Cvičení 2

Cvičení 1. *Vyjádřete Laplaceův operátor* $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *ve 2D v polárních souřadnicích. Proveďte totéž ve 3D. Uvědomte si, že transformace do sférických souřadnic lze složit z dvou transformací do polárních souřadnic.*

Cvičení 2. *Buď* $\alpha \in C^\infty([-1,1])$. *Definujme* $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R} : y > \alpha(x)\}$, $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R} : y = \alpha(x)\}$, $\mathbf{n}(x) = (\alpha'(x), -1)/(1+\alpha'(x)^2)^{1/2}$ *a uvažme následující problém. Pro dané funkce* $f \in C^\infty(\Omega)$, $g, h \in C^\infty(\Gamma)$ *hledáme funkci* $u : \Omega \cup \Gamma \to \mathbb{R}$, *aby* $\Delta u = f$ *v* Ω, $u = g$ *na* Γ *a* $\frac{\partial u}{\partial n} = h$ *na* Γ.

Pomocí zobrazení $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \Omega$, $\Phi(z,w) = (z, g(z)) + w\mathbf{n}(z)$ *převeďte problém na* $O = \{(x,y) \in \mathbb{R} : y > 0\}$ *a* $L(U) = F$ *v* O, $U = G$ *a* $\frac{\partial U}{\partial y} = H$ *na* $\{y = 0\}$. *Pro vhodné funkce* $F, G, H \in C^\infty(-1,1)$ *a vhodný diferenciální operátor 2. řádu* L.

Cvičení 3. *Pro* $g, h \in C^\infty(\mathbf{R})$ *najděte řešení* $u : \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq 0\} \to \mathbf{R}$ *následujícího problému*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{in } \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y > 0\} \tag{1}$$

$$u(x,0) = g(x) \quad \text{for all } x \in \mathbf{R} \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = h(x) \quad \text{for all } x \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

Nejprve převeďte (1) pomocí substituce $x = s + t$ *a* $y = s - t$ *na tvar, který se dá přímo integrovat. Po integraci by se ve výsledku měli objevit dvě integrační konstanty, ty je možné určit pomocí (2) a (3).*

Cvičení 4. *Pro* $g, h \in C^\infty(0, +\infty)$ *najděte řešení* $u : \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq 0, x \geq 0\} \to \mathbf{R}$ *následujícího problému*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{in } \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y > 0, x > 0\} \tag{4}$$

$$u(x,0) = g(x) \quad \text{for all } x \geq 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = h(x) \quad \text{for all } x \geq 0 \tag{6}$$

$$u(0,y) = 0 \quad \text{for all } y \geq 0. \tag{7}$$

Nakreslete si obrázek, kde co požadujeme. Vhodně (sudě nebo liše) prodlužte funkce g *a* h *a použijte předchozí cvičení. Vhodné rozšíření znamená, že podmínka (7) vyjde.*