

Cvičení z PDR1 (DIR044)

ZS 2007/08

č. 6

3.11.2007

podle M. Rokyty, KMA MFF UK

1. Zopakujte si, že klasické řešení Cauchyovy úlohy pro lineární konvektivní rovnici v jedné prostorové a jedné časové proměnné (pro $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) s počáteční podmínkou $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, tj.

$$\begin{aligned} u_t + au_x &= 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x) & x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

je dáno vztahem

$$u(x, t) = \varphi(x - at), \quad (6.2)$$

a že toto řešení je možno nalézt¹ zavedením nových proměnných

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at. \quad (6.3)$$

2. Zkoumejte, zda substituce (6.3) vede k řešení následujících rovnic druhého řádu ($a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$):

- (a) Lineární eliptická rovnice ve dvou proměnných (x, t) :

$$u_{tt} + a^2 u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (6.4)$$

Návod: Po provedení substituce dostaneme rovnici $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$. Uvedená substituce vede tedy pouze k odstranění koeficientu a^2 u u_{xx} , tj. převádí (6.4) v Laplaceovu rovnici $\Delta u(\xi, \eta) = 0$. V příštím cvičení se k této rovnici znovu (o něco úspěšněji) vrátíme.

- (b) Lineární rovnice vedení tepla v jedné prostorové a jedné časové dimenzi:

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (6.5)$$

Návod: Po provedení substituce obdržíme rovnici $a(u_{\eta} - u_{\xi}) + a^2(u_{\eta\eta} + 2u_{\eta\xi} - u_{\xi\xi}) = 0$, tedy se nám úspěšně povedlo problém učinit složitějším. Rovnici vedení tepla budeme vbrzku řešit jiným způsobem.

- (c) Lineární vlnová rovnice v jedné prostorové a jedné časové dimenzi:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (6.6)$$

Návod: Po provedení substituce (6.3) dostaneme rovnici $u_{\xi\eta} = 0$, jejímž dvojnásobným přintegrováním (podle ξ a podle η) dostaneme, že řešením (6.6) jsou všechny funkce tvaru $u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$, kde f a g jsou libovolné dostatečně hladké funkce. Celkově tedy je $u(x, t) = f(x - at) + g(x + at)$ libovolným řešením (6.6).

- (d) Předchozí úspěšný bod učinite ještě úspěšnějším: najděte řešení problému

$$\begin{aligned} u_{tt} - a^2 u_{xx} &= 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x) & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) & x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (6.7)$$

tj. dopracujte se až k tzv. d'Alembertovu vzorci

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (6.8)$$

¹... samozřejmě je možno řešení (6.1) nalézt také metodou charakteristik – srov. s cvičením z 11.10.2007 (cvičení číslo 2) – př. 3 a př. 2c).

Návod: Vyjděte z výsledku, který jste odvodili v předchozím bodu: $u(x, t) = f(x - at) + g(x + at)$. S použitím obou okrajových podmínek z (6.7) se relativně snadno dopracujete k d'Alembertovu vzorci. Přímým dosazením se přesvědčte, že funkce (6.8) řeší problém (6.7). Odůvodněte pomocí věty Cauchy-Kowalevské, že úloha (6.7) má pro reálně analytické funkce φ, ψ jediné reálně analytické řešení. Protože funkce (6.8) je (pro reálně analytické φ, ψ) reálně analytická, našli jsme toto řešení explicitně.

3. Předchozí úspěšný bod učíte úplně nejúspěšnějším: najděte řešení problému

$$\begin{aligned} u_{tt} - a^2 u_{xx} &= 0, & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x) & x > 0, \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) & x > 0, \\ u(0, t) &= 0 & t > 0. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Návod: Prodlužte vhodně data úlohy, tj. funkce φ a ψ , pro $x < 0$ a použijte d'Alembertův vzorec. Množina $\{x > 0, t > 0\}$ by se měla rozpadnout na dvě části, na kterých je řešení definováno různě. Zkuste si rozmyslet, co by mohlo znamenat spojení "odraz vlny v $x = 0$ ".

4.* Všímněte si: rovnici $u_t + au_x = 0$ je možno zapsat ve tvaru

$$(\partial_t + a\partial_x)u = 0$$

a její všechna řešení mají tvar

$$u(x, t) = f(x - at),$$

zatímco rovnici $u_t - a^2 u_{xx} = 0$ je možno zapsat ve tvaru

$$(\partial_t + a\partial_x)(\partial_t - a\partial_x)u = 0$$

a její všechna řešení mají tvar

$$u(x, t) = f(x - at) + g(x + at).$$

Nenapadlo by vás přitom něco, co by mělo šanci zdolat rovnici $u_{tt} + a^2 u_{xx} = 0$?

Návod: Zkuste substituci obdobnou (s přihlédnutím k charakteru rovnice) substituci $\xi = x - at$, $\eta = x + at$ a postupujte analogicky jako v případě vlnové rovnice. Pokud se dopracujete ke vzorci, který bude dosti podobný d'Alembertově vzorci (viz minulé cvičení), zkuste overit jeho platnost buď přímým dosazením výsledné funkce do rovnice nebo tím, že pomocí něho spočítáte tzv. Hadamardovo řešení Laplaceovy rovnice (viz bod 6 z programu čtvrtého cvičení).²

²Řešení sem pro pořádek napíšu, i když cennější jistě bude, když si je odvodíte sami: substituce $\xi = x - iat$, $\eta = x + iat$ (je vám jasné, proč zrovna tato? Věřili byste formálnímu rozpisu $u_{tt} + a^2 u_{xx} = (\partial_t + ia\partial_x)(\partial_t - ia\partial_x)u$?) nás dovede k rovnici $u_{\eta\xi} = 0$ a následně k obecnému řešení $u(x, t) = f(x - iat) + g(x + iat)$. S přihlédnutím k počátečním podmínkám dostaneme

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - iat) + \varphi(x + iat)}{2} + \frac{1}{2ia} \int_{x - iat}^{x + iat} \psi(s) ds, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

(Vlastně jde o formálně tytéž výpočty jako v případě vlnové rovnice). Přímým dosazením se přesvědčíme, že vzorec funguje. Použitím tohoto vzorce pro $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = \frac{1}{n^k} \sin nx$ dostaneme $u(x, t) = \frac{1}{n^{k+1}} \sin nx \sinh nt$, což je očekávaná (Hadamardova) odpověď.