

Cvičení z PDR1 (DIR044)

ZS 2009/10

Č. 7

10.11.2007

podle M. Rokyty, KMA MFF UK

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/>

1. Uvažujte lineární PDR druhého řádu s konstantními koeficienty, v $\mathbb{R}^2$, tedy rovnici typu

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = f. \quad (7.1)$$

Ukažte, že platí:

- (7.1) je eliptická $\iff b^2 - 4ac < 0$;
 - (7.1) je parabolická $\iff b^2 - 4ac = 0$;
 - (7.1) je hyperbolická $\iff b^2 - 4ac > 0$.
2. Uvažujte lineární PDR druhého řádu v kanonickém tvaru (vzhledem k nevyšším derivacím), tedy rovnici pro $u = u(y)$,

$$\sum_{k=1}^d \alpha_k(y) \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2} + \sum_{k=1}^d \beta_k(y) \frac{\partial u}{\partial y_k} + c(y) u = f(y), \quad \text{kde } \alpha_k(y) \in \{-1, 1, 0\}. \quad (7.2)$$

Ukažte, že v každém bodě y lze provést tyto úvahy:

- (a) Pokud existuje takový index j , že $\alpha_j \neq 0$, $\beta_j \neq 0$, potom zavedení nové funkce $v = v(y)$ substitucí $u = v e^{-\frac{\beta_j y_j}{2\alpha_j}}$ (přes stejné indexy nesčítáme, jde o ono konkrétní j) způsobí, že:
- v rovnici pro v nebude člen, odpovídající β_j (odpovídající koeficient bude nulový)
 - všechny koeficienty u členů druhého řádu zůstanou beze změny a všechny zbylé koeficienty u členů prvního řádu (s výjimkou výše zmíněného) zůstanou rovněž beze změny
- Ta dvojka ve jmenovateli zlomku v exponenciále není překlep. Sledujte její roli při výpočtu.
- (b) Pokud existuje takový index j , že $\alpha_j = 0$, $\beta_j \neq 0$, potom zavedení nové funkce $v = v(y)$ substitucí $u = v e^{-\frac{c y_j}{\beta_j}}$ (přes stejné indexy nesčítáme, jde o ono konkrétní j) způsobí, že:
- v rovnici pro v nebude absolutní člen, tj. člen odpovídající nulté derivaci (koeficientu c)
 - všechny koeficienty u členů druhého i prvního řádu zůstanou beze změny
3. Pomocí výše uvedených dvou substitucí ukažte, že každou lineární PDR 2. řádu s konstantními koeficienty lze vhodnými substitucemi převést na jeden z následujících typů:
- Eliptickou rovnici na $-\Delta u + ku = f$. Pro $k = 0$ jde o tzv. Laplace-Poissonovu rovnici, pro $k \neq 0$ o rovnici Helmholtzova typu. Koeficient k , je-li nenulový, obecně nelze vynulovat.
 - Parabolickou rovnici na $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f$, tj. na rovnici vedení tepla. Všechny parabolické lineární PDR 2. řádu s konstantními koeficienty jsou tedy nějakou rovnicí vedení tepla.
 - Hyperbolickou rovnici na $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u + ku = f$, tj. na vlnovou rovnici. Koeficient k , je-li nenulový, obecně nelze vynulovat.
4. Určete typ rovnice, převed'te na kanonický tvar, případně převed'te na jednu z rovnic z předchozího bodu, případně se pokuste vyřešit, pokud se po převedení dostanete na řešitelný typ rovnice.

(a) $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} + u_x + u_y = 0$

Řešení: Po provedení substituce $\xi = x$, $\eta = y - x$, $\chi = 2x - 2y + z$ s následným zavedením nové funkce předpisem $u = v e^{-\xi/2}$ dostaneme rovnici $\Delta v = \frac{1}{4}v$. Jde o eliptickou rovnici (Helmholtzova typu).

(b) $u_{xx} + 4u_{xy} + 8u_{yy} + u_x + u_y = 0$

Řešení: Po provedení substituce $\xi = x$, $\eta = \frac{y}{2} - x$ s následným zavedením nové funkce předpisem $u = ve^{-\xi/2+\eta/4}$ dostaneme eliptickou rovnici (Helmholtzova typu) $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = \frac{5}{16}v$.

(c) $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} - u_x - 2u_y = 0$

Řešení: Po provedení substituce $\xi = x$, $\eta = y - 2x$ dostaneme parabolickou rovnici $u_\eta - u_{\xi\xi} = 0$.

(d) $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_y = 0$

Řešení: Po provedení substituce $\xi = x$, $\eta = \frac{x}{2} + \frac{y}{2}$ s následným zavedením nové funkce předpisem $u = ve^{\eta/4}$ dostaneme hyperbolickou rovnici $v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} = \frac{3}{16}v$.

(e) $4u_{xy} - 3u_{yy} + 4u_x - 8u_y - 5u = 0$,

řešte obecně a poté s podmínkami $u(x, 0) = e^{\frac{x}{2}}$, $u_y(x, 0) = 0$.

Řešení: Po provedení substituce $\xi = x + y$, $\eta = x + 2y$ s následným zavedením nové funkce předpisem $u = ve^{2\xi - \frac{3}{2}\eta}$ dostaneme hyperbolickou rovnici $v_{\xi\xi} - 4v_{\eta\eta} = 0$. Její obecné řešení je $v(\xi, \eta) = f(\eta - 2\xi) + g(\eta + 2\xi)$, tedy $u(x, y) = e^{\frac{x}{2}-y}(f(x) + g(3x + 4y))$. Okrajové podmínky dají $u(x, y) = e^{\frac{x}{2}-y}(1 + y)$.

- 5.* A další sada příkladů pro vaše samostatné počítání: v každém bodu oblasti, kde se nemění typ rovnice, najděte její kanonický tvar.

V případě, že vám vyjde hyperbolická rovnice zkuste pomocí vhodné transformace souřadnic transformovat rovnici na rovnici s konstantními koeficienty na celém okolí (nejen v bodě). Vhodná transformace souřadnic je následující: definujte novou funkci v jako $u(x, y) = v(\eta(x, y), \xi(x, y))$, kde $\eta(x, y)$ a $\xi(x, y)$ řeší vhodnou lineární PDR 1. řádu. V příkladu (a) se jedná o rovnice (transformujeme na okolí bodu $x_0 > 0$, $y_0 > 0$): $y\partial_x\eta(x, y) + x\partial_y\eta(x, y) = 0$ a $y\partial_x\xi(x, y) - x\partial_y\xi(x, y) = 0$, což odpovídá tomu, že rovnici (a) lze zapsat $(y\partial_x - x\partial_y)(y\partial_x + x\partial_y)u(x, y) = 0$.

Odstraňte 1. derivace podobně jako v příkladu 2.

(a) $y^2u_{xx} - x^2u_{yy} = 0$

(b) $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} + (2 - \cos^2 x) u_{yy} = 0$

(c) $x^2u_{xx} - 2xu_{xy} + u_{yy} = 0$

(d) $yu_{xx} - xu_{xy} = 0$

(e) $(1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + yu_y = 0$