Zápočtová písemka NDIR044 – 2010

1) $\quad u u_x + u u_y = 0 \qquad$ na okolí $(\pi/2, 1)$

$$u(x,1) = \sin x$$

Řešení: rce lze přepsat: $(u^2)_x + (u^2)_y = 0$. Proto označme

$u^2(x,y) = v(x,y)$ a hledáme řešení $v_x + v_y = 0$

charakteristiky: $\left.\begin{aligned} \dot{x} &= 1 \\ \dot{y} &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ $x - y$ je konst. podél charakteristik

obecný tvar v: $v(x,y) = \phi(x-y)$ pro vhodnou ϕ

$u^2(x,y) = v(x,y)$ a tedy $u(x,y) = \psi(x-y)$ pro vhodné ψ

dosadíme poč. podm.: $u(x,1) = \sin(x) = \psi(x-1)$

Volíme tedy: $\psi(z) = \sin(z+1)$ Řešení je

$u(x,y) = \sin(x-y+1)$ definované na celém $\mathbb{R}^2$

---

2)

$$\partial_1^2 w + 2\partial_{12} w + 2\partial_2^2 w + 4\partial_1 w + 4\partial_2 w + w = 0 \qquad (*)$$

Definujeme matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Rovnice je eliptická a po transformaci souřadnic bude mít hlavní část tvar Δu.

Transformacija: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 - x_1 \end{array}$

$$u(x_1, x_2 - x_1) = w(x_1, x_2)$$

$$\partial_1 w = \partial_1 u - \partial_2 u \,; \quad \partial_2 w = \partial_2 u$$

$$\partial_1^2 w = \partial_1^2 u - 2\partial_{12} u + \partial_2^2 u \,; \quad \partial_{12} w = \partial_{12} u - \partial_2^2 u$$

$$\partial_{22} w = \partial_2^2 u$$

Dosadimo:

$$\partial_1^2 u - 2\cancel{\partial_{12} u} + \partial_2^2 u + 2(\cancel{\partial_{12} u} - \cancel{\partial_2^2 u}) + 2\cancel{\partial_{22} w} +$$

$$4(\partial_1 u - \cancel{\partial_2 u}) + 4(\cancel{\partial_2 u}) + u = \Delta u + 4\partial_1 u + u = 0$$

Za odstranitev $\partial_1 u$ vzemi $u(y_1, y_2) = v(y_1, y_2) e^{\alpha y_1}$

$$\rightarrow \partial_1 u = e^{\alpha y_1} \partial_1 v + \alpha e^{\alpha y_1} v$$

$$\partial_1^2 u = e^{\alpha y_1} \partial_1^2 v + 2\alpha e^{\alpha y_1} \partial_1 v + \alpha^2 e^{\alpha y_1} v$$

Po dosadi:

$$e^{\alpha y_1} \left(\Delta_y v + \partial_1 v (4 + 2\alpha) + v (1 + 4\alpha + \alpha^2) \right) = 0$$

Vzemi $\alpha = -2$ in krajšaj $e^{\alpha y_1}$: $\quad 1 - 8 + 4 = -3$

$$\underline{\Delta_y v = 3v}$$

$u_y - u_{xx} = 0$ v $(0,2\pi)\times(0,+\infty)$

$u(0,y) = u(2\pi,y)$, $u_x(0,y) = u_x(2\pi,y)$ $\forall y>0$

$u(x,0) = \cos^4 x$ $\quad x\in(0,2\pi)$

Přepíšeme:

$u_{xx} = -u_y$. Protože známe vl. č. a vektory u'' na $(0,2\pi)$ s per. okr. podm. projektujeme na vl. podprostory

Označ: $u_n^1(y) = \int_0^{2\pi} u(x,y)\cos nx\,dx \quad \forall n=\{0,\dots,+\infty\}$

$u_n^2(y) = \int_0^{2\pi} u(x,y)\sin nx\,dx \quad \forall n=\{1,\dots\}$

Víme: $\langle u_{xx}, \cos nx\rangle = -\langle u, (\cos nx)_{xx}\rangle = +n^2 u_n^1(y)$

$\langle u_{xx}, \sin nx\rangle = +n^2 u_n^2(y)$

Vidíme, že máme řešit: $(u_n^j)_y = -n^2 (u_n^j) \quad \forall j, n$

Tedy $u_n^j(y) = e^{-n^2 y}$

Obecný tvar řešení bez počáteční podmínky:

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2 y}\cos nx + B_n e^{-n^2 y}\sin nx = u(x,y)$$

Vidíme, že chceme: $u(x,0) = \cos^4 x = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx.$

Stačí tedy najít Fourierovu řadu $\cos^4 x$. Použijeme součtové vzorce.

$$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{\cos 2x + 1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos^2 2x}{4} =$$

$$\frac{1}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}(\cos 4x + 1)\right) = \frac{3}{8} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{8}\cos 4x$$

Kandidát

Tedy řešení je: $\frac{3}{8} + \frac{\cos 2x}{2}\cdot e^{-4y} + \frac{1}{2}\cos 4x\, e^{-16y} = u(x,y)$

Hned je vidět, že $u(x,y)$ skutečně je klasickým řešením!