$$f_n \rightrightarrows \text{ na } \langle a_k , b_k \rangle .$$

Potom platí

$$f_n \rightrightarrows \text{ na } (\lim a_k , \lim b_k) .$$

568. Dokažte tvrzení:

Nechť pro každou posloupnost $\{f_n\}$ funkcí definovaných na množině $M \subset E_1$ platí

$$(f_n \rightarrow \text{ na } M) \Longrightarrow (f_n \rightrightarrows \text{ na } M) .$$

Potom je množina M konečná.

Sestrojte funkce f , f_n , $n \in N$, definované na množině N , pro které platí $f_n \rightarrow f$ na N a neplatí $f_n \rightrightarrows f$ na N .

569. Omezený interval $I \subset E_1$ je uzavřený, právě když pro každou monotonní posloupnost $\{f_n\}$ funkcí definovaných na I takovou, že $f_n \searrow 0$ v I, platí $f_n \rightrightarrows 0$ v I. Dokažte.

570. Rozhodněte, zda platí tato věta:

Nechť funkce f_n, $n \in N$, jsou vesměs stejnoměrně spojité funkce v intervalu (a,b), $f_n \rightrightarrows f$ na (a,b). Potom funkce f je stejnoměrně spojitá v (a,b).

571. Rozhodněte, zda platí tvrzení:

Nechť $f > 0$ v intervalu (a,b), $f_n > 0$ v (a,b) pro každé $n \in N$ a $f_n \rightrightarrows f$ na (a,b). Potom pro každé $\alpha \geq 0$ je $(f_n)^\alpha \rightrightarrows f^\alpha$ v (a,b).

572. Nechť $f_n \rightrightarrows f_0$ na E_1. Pro $n = 0,1,\ldots$ položme $g_n = \exp f_n$. Potom platí $g_n \overset{lok}{\rightrightarrows} g_0$ na E_1. Dokažte.

573. Rozhodněte o platnosti tvrzení:

Nechť $M \subset E_1$, $x \in E_1 - M$. Nechť pro posloupnost funkcí f_n definovaných v E_1 platí: $\{f_n(x)\}$ je konvergentní posloupnost, $f_n \overset{lok}{\rightrightarrows}$ na M. Potom

$$f_n \overset{lok}{\rightrightarrows} \text{ na } M \cup \{x\}.$$

574. Rozhodněte, zda platí věta:

Nechť pro každou posloupnost funkcí $\{f_n\}$ definovaných na intervalu $I \subset E_1$ platí

$$(f_n \overset{lok}{\rightrightarrows} \text{ na } I) \Longrightarrow (f_n \rightrightarrows \text{ na } I) .$$

Potom I je uzavřený interval.

575. Nechť jsou funkce f_n spojité v E_1 a nechť pro každé $n \in N$ existuje interval I_n tak, že pro $x \notin I_n$ je $f_n(x) = 0$. Jestliže $f_n \rightrightarrows f$ v E_1, potom $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

Dokažte.

576. Rozhodněte, zda platí následující věty:

(a) Nechť f_n jsou spojité (resp. stejnoměrně spojité) funkce v intervalu (a,b), $f_n \rightrightarrows f$ v (a,b). Potom f je omezená funkce v (a,b).

(b) Nechť f_n jsou omezené funkce v intervalu (a,b), $f_n \rightrightarrows f$ v (a,b). Potom f je omezená funkce v (a,b).

577. Rozhodněte o platnosti věty:

Nechť pro každou posloupnost funkcí $\{f_n\}$, pro kterou platí $f_n \rightrightarrows$ na (a,b), je i $f_n \cdot g \rightrightarrows$ na (a,b) pro každý polynom g. Potom je interval (a,b) omezený.

578. Rozhodněte, zda platí věta:

Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na (a,b) , $g_n \rightrightarrows g$ na (a,b) , potom platí

$$f_n \cdot g_n \rightrightarrows f.g \quad \text{na } (a,b) .$$

579. Dokažte následující tvrzení:

Nechť f je funkce spojitá v intervalu $\langle a,b \rangle$, $\varepsilon > 0$. Potom existuje dělení $D = \{ a = t_0 < t_1 < \dots t_n = b \}$ intervalu $\langle a,b \rangle$ a funkce g_ε tak, že g_ε je lineární funkce v každém z intervalů $\langle t_{i-1} , t_i \rangle$, $i = 1,\dots, n$ (někdy říkáme, že g_ε je v $\langle a,b \rangle$ po částech lineární), přičemž platí

$$\sup \{ | f(x) - g_\varepsilon(x) | \; ; \; x \in \langle a,b \rangle \} < \varepsilon .$$

580. Dokažte tvrzení:

Ke každé funkci f spojité v intervalu $\langle a,b \rangle$ existují funkce g_n po částech lineární v $\langle a,b \rangle$ tak, že platí

$$g_n \rightrightarrows f \quad \text{na } \langle a,b \rangle .$$

Srovnejte s předcházejícím cvičením.

581. Dokažte tvrzení:

Nechť k funkci f a libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje funkce g spojitá v intervalu (a,b) tak, že

$$\sup \{ | f(x) - g(x) | \; ; \; x \in (a,b) \} < \varepsilon .$$

Potom funkce f je spojitá v (a,b) .

582. Rozhodněte o platnosti věty:

Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí konvexních v intervalu (a,b) a nechť $f_n \rightrightarrows f$ na (a,b) . Potom f je funkce konvexní v (a,b) .

Platí analogické tvrzení, které ze shora uvedeného obdržíme, nahradíme-li všude výraz "konvexní" výrazem "ryze konvexní" ?

583. Rozhodněte, zda platí toto tvrzení:

Nechť funkce f_n , $n \in N$, jsou vesměs konvexní v intervalu (a,b) . Je-li $f_n \longrightarrow f$ na (a,b) , potom f je konvexní v (a,b) .

584. Rozhodněte, zda platí věta:

Nechť k funkci f definované na intervalu (a,b) existuje posloupnost funkcí $\{g_n\}$, $g_n \rightrightarrows f$ v (a,b) , přičemž g_n má pro každé $n \in N$ primitivní funkci v (a,b) . Potom existuje primitivní funkce k funkci f na (a,b) .

585. Rozhodněte, zda platí věta:

Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na $(0,1)$, f_n má pro každé $n \in N$ zobecněnou primitivní funkci v $(0,1)$. Potom f má zobecněnou primitivní funkci v $(0,1)$.

586.* Sestrojte posloupnost $\{f_n\}$ funkcí definovaných v intervalu $\langle 0,1 \rangle$ tak, aby platilo $f_n \to 0$ na $\langle 0,1 \rangle$, avšak pro žádný interval $I \subset \langle 0,1 \rangle$ neplatilo $f_n \rightrightarrows 0$ na I.

Pokuste se sestrojit funkce f_n, $n \in N$, navíc vesměs spojité v $\langle 0,1 \rangle$.

587.* Najděte funkci f definovanou v E_1, která je spojitá v každém bodě $x \in E_1 - Q$ a pro kterou existují v každém bodě $y \in Q$ obě jednostranné limity a platí

$$\lim_{t \to y+} f(t) \neq \lim_{t \to y-} f(t) .$$

Lze sestrojit funkci f uvedených vlastností tak, že platí navíc

$$\lim_{t \to y+} f(t) \neq f(y) , \quad \lim_{t \to y-} f(t) \neq f(y) \ ?$$

Lze požadovat navíc, aby f byla monotonní v E_1 (nebyla monotonní na žádném intervalu $I \subset E_1$) ?

588.* Sestrojte funkci f definovanou v E_1, která je spojitá v každém bodě $x \in E_1 - Q$ a pro kterou v každém bodě $y \in Q$ neexistuje žádná z jednostranných limit

$$\lim_{t \to y+} f(t) , \quad \lim_{t \to y-} f(t) .$$

589.* Sestrojte funkci f spojitou v intervalu $(0,1)$, která má vlastní derivaci v každém bodě $x \in (0,1) - Q$ a pro každé $y \in (0,1) \cap Q$ existují jednostranné navzájem různé derivace $f'_+(y)$, $f'_-(y)$.

590.* Sestrojte funkci f spojitou v intervalu $(0,1)$, která má vlastní derivaci v každém bodě $x \in (0,1) - Q$ a která nemá v žádném bodě $y \in (0,1) \cap Q$ ani derivaci zprava ani derivaci zleva.

591.* Sestrojte funkci f spojitou v E_1, která nemá v žádném bodě $x \in E_1$ vlastní derivaci $f'(x)$.

592.* Rozhodněte o platnosti věty:

Nechť funkce f_n, $n \in N$, mají všechny v E_1 Darbouxovu vlastnost, $f_n \rightrightarrows f$ na E_1. Potom f má Darbouxovu vlastnost v E_1.

593. Sestrojte funkce f_n, f definované v intervalu $(0,1)$ tak, že f_n mají pro každé $n \in N$ derivace všech řádů v $(0,1)$, $f_n \rightrightarrows f$ na $(0,1)$ a funkce f nemá v bodě $1/2$ derivaci.

594. Buďte f_n, f funkce definované na $\langle 0,1 \rangle$ a nechť pro každé $n \in N$ existuje $R \int_0^1 f_n$. Předpokládejme, že $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle 0,1 \rangle$. Potom existuje $R \int_0^1 f$ a platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 f \text{ . Dokažte.}$$

595. Rozhodněte o platnosti věty:

Nechť f_n, f jsou funkce definované v intervalu (a,b) a nechť pro každé $n \in N$ existuje $N \int_a^b f_n$. Nechť dále $f_n \rightrightarrows f$ v (a,b) . Potom existuje $N \int_a^b f$.

596. Rozhodněte, zda platí tvrzení:

Nechť existují integrály $N \int_0^\infty f_n$ pro každé $n \in N$, $f_n \rightrightarrows f$ v $(0,\infty)$ a nechť existuje $N \int_0^{+\infty} f$. Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} N \int_0^\infty f_n = N \int_0^\infty f .$$

597. Rozhodněte, zda platí tato věta:

Jestliže funkce f_n jsou spojité v $\langle 0,\infty)$, existuje

$$N \int_0^\infty f_n \quad (n = 1,2,\dots) \quad \text{a} \quad f_n \rightrightarrows 0$$

v $\langle 0,\infty)$, potom $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n = 0$.

598. Rozhodněte, zda platí věta:

Nechť existují $N \int_a^b f_n$, $N \int_a^b f$, $f_n \rightrightarrows f$ v (a,b) a (a,b) je omezený interval. Potom platí

$$\lim_{n \to \infty} N \int_a^b f_n = N \int_a^b f \ .$$

599. Sestrojte posloupnost funkcí $\{f_n\}$ spojitých na intervalu $\langle 0,1 \rangle$ tak, aby každá funkce f_n měla spojitou derivaci v intervalu $(0,1)$, $f_n \rightrightarrows 0$ na $\langle 0,1 \rangle$ a neplatilo

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \sqrt{1 + (f_n')^2} = 1 \ .$$

Uvědomte si geometrický smysl této úlohy.

600. Je-li funkce f spojitá v intervalu $\langle a,b \rangle$, označme délku jejího grafu na $\langle a,b \rangle$ symbolem $L(a, b, f)$ (viz [7], V. § 2.).

Sestrojte posloupnost $\{f_n\}$ funkcí spojitých v intervalu $\langle 0,1 \rangle$, $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle 0,1 \rangle$ tak, že platí

$$L(0, 1, f) < +\infty \ , \quad \lim_{n \to \infty} L(0, 1, f_n) = +\infty \ .$$

601. Sestrojte posloupnost $\{f_n\}$ funkcí spojitých v intervalu $\langle 0,1 \rangle$, $f_n \nearrow f$ tak, aby f byla funkce omezená v $\langle a,b \rangle$ a neexistoval

$$N \int_a^b f \ .$$

602. Sestrojte posloupnost $\{f_n\}$ funkcí spojitých v intervalu $(0,1\rangle$ a funkci f spojitou v $(0,1\rangle$ tak, aby platilo $f_n \searrow f$ na $(0,1\rangle$ a neplatilo $f_n \rightrightarrows f$ na $(0,1\rangle$.

603. Sestrojte posloupnost $\{f_n\}$ funkcí spojitých na intervalu $\langle 0,1\rangle$ a funkci f tak, aby platilo $f_n \searrow f$ na $\langle 0,1\rangle$ a neplatilo $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle 0,1\rangle$.

Lze navíc požadovat, aby funkce f byla spojitá v $\langle 0,1\rangle$?

604. Nechť řady funkcí $\sum f_n$, $\sum g_n$ stejnoměrně konvergují na $\langle a,b\rangle$. Potom řada $\sum (f_n + g_n)$ stejnoměrně konverguje na $\langle a,b\rangle$. Dokažte.

605. Sestrojte spojité omezené nezáporné funkce f_n definované v E_1 tak, že řada $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně v E_1 a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in E_1} f_n(x) = +\infty \quad .$$

606. Sestrojte funkce f_n tak, aby pro každé $x \in E_1$ konvergovala řada $\sum f_n(x)$ absolutně a řada $\sum f_n$ nekonvergovala stejnoměrně v E_1 .

607. Sestrojte funkce f_n definované v intervalu $\langle 0,1\rangle$ tak, aby řada $\sum f_n$ konvergovala stejnoměrně v $\langle 0,1\rangle$ a řada $\sum |f_n(x)|$ byla pro každé $x \in \langle 0,1\rangle$ divergentní.

§ 12. MOCNINNÉ ŘADY

Pro mocninnou řadu užíváme stejného symbolu jako pro její součet, který chápeme jako funkci definovanou na množině těch $x \in E_1$, pro něž řada konverguje.

U mocninných řad užíváme při zápisech odlišné konvence než v předcházejících paragrafech. Meze u sumačního symbolu vynecháváme v případě, že nemůže dojít k nedorozumění a sčítá se přes celá nezáporná čísla, tj. např. místo symbolu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ píšeme jen $\sum a_n z^n$.

Je-li funkce f nekonečně derivovatelná v bodě $x_0 \in E_1$, nazýváme mocninnou řadu

$$\sum \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Taylorovou řadou funkce f v bodě x_0 (klademe jako dříve $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$; $0! = 1$).

608. Buď $\alpha \in E_1^*$, $\alpha \geq 0$. Sestrojte mocninnou řadu, jejíž poloměr konvergence je roven α.

609. Je-li $\varepsilon > 0$ a pro každé $x \in (0, \varepsilon)$ platí $\sum a_n x^n = 0$, potom platí $a_n = 0$ pro každé $n \in N$. Dokažte.

610. Buď p polynom a nechť pro každé $x \in E_1$ platí $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Je-li stupeň polynomu p roven právě k , potom $a_{k+l} = 0$ pro každé $l \in N$. Dokažte.

611. Nechť má mocninná řada $\sum a_n z^n$ poloměr konvergence r_1 a mocninná řada $\sum b_n z^n$ poloměr konvergence r_2 . Potom má mocninná řada $\sum (a_n + b_n) z^n$ poloměr konvergence R takový, že platí

$$R \geq \min (r_1 , r_2) .$$

Dokažte.

Najděte řady $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ tak, aby v dokázaném vztahu platila ostrá nerovnost.

612. Nechť mocninné řady $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ mají opět poloměry konvergence r_1 a r_2 ; nalezněte vztah mezi r_1 , r_2 a poloměrem konvergence R mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n .$$

613. Nechť řada $\sum a_n x^n$ má poloměr konvergence 1 . Potom řada $\sum a_n n^2 x^n$ má také poloměr konvergence 1 . Dokažte.

614. Buď $r > 0$. Nechť mocninná řada $\sum a_n x^n$ konverguje pro $x = r$ a diverguje pro $x = -r$. Potom r je jejím poloměrem konvergence. Dokažte.

615. Nechť řada $\sum a_n$ konverguje, $\sum |a_n| = +\infty$. Určete poloměr konvergence mocninné řady

$$\sum a_n x^n \quad .$$

616. Je-li R poloměr konvergence řady $\sum a_n x^n$ a řada $\sum a_n R^n$ konverguje absolutně, potom řada $\sum a_n x^n$ konverguje stejnoměrně v $\langle -R, R \rangle$. Dokažte.

(Vysvětlete, proč Abelova věta dává "něco nového" právě v případě, kdy řada $\sum a_n R^n$ konverguje, avšak nekonverguje absolutně.)

617. Sestrojte mocninnou řadu $\sum a_n x^n$ s poloměrem konvergence 1 tak, aby existovala $\lim_{x \to 1-} \sum a_n x^n$ a přitom řada $\sum a_n$ divergovala.

618. Rozhodněte o platnosti věty:

Nechť Taylorova řada $\sum a_n x^n$ funkce f v bodě 0 konverguje k funkci f všude v E_1 . Potom f je polynom.

619. Rozhodněte o platnosti věty:

Nechť Taylorova řada $\sum a_n x^n$ funkce f v bodě 0 konverguje k funkci f stejnoměrně v E_1. Potom f je polynom.

Srovnejte s úlohou 618.

620. Najděte funkci, jejíž Taylorova řada o středu 0 konverguje právě v intervalu

(a) $(-1, 1)$; (c) $\langle -1, 1)$;

(b) $(-1, 1\rangle$; (d) $\langle -1, 1\rangle$.

Lze žádat navíc, aby konvergence řady byla stejnoměrná (nebyla stejnoměrná) v tomto intervalu ?

621. Dokažte tvrzení:

Nechť mocninná řada $\sum a_n z^n$ má poloměr konvergence $R > 1$. Potom

$$\lim a_n = 0 .$$

622. Sestrojte mocninnou řadu $\sum a_n z^n$ s poloměrem konvergence $R = 1$ tak, aby posloupnost $\{a_n\}$ měla některou z následujících vlastností:

(a) $\{a_n\}$ je omezená;

(b) $\{a_n\}$ není omezená;

(c) $\lim a_n$ neexistuje;

(d) $\lim a_n = 0$;

(e) $\lim a_n = +\infty$.

623. Sestrojte k $\alpha \geq 0$, $\alpha \in E_1^*$, mocninnou řadu $\sum a_n z^n$ s poloměrem konvergence $R = 1$ tak, aby platilo $\lim a_n = \alpha$.

624. Rozhodněte, zda platí tvrzení:

Nechť mocninná řada $\sum a_n z^n$ má poloměr konvergence $R < 1$. Potom neplatí

$$\lim a_n = 0 .$$

625. Buď $R > 0$. Sestrojte funkci f definovanou v E_1 , jejíž Taylorova řada v bodě 0 má poloměr konvergence R .

626. Buď p polynom, $a > 0$, $p(a) . p(-a) \neq 0$. Pro $x \in (-a, a)$ položíme

$$f(x) = p(x)/(x^2 - a^2) .$$

Potom Taylorova řada funkce f o středu 0 má poloměr konvergence a a tato řada konverguje v intervalu $(-a, a)$ všude k funkci f . Dokažte.

627. Dokažte následující tvrzení:

Mocninná řada s kladným poloměrem konvergence je v kruhu konvergence Taylorovou řadou svého součtu. Podrobněji: Buď $x_0 \in E_1$ a nechť mocninná řada $\sum a_n (x - x_0)^n$ má poloměr konvergence $R > 0$. Pro $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ položme

$$f(x) = \sum a_n (x - x_0)^n .$$

Potom řada v předcházející rovnosti je Taylorovou řadou funkce f o středu x_0.

628. Nechť f je funkce definovaná v E_1 a $\sum a_n x^n$ její Taylorova řada v bodě 0. Rozhodněte, zda pak platí:

(a) Je-li funkce f sudá, je $a_{2k-1} = 0$ pro všechna $k \in N$.

(b) Je-li funkce f lichá, je $a_{2(k-1)} = 0$ pro všechna $k \in N$.

629. Necht funkce f je definována v E_1. Nechť $\sum a_n (x - x_0)^n$ je Taylorova řada funkce f v bodě x_0, která má poloměr konvergence $R = +\infty$. Rozhodněte, zda množina

$$\{x ; x \in E_1 , f(x) = \sum a_n (x - x_0)^n\}$$

je vždy symetrická podle bodu x_0.

630. Sestrojte funkci f definovanou v E_1, jejíž Taylorova řada o středu 0

$$\sum a_n x^n$$

má poloměr konvergence $R = +\infty$ a pro kterou existuje $\delta > 0$ tak, že rovnost

$$f(x) = \sum a_n x^n$$

platí pro všechna $x \in (-\delta, 0)$ a neplatí pro žádné $x \in (0, \delta)$.

631. Sestrojte funkci f definovanou v E_1 , kterou lze v každém bodě $x \in E_1$ rozvinout v Taylorovu řadu, přičemž její poloměr konvergence je roven číslu

$$R(x) = \min \{ |x - y| \,;\, y \in N \} .$$

632. Sestrojte funkci f nekonečně derivovatelnou v E_1 tak, aby poloměr konvergence její Taylorovy řady v bodě x byl roven $|x|$ pro každé $x \in E_1$.

633. Sestrojte funkci f definovanou na omezeném intervalu (a,b) , jejíž Taylorova řada má v každém bodě $x \in (a,b)$ kladný poloměr konvergence, neexistuje však $N \int_a^b f$.

634. Nechť funkci f lze rozvinout v bodě 0 v Taylorovu řadu s kladným poloměrem konvergence R a nechť platí $f(0) \neq 0$. Pak lze funkci $1/f$ rozvinout v bodě 0 v Taylorovu řadu s kladným poloměrem konvergence ϱ . Dokažte.

Všimněte si blíže vzájemné závislosti čísel R , ϱ .

§ 13. RŮZNÉ ÚLOHY

635. Buď F zobrazení množiny všech komplexních čísel E do E takové, že $F(0) = 0$ a platí

$$|F(x) - F(y)| = |x - y| ,$$

kdykoli $x, y \in E$. Potom existuje $\alpha \in E$, $|\alpha| = 1$, a platí buď $F(z) = \alpha z$ pro každé $z \in E$, nebo $F(z) = \alpha \bar{z}$ pro každé $z \in E$ ($\bar{z}$ je číslo komplexně sdružené k z). Dokažte.

636. Buď F zobrazení množiny E všech komplexních čísel do E a předpokládejme, že

$$\text{(I)} \qquad |F(x) - F(y)| = |x - y| ,$$

kdykoli $x, y \in E$ a $|x - y|$ je racionální číslo. Potom (I) platí pro každé $x, y \in E$. Dokažte.

Formulujte analogické tvrzení pro E_1 a rozhodněte o jeho platnosti.

637. Nechť F je prosté spojité zobrazení množiny E všech komplexních čísel na E a nechť pro každé $x \in E$ platí $|x - F(x)| = 1$. Rozhodněte, zda pro takové zobrazení platí

$$|F(x) - F(y)| = |x - y| ,$$

kdykoli $x, y \in E$.

638. Buď f funkce definovaná v E_1 taková, že

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| ,$$

kdykoli $x, y \in E_1$. Potom existuje $a \in E_1$ a $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tak, že pro všechna $x \in E_1$ platí $f(x) = \varepsilon x + a$. Dokažte.

639. Nechť $S \subset Q$ je množina, která je uzavřená vzhledem ke sčítání a násobení (tj. je-li $x, y \in S$, je též $x + y \in S$, $x y \in S$) a pro každé $q \in Q$ nechť platí právě jeden ze vztahů

$$q \in S , \quad -q \in S , \quad q = 0 .$$

Potom $S = Q \cap (0, +\infty)$. Dokažte.

Rozhodněte, zda existuje množina $T \subset E_1 - Q$, která je uzavřená vzhledem ke sčítání a násobení a pro každé $t \in E_1 - Q$ platí buď $t \in T$, nebo $-t \in T$.

640. Buď $x_1 \in (0,1)$ a pro $n \in N$ položme $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$. Dokažte, že

$$\lim n\, x_n = 1 .$$

641. Pro každou konvergentní posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ platí

$$\lim (a_{n+1} - a_n) = 0 .$$

Obecněji, pro každé $p \in N$ platí

$$\lim_{n \to \infty} (a_{n+p} - a_n) = 0 .$$

Dokažte.

Sestrojte divergentní posloupnost $\{b_n\}$, pro kterou pro každé $p \in N$ platí

$$\lim_{n \to \infty} (b_{n+p} - b_n) = 0 .$$

642. Buď $\{x_n\}$ posloupnost komplexních čísel. Pak posloupnost

$$y_n = x_n + \frac{x_{n+1}}{n+1} + (-1)^{n+1} \frac{x_{n+1}}{(n+1)!}$$

konverguje, právě když konverguje posloupnost

$$z_n = x_n + \frac{x_{n+1}}{n+1} .$$

Dokažte.

643. Dokažte, že interval $\langle 0,1 \rangle$ nelze vyjádřit jako sjednocení disjunktních uzavřených intervalů, jejichž délka je vesměs menší než 1 .

644. Sestrojte prosté zobrazení f intervalu $(0,1\rangle$ na interval $(0,1)$ a rozhodněte, zda existuje f takové, aby mělo pouze konečně mnoho bodů nespojitosti v $(0,1\rangle$.

645. Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a,b \rangle$. Je-li $t > 0$, buď $\varphi(t)$ supremum množiny všech η s následující vlastností: Je-li $x', x'' \in \langle a,b \rangle$, $|x' - x''| < \eta$, potom

$|f(x') - f(x'')| \leq t$. Rozhodněte, zda existuje funkce g spojitá na $\langle a,b \rangle$ tak, že funkce $\Phi_g : t \longmapsto \Phi_g(t)$ je spojitá v $(0, \infty)$ a nemá tam všude vlastní derivaci.

646. Nechť $x \in E_1$, M , m , $\delta > 0$, $M > m$ a nechť funkce f definovaná na $U_\delta(x)$ vyhovuje pro každé dva body $x_1, x_2 \in U_\delta(x)$, $x_1 \neq x_2$, podmínce

$$0 < m \leq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq M .$$

Nechť $f(x) = y$. Potom pro každé $t \in U_{m\delta}(y)$ má rovnice $f(x) = t$ právě jedno řešení $\alpha(t)$ a funkce

$$\alpha : t \longmapsto \alpha(t) , \qquad t \in U_{m\delta}(y) ,$$

je spojitá na $U_{m\delta}(y)$, přičemž $\alpha(y) = x$. Dokažte.

647. Rozhodněte, zda existuje funkce f spojitá na intervalu $\langle 0,1 \rangle$ taková, že pro ni platí: Je-li $x \in \langle 0,1 \rangle$, je

$$(x \in \langle 0,1 \rangle - Q) \Longleftrightarrow (f(x) \in Q) .$$

648. Nechť f je funkce, která má v E_1 spojitou derivaci f' . Položme

$$S_1^f = \{t \in \langle 0,1 \rangle \ ; \ f'(t) = 0\} , \quad S_2^f = f(S_1^f) .$$

Rozhodněte, zda existuje funkce f uvedených vlastností taková, pro kterou je množina S_2^f nespočetná.

649. Je-li funkce f omezená v E_1, definujeme

$$S_f^1(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \sup \{ |f(y) - f(z)| ;\ y, z \in U_\varepsilon(x) \} .$$

Dále položíme $h = S_f^n$ a $S_f^{n+1} = S_h^1$, $n \in N$.

Dokažte, že pro každou funkci g omezenou v E_1 platí

$$S_g^2 = S_g^3 .$$

650. Nechť $I \subset E_1$ je interval, $\tilde{D} \subset I$ spočetná množina. Nechť f je spojitá funkce definovaná na I splňující následující podmínku:

Ke každému $x \in I$, který je vnitřním bodem intervalu I, $x \notin \tilde{D}$, a pro každé $\delta > 0$ existuje $y \in (x, x + \delta)$ tak, že $f(x) \leq f(y)$.

Potom je f neklesající na I . Dokažte.

651. Nechť funkce f je spojitá v intervalu $\langle 0, +\infty)$, f' je rostoucí v $(0, +\infty)$, $f(0) = 0$. Definujme pro $x \in (0, +\infty)$

$$g(x) = x^{-1} f(x) .$$

Potom funkce g je rostoucí v intervalu $(0, +\infty)$. Dokažte.

652. Nechť f je funkce definovaná na intervalu $\langle 0,1 \rangle$, $f(0) > 0$, $f(1) < 1$, g je funkce spojitá na intervalu $\langle 0,1 \rangle$ a nechť funkce $f + g$ je neklesající v $\langle 0,1 \rangle$. Potom existuje $x_0 \in (0,1)$ tak, že $f(x_0) = 0$. Dokažte.

653. Nechť f je funkce konvexní a rostoucí na intervalu $\langle a, \infty)$ $(a \in E_1)$. Potom $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$. Dokažte.

654. Nechť funkce f je definována v E_1 a nechť pro každé $x \in E_1$ existuje vlastní limita

$$f^*(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} .$$

($f^*(x)$ je tzv. symetrická derivace funkce f v bodě x).
Rozhodněte, zda v případě, že funkce

$$f^* : x \longmapsto f^*(x) , \quad x \in E_1$$

a funkce f jsou obě spojité v E_1, existuje f' a platí $f' = f^*$.

655. Buď $a \in E_1$ a nechť funkce f je konvexní na $\langle a, \infty)$. Dokažte, že existuje limita

$$\lim_{x \to \infty} f(x)/x .$$

Je-li tato limita nekladná, je funkce f nerostoucí na $\langle a, \infty)$. Dokažte.

656. Nechť funkce f je rostoucí na intervalu (a,b) . Funkce f je konvexní na (a,b) , právě když f_{-1} je konkávní na $f((a,b))$. Dokažte.

657. Nechť funkce f je kladná na intervalu $I \subset E_1$. Jestliže je funkce $\log f$ konvexní na I , řekneme, že f je logaritmicky konvexní na I . Jestliže f je logaritmicky konvexní na I , potom f je konvexní na I . Jestliže f, g jsou logaritmicky konvexní na I , jsou funkce $f + g$, $f \cdot g$ logaritmicky konvexní na I . Dokažte.

658. Nechť f je funkce ryze monotonní a spojitá v E_1 . Položme $f^1 = f$ a indukcí definujme $f^{n+1} = f * f^n$ pro $n \in N$. Je-li $f(x) \neq x$ pro všechna $x \in E_1$, je $f^m(x) \neq x$ pro každé $m \in N$ a každé $x \in E_1$. Dokažte.

659. Buď f spojitá funkce v E_1 a nechť pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$\lim_{n \to \infty} f(n\varepsilon) = 0 \qquad (n \in N).$$

Dokažte, že

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 .$$

660. Pro $x \in (0,1)$ a $n \in N$ položme

$$f_n(x) = (1-x)^{n+1} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k^n x^k .$$

Dokažte, že $\lim_{x \to -1} f_n(x) = n!$.

661. Nechť $I \subset E_1$ je interval a g funkce spojitá na intervalu I, $g(I) \subset I$. Nechť ι je identické zobrazení I na I a nechť existuje $m \in M$ tak, že

$$g * g * \dots * g = \iota$$

(vlevo je m "faktorů"). Potom je $g * g = \iota$. Dokažte.

662. Buď $\mathcal{C}$ systém všech funkcí spojitých na $\langle 0,1 \rangle$, které nejsou identicky rovny nule na žádném intervalu $I \subset \langle 0,1 \rangle$. Charakterizujte systém $\mathfrak{M}$ všech podmnožin intervalu $\langle 0,1 \rangle$ s touto vlastností: Je-li $f \in \mathcal{C}$, potom $\{x\,;\, f(x) = 0\} \in \mathfrak{M}$ a pro každou $M \in \mathfrak{M}$ existuje $g \in \mathcal{C}$ tak, že $M = \{x\,;\, g(x) = 0\}$.

Rozhodněte, zda systém $\mathfrak{M}$ obsahuje nespočetnou množinu $M \subset \langle 0,1 \rangle$.

663. Dokažte, že existuje funkce f definovaná na intervalu $(0, \infty)$, která je spojitá v nekonečně mnoha bodech $x \in (0, \infty)$ a má následující vlastnost: Je-li $y \in (0, \infty)$, potom $f(y) = 0$, právě když $f(2y) \neq 0$.

664. Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle 0,1 \rangle$, $f(0) = f(1)$. Potom pro každé $n \in N$ existuje $x \in \langle 0,1 \rangle$ tak, že

$$x + \frac{1}{n} \leq 1 \quad \text{a} \quad f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x).$$

Dokažte.

665. Nechť f je spojitá periodická funkce v E_1. Je-li $a \in E_1$, potom existuje $x \in E_1$ tak, že $f(x + a) = f(x)$. Dokažte.

666. Sestrojte funkci f definovanou v E_1 tak, aby k libovolnému bodu $[x, y] \in E_2$ a libovolnému $\varepsilon > 0$ existoval bod $t \in E_1$ tak, že vzdálenost bodů $[x,y]$ a $[t, f(t)]$ v E_2 je menší než číslo ε.

Existuje spojitá funkce uvedených vlastností?

667. Rozhodněte, zda každá funkce s vlastností, popsanou v úloze 666, má již Darbouxovu vlastnost.

668. Rozhodněte, zda existuje funkce f spojitá v intervalu $\langle 0,1 \rangle$ tak, aby pro každé $y \in f(\langle 0,1 \rangle)$ byla množina $f_{-1}(y) \cap \langle 0,1 \rangle$ nekonečná a spočetná.

669. Nechť funkce f má derivaci všude v intervalu (a,b), $a < x < b$, $x < \alpha_n < \beta_n$, $\lim \alpha_n = x$, $\lim \beta_n = x$. Nechť platí

(P) posloupnost $\{(\beta_n - x) / (\beta_n - \alpha_n)\}$ je omezená.

Potom $\lim_{n \to \infty} [f(\beta_n) - f(\alpha_n)] / (\beta_n - \alpha_n) = f'(x)$.

Dokažte.

Rozhodněte, zda tvrzení platí, vypustíme-li předpoklad (P) a srovnejte s úlohou 358.

670. Sestrojte funkci f omezenou a ryze monotonní na intervalu $(0, \infty)$ tak, aby vlastní derivace funkce f existovala všude v $(0, \infty)$ a

$$\lim_{n \to \infty} f'(2n) = +\infty \quad , \quad \lim_{n \to \infty} f'(2n + 1) = 0 .$$

671. Nechť funkce f je spojitá v $\langle a,b \rangle$ a má derivaci v (a,b). Jestliže $f'_+(a) = f'_-(b)$, potom existuje $c \in (a,b)$ tak, že

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = f'(c) .$$

Dokažte.

672. Pro $x \in E_1$ definujme funkci g předpisem $g(x) = e^{x^2}$. Dokažte, že potom je pro každé $n \in N$ funkce $g^{(n)}/g$ polynom a spočtěte jeho koeficienty.

673. Nechť f je funkce, která má všude v E_1 vlastní derivaci $f''(x)$ a nechť platí

$$|f(x)| \leq 1 , \quad |f''(x)| \leq 1$$

pro každé $x \in \langle 0,2 \rangle$. Potom platí $|f'(x)| \leq 2$ pro každé $x \in \langle 0,2 \rangle$. Dokažte.

674. Nechť f je funkce spojitá na intervalu $\langle a,b \rangle$ a nechť f má vlastní derivaci všude v (a,b) . Nechť pro každé $x \in (a,b)$ existuje právě jedno číslo $\varphi(x) \in (a,b)$ tak, že

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\varphi(x)) .$$

Dokažte, že funkce $\varphi : x \longmapsto \varphi(x)$ je spojitá na (a,b) .

675. Nechť $M \subset (0,1)$ je nekonečná množina. Nechť f je funkce definovaná v intervalu $(0,1)$ a nechť $f'(x) = 1$ pro každé $x \in M$. Rozhodněte, zda existuje $x_0 \in (0,1)$, v němž má funkce $|f|$ derivaci.

676. Nechť f je funkce, která má v E_1 derivaci a nechť existuje interval $\langle a,b \rangle$ a číslo $A \in E_1$ tak, že platí $f(a) = 0$, $|f'(x)| \leq A|f(x)|$ pro všechna $x \in \langle a,b \rangle$. Potom platí $f(x) = 0$ pro všechna $x \in \langle a,b \rangle$. Dokažte.

677. Nechť funkce f, g mají vlastní derivaci všude v intervalu (a,b) . Je-li $a < x_1 < x_2 < b$ a $f(x_1) = f(x_2) = 0$, potom existuje $t \in (x_1, x_2)$ tak, že

$$f'(t) + f(t)\, g'(t) = 0 .$$

Dokažte.

678. Buď $M \in E_1$ a nechť f je funkce spojitá v intervalu $\langle 0,1 \rangle$. Předpokládejme, že f má vlastní derivaci všude v $(0,1)$ a nerovnost

$$| x f'(x) - f(x) + f(0) | < M x^2$$

platí pro každé $x \in (0,1)$. Rozhodněte, zda pak existuje $f'_+(0)$.

679. Nechť f je spojitá funkce na $\langle a,b \rangle$ a nechť funkce g má vlastní derivaci všude v $\langle a,b \rangle$. (V krajních bodech intervalu se rozumí derivace jednostranné.) Buď $g(a) = 0$, $\lambda \in E_1 - \{ 0 \}$, a nechť platí

$$| g(x) f(x) + \lambda g'(x) | \leq g(x)$$

pro každé $x \in \langle a,b \rangle$. Potom je $g(x) = 0$ pro každé $x \in \langle a,b \rangle$. Dokažte.

680. Nechť je $n \in N$ a funkce f má v E_1 derivaci n-tého řádu. Buď dále $\langle a,b \rangle$ takový interval, ve kterém má funkce f alespoň $n + 1$ různých nulových bodů. Nechť $P(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, $x \in E_1$, je polynom s reálnými koeficienty takový, že všechny jeho kořeny jsou reálné. Potom má funkce

$$f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \dots + a_0 f$$

alespoň jeden nulový bod v intervalu $\langle a,b \rangle$. Dokažte.

681. Nechť funkce f má derivaci druhého řádu na $(0, \infty)$. Položme $M_i = \sup\limits_{x \in (0,\infty)} |f^{(i)}(x)|$ $(i = 0,1,2)$. Je-li $M_i \in E_1$ $(i = 0,1,2)$, potom

$$M_1^2 \leq 4\, M_0\, M_2 \ .$$

Dokažte.

682. Sestrojte funkci f definovanou v E_1, která má v každém bodě z E_1 derivace všech řádů, je nezáporná a platí

$$\{ x \in E_1 \ ; \ f'(x) > 0 \} = (-1,1) \ .$$

683. Buď $\mathcal{V}$ systém všech kvadratických polynomů P (s reálnými koeficienty), pro něž $|P(x)| \leq 1$ pro všechna $x \in \langle 0,1 \rangle$. Dokažte, že

$$\sup \{ |P'(0)| \ ; \ P \in \mathcal{V} \} = 8$$

a sestrojte $P_1 \in \mathcal{V}$ tak, aby $P_1'(0) = 8$.

684. Nechť $\alpha \in E_1$. Rozhodněte, zda existuje funkce f spojitá a nezáporná v intervalu $\langle 0,1 \rangle$ tak, že platí

$$\int_0^1 f = 1 \ ,$$

$$\int_0^1 f(x) \cdot x\, dx = \alpha \ ,$$

$$\int_0^1 f(x) \,.\, x^2 \, dx = \alpha^2 \,.$$

685. Nechť f je funkce spojitá v intervalu $\langle 0,1 \rangle$. Potom platí

$$\max \{ |f(x)| \,;\, x \in \langle 0,1 \rangle \} = \lim_{n \to \infty} \left(\int_0^1 |f|^n \right)^{1/n} \,.$$

Dokažte.

686. Nechť f je funkce spojitá na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ a nechť

$$\int_0^\pi f(x) \,.\, \cos x \, dx = \int_0^\pi f(x) \,.\, \sin x \, dx = 0 \,.$$

Potom existují α , $\beta \in E_1$, $0 < \alpha < \beta < \pi$, pro něž platí $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Dokažte.

687. Rozhodněte, zda existuje funkce f spojitá na intervalu $(1, \infty)$ taková, že pro každé $x > 1$ platí

$$\int_x^{x^2} f(t) \, dt = 1 \,.$$

688. Určete

$$\sup \{ g(x) \,;\, x \in (0, \infty) \} \,,$$

kde $g(x) = x \int_x^{x+1} \sin t^2 \, dt$, $x \in (0, +\infty)$.

689. Buď f funkce omezená a spojitá na intervalu $(0,1\rangle$. Na intervalu $\langle 0,1\rangle$ definujme funkci g_f takto:

$$g_f(x) = (1/x) \int_0^x f \ , \quad x \in (0,1\rangle \ ; \quad g_f(0) = 0 \ .$$

(a) Jestliže existuje $\lim_{x \to 0+} f(x)$, potom existuje $\lim_{x \to 0+} g_f(x)$. Dokažte.

(b) Sestrojte funkci f_1 omezenou a spojitou na intervalu $(0,1\rangle$ tak, aby $\lim_{x \to 0+} f_1(x)$ neexistovala a existovala $\lim_{x \to 0+} g_{f_1}(x)$.

(c) Sestrojte funkci f_0 spojitou a omezenou na intervalu $(0,1\rangle$ tak, aby neexistovala $\lim_{x \to 0+} g_{f_0}(x)$.

690. Nechť $p \in (1,\infty)$ a nechť funkce f je nezáporná v intervalu $(0,\infty)$, pro niž existuje $N \int_0^\infty f^p$. Pro $x \in (0,\infty)$ položme

$$F(x) = x^{-1} \int_0^x f(t) \, dt \ .$$

Dokažte, že

694. Nechť f je funkce nezáporná (resp. nezáporná a omezená) v intervalu (a,b) a nechť f má primitivní funkci v (a,b). Rozhodněte, zda existuje na intervalu (a,b) primitivní funkce k funkci f^2.

695. Nechť g je nezáporná riemannovsky integrovatelná funkce na $\langle 0,1 \rangle$. Pro $n \in N$ položme

$$A_n = R \int_0^1 g^n .$$

Dokažte, že pro $n \in N$ platí

$$A_1^n \leq A_n .$$

696. Nechť funkce f je definována v intervalu $\langle a,b \rangle$ a platí: Pro každé $t \in (a,b\rangle$ existuje vlastní $\lim_{x \to t-} f(x)$ a pro každé $u \in \langle a,b)$ existuje vlastní $\lim_{x \to u+} f(x)$. Potom f má Riemannův integrál od a do b. Dokažte.

697. Pro $x \in E_1$ položme $g(x) = x - [x]$ (kde $[x]$ je celá část čísla x). Dokažte, že funkce

$$f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(nx)}{2^n}$$

je riemannovsky integrovatelná na $\langle 0,1 \rangle$ a spočtěte $R \int_0^1 f$.

Potom řada $\sum \frac{a_n}{r_n}$ diverguje a řada $\sum \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ konverguje.

Dokažte.

702. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost kladných čísel, $\sum a_n = +\infty$. Položme

$$s_n = \sum_{m=1}^{n} a_m , \qquad n \in N .$$

Potom řady $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$, $\sum \frac{a_n}{s_n}$ divergují a řada $\sum \frac{a_n}{s_n^2}$ konverguje. Dokažte.

703. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost kladných čísel, $\sum a_n = +\infty$. Rozhodněte, zda konvergují řady

$$\sum \frac{a_n}{1+n\,a_n} , \qquad \sum \frac{a_n}{1+n^2 a_n} .$$

704. Užitím znalostí o mocninných řadách dokažte toto tvrzení: Nechť řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ a jejich Cauchyův součin $\sum c_n$ konvergují. Potom platí

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n .$$

705. Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $c_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i+1}$ $(n \in N)$. Rozhodněte, zda existují konvergentní řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, které nekonvergují absolutně a řada $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ konverguje.

706. V souvislosti s úlohou 521 řešte tuto úlohu:

Lze ke každému prostému zobrazení $f: N \longrightarrow N \times N$, které je zobrazením na $N \times N$, nalézt konvergentní řady $\sum a_n$, $\sum b_n$ tak, že řada $\sum c_n$ diverguje (je-li $f(n) = (j,k)$, klademe opět $c_n = a_j b_k$) ?

707. Nechť $\{u_k\}$ je posloupnost přirozených čísel a buď $Q_n = \{k \in N\,;\ u_k \leq n\}$. Je-li množina Q_n konečná, položme V_n rovno počtu prvků množiny Q_n ; v opačném případě buď $V_n = 0$. Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{u_k} < \infty$, potom $\lim n^{-1} V_n = 0$. Dokažte.

708. Nechť $\{\alpha_n\}$ je neklesající posloupnost kladných čísel, pro niž $\lim \alpha_n = \infty$. Potom existují posloupnosti $\{a_n\}$, $\{A_n\}$ nezáporných čísel tak, že $A_n \leq \alpha_n a_n$ pro každé $n \in N$ a přitom

$$\sum a_n < \infty \quad \text{a} \quad \sum A_n = +\infty .$$

Dokažte.

709. Nechť $\sum a_n$ je konvergentní řada s kladnými členy. Potom existuje rostoucí posloupnost kladných čísel $\{\alpha_n\}$ tak, že $\lim \alpha_n = \infty$ a

$$\sum a_n \alpha_n < \infty .$$

Dokažte.

710. Nechť $\sum a_n$ je divergentní řada s kladnými členy. Potom existuje klesající posloupnost $\{\alpha_n\}$ kladných čísel tak, že $\lim \alpha_n = 0$ a

$$\sum \alpha_n a_n = \infty .$$

Dokažte.

711. Nechť řada $\sum a_n$ konverguje a $\sum |a_n| = \infty$. Nechť $a \in E_1$. Potom existují čísla $\alpha_n \in \{-1,1\}$ tak, že

$$\sum \alpha_n a_n = a .$$

Dokažte.

712. Nechť $\sum a_n$ je konvergentní řada reálných čísel, $\sum |a_n| = +\infty$. Potom existuje posloupnost nezáporných čísel $\{b_n\}$ tak, že platí

$$\lim b_n = 0 , \quad \sum a_n b_n = + \infty .$$

713. Nechť řada $\sum a_n$ konverguje, $\sum |a_n| = +\infty$. Rozhodněte, zda existuje permutace f množiny N taková, že každé $x \in E_1$ je hromadným bodem posloupnosti

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} a_{f(k)} \right\}_{n=1}^{\infty} .$$

714. Nechť funkce f je definovaná v E_1 a má následující vlastnost: Je-li $\sum a_n$ konvergentní řada, potom řada $\sum f(a_n)$ konverguje. Dokažte, že potom existuje $\delta > 0$ tak, že f je lineární na $(-\delta, \delta)$.

715. Nechť $\{\lambda_n\}$ je posloupnost nezáporných čísel a nechť platí: Pro každou konvergentní řadu $\sum a_n$ kladných čísel konverguje také řada $\sum \lambda_n a_n$. Dokažte, že $\{\lambda_n\}$ je omezená posloupnost.

716. Nechť z_n $(n \in N)$ je komplexní číslo, jehož reálná část je nezáporná. Jestliže řady $\sum z_n$ a $\sum z_n^2$ konvergují, potom řada $\sum z_n^2$ konverguje absolutně. Dokažte.

717. Nechť funkce f má v E_1 spojitou druhou derivaci, $f(0) = 0$. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže řady $\sum a_n$, $\sum a_n^2$ konvergují, potom konverguje řada $\sum f(a_n)$. Dokažte.

718. Dokažte následující tvrzení:

Nechť $\{b_n\}$ je posloupnost reálných čísel.

Nechť pro každou absolutně konvergentní řadu $\sum a_n$ řada

$$\sum a_n b_n$$

konverguje. Potom je posloupnost $\{b_n\}$ omezená.

719. Dokažte tzv. kondensační kritérium pro konvergenci řad:

Nechť pro všechna $n \in N$ platí $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$. Potom řada $\sum a_n$ konverguje právě tehdy, konverguje-li řada

$$\sum 2^n a_{2^n} \ .$$

Zjistěte, zda lze nahradit číslo 2 jiným přirozeným číslem $p > 2$.

720. Nechť $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$, $\liminf b_n = 0$. Položme $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Potom

$$\limsup_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} s_k (b_k - b_{k+1}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \ .$$

Dokažte.

721. Nalezněte posloupnost $\{a_n\}$ čísel $a_n \in \{0,1\}$, $n \in N$, takovou, že neexistuje limita

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \ .$$

722. Nechť $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$. Sestrojte posloupnost $\{a_n\}$ čísel $a_n \in \{0,1\}$, $n \in N$, tak, aby platilo

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = \alpha \ .$$

723. V souvislosti s předcházející úlohou rozhodněte, zda pro $\alpha = 0$ je pro příslušnou posloupnost $\{a_n\}$ množina

$$\{ k \ ; \ a_k = 1 \}$$

vždy konečná.

724. Nechť pro posloupnost $\{a_n\}$ je pro všechna $p \in N$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} (a_{p+1} + \dots + a_{p+k}) = a \in E_1 \ .$$

Rozhodněte, zda pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $k_0 \in N$ tak, že pro všechna $p \in N$ a $k \geq k_0$ platí

$$\left| \frac{1}{k} (a_{p+1} + \dots + a_{p+k}) - a \right| < \varepsilon \ .$$

725. Nechť $\langle a,b)$ je omezený interval. Sestrojte funkci f definovanou v $\langle a,b)$, k níž neexistuje posloupnost polynomů f_n tak, že platí

$$f_n \rightrightarrows f \quad \text{na} \quad \langle a,b) .$$

726. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí definovaných v E_1, které mají $f_n''(x)$ pro každé $x \in \langle 0,1 \rangle$ a každé $n \in N$. Nechť dále platí $f_n \rightrightarrows$ na $\langle 0,1 \rangle$ a nechť existuje $K > 0$ tak, že je

$$| f_n''(x) | \leq K$$

pro každé $n \in N$ a každé $x \in \langle 0,1 \rangle$. Potom platí $f_n' \rightrightarrows$ na $\langle 0,1 \rangle$. Dokažte.

727. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí spojitých na intervalu $\langle a,b \rangle$. Rozhodněte, zda jsou ekvivalentní výroky:

(a) $f_n \rightrightarrows f_0$ na $\langle a,b \rangle$;

(b) pro každou konvergentní posloupnost $\{x_n\}$ bodů intervalu $\langle a,b \rangle$ je

$$\lim f_n(x_n) = f_0(\lim x_n) .$$

728. Nechť $\{p_n\}$ je posloupnost funkcí, definovaná předpisem $p_1(x) = 0$ pro všechna $x \in E_1$,

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}\,[\,x - p_n^2(x)\,]\ , \quad x \in E_1\ ,\ n \in N\ .$$

Potom p_n jsou polynomy $p_n(x) \nearrow \sqrt{x} = f(x)$ na $\langle 0,1 \rangle$ a je $p_n \rightrightarrows f$ na $\langle 0,1 \rangle$. Dokažte.

729. Nechť f má derivace všech řádů v E_1 , nechť $f(x) \geq 0$, $f^{(n)}(x) \geq 0$ platí pro každé $x \in E_1$ a $n \in N$. Je-li $\alpha \in E_1$, potom existuje $\delta > 0$ tak, že součet Taylorovy řady funkce f o středu α je roven $f(x)$ pro každé $x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$. Dokažte.

730. Nechť funkce f má derivace všech řádů v $(0,1)$ a buď $f^{(\infty)}$ funkce definovaná v $(0,1)$ taková, že $f^{(n)}$ konvergují stejnoměrně k $f^{(\infty)}$ na $(0,1)$. Dokažte, že potom existuje $c \in E_1$ tak, že pro každé $x \in E_1$ platí $f^{(\infty)}(x) = c\, e^x$.

731. Rozhodněte, zda existuje funkce f a funkce f_n , $n \in N$, spojité na intervalu $\langle a,b \rangle$ tak, že platí

$$f_n \rightrightarrows f \quad v \quad \langle a,b \rangle$$

a pro délky grafů (viz [7], V. § 2.) platí

$$\limsup_{n \to \infty} L(a,b,f_n) < L(a,b,f) < +\infty\ .$$

732. Nechť A, B jsou spočetné husté podmnožiny intervalu $\langle 0,1 \rangle$. Dokažte, že existuje prosté zobrazení $\varphi : A \longrightarrow B$ takové, že $\varphi(A) = B$ a $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$, kdykoli $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$. Dále dokažte, že každé zobrazení φ s uvedenými vlastnostmi lze jednoznačně rozšířit na prosté spojité zobrazení intervalu $\langle 0,1 \rangle$ na $\langle 0,1 \rangle$.

733. Dokažte, že neexistuje posloupnost $\{K_n\}$ kompaktních množin racionálních čísel tak, aby platilo: Je-li S kompaktní množina racionálních čísel, potom existuje $n_0 \in N$ tak, že $S \subset K_{n_0}$.

734. Dokažte, že existuje nespočetná uzavřená podmnožina intervalu $\langle 0,1 \rangle$, která neobsahuje žádné racionální číslo.

735. Nechť f je funkce definovaná v E_1, pro niž $f(0) = 0$, $f(1) \neq 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} f(n) = 0$ $(n \in N)$. Sestrojte posloupnost přirozených čísel $\{a_n\}$ a kompaktní množinu $C \subset E_1$ tak, aby $\lim a_n = \infty$, $\lim f(a_n x) = 0$ pro každé $x \in C$ a aby pro funkce $g_n : x \longmapsto f(a_n x)$, $x \in C$, neplatilo $g_n \rightrightarrows 0$ na C.

L i t e r a t u r a

[1] G.N. Berman: Sbornik zadač po kursu matěmatičeskogo analiza, Nauka, Moskva 1967 (existuje český překlad).

[2] I. Černý: Základy analysy v komplexním oboru, Academia, Praha 1967.

[3] B.P. Děmidovič: Sbornik zadač i upražněnij po matěmatičeskomu analizu, Nauka, Moskva 1969.

[4] S. Fučík: Příklady z matematické analýzy II. Metrické prostory. (v tisku).

[5] B. Gelbaum, Dž. Olmsted: Kontrpriměry v analize, Mir, Moskva 1967 (překlad z angličtiny).

[6] V. Jarník: Diferenciální počet I, ČSAV, Praha 1963.

[7] V. Jarník: Integrální počet I, ČSAV, Praha 1963.

[8] V. Jarník: Diferenciální počet II, ČSAV, Praha 1956.

[9] V. Jarník: Integrální počet II, ČSAV, Praha 1955.

[10] V. Jarník: Skripta z matematické analýzy pro 3. semestr, SPN, Praha 1968.

[11] J. Lukeš: Teorie míry a integrálu I, SPN, Praha 1972.

[12] J. Lukeš a kol.: Problémy z matematické analýzy, SPN, Praha 1972.

[13] J. Milota: Matematická analýza I (v tisku).

[14] Ju. S. Očan: Sbornik zadač i těorem po těorii funkcij dějstvitěl'nogo peremennogo, Prosvěščenije, Moskva 1965.

Sčt 17 - 1487/77

KNIHOVNA MAT.-FYZ. FAKULT
Matematické oddělení
Sokolovská 83