

Cvičení z PDR1 (DIR044)

ZS 2007/08

Č. 2

11.10.2007

M. Rokyta, KMA MFF UK

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/>

1. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ oblast s hladkou hranicí $\partial\Omega$. Hledáme funkci $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ takovou, že je na hranici $\partial\Omega$ rovna předepsané (hladké) funkci φ a přitom plocha grafu (tj. dvourozměrná míra množiny $\{y = u(x); x \in \Omega, u = \varphi \text{ na } \partial\Omega\}$) je minimální. Odvoďte rovnici, kterou musí nutně hladké (tak hladké, jak je potřeba) u v oblasti Ω splňovat (tzv. rovnici minimální plochy):

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0. \quad (2.1)$$

Návod: Vyjděte z toho, že velikost uvedené plochy dané grafem u je dána jako

$$\Phi(u) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} \, dx$$

a jde tedy o minimalizaci funkcionálu Φ na prostoru $\{u(x) \text{ „dostatečně hladká“} ; u = \varphi \text{ na } \partial\Omega\}$. Nutnou podmínkou pro to je, aby

$$\left. \frac{d}{ds} \Phi(u + sv) \right|_{s=0} = 0, \quad (2.2)$$

kde $v(x)$ je libovolná hladká funkce na uzávěru Ω taková, že $v = 0$ na $\partial\Omega$.¹ Spočtete tedy (2.2) (vyjde vám, doufám, $\int_{\Omega} \frac{\nabla u \cdot \nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \, dx = 0$), dále použijte jednu z Gauss-Green-Ostrogradského formulí a odvoďte odtud $\int_{\Omega} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) v \, dx = 0$. Konečně se zamyslete nad tím, že pokud toto má platit pro všechna v výše zmíněných vlastností, musí pro dostatečně hladká u platit (2.1) ve všech bodech. Provedte všechny kroky podrobně!

2. Nalezněte charakteristiky a (metodou charakteristik) řešení následujících rovnic:

(a) $u_x = 6x^2 u_y$.

Řešení: $u(x, y) = F(2x^2 + y)$, kde F je libovolná hladká funkce.

(b) $u_t + au_x = 0$, $u(x, 0) = \sin x$, ($a \neq 0$).²

Řešení: $u(x, t) = \sin(x - at)$.

(c) $u_t + xu_x + tu = 0$, $u(x, 0) = \sin x$.

Řešení: $u(x, t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \sin(xe^{-t})$.

(d) $(z + y - x)u_x + (z + x - y)u_y + zu_z = 0$.

Řešení: $u(x, y, z) = \Phi(x + y - 2z, z^2(x - y))$, kde Φ je libovolná hladká funkce dvou proměnných.

3. Odvoďte, že řešení Cauchyovy úlohy $u_t + au_x = 0$, $u(x, 0) = \varphi(x)$, ($a \neq 0$) je toto: $u(x, t) = \varphi(x - at)$ ještě jinak, než metodou charakteristik.

Návod: Zaveďte nové proměnné $\xi = x - at$, $\eta = x + at$.

¹Znalci variačního počtu jistě postřehli, že na levé straně výrazu (2.2) počítáme tzv. Gâteauxovu derivaci $\delta\Phi(u; v)$, tj. „derivaci Φ v bodě u a směru v “. Fyzici zobrazení $\delta\Phi(u; \cdot)$ někdy říkají „variaci Φ “. Jde o zobecnění klasického pojmu derivace ve směru.

²Napište řešení tak, jak napovídá metoda charakteristik. Možná je také v této chvíli vhodné zamyslet se nad úlohou 3.