Písemná část zkoušky z Úvodu do funkcionální analýzy (F)

Zimní semestr 2022/2023

Příklad 1 [celkem 16 bodů] Uvažme prostor funkcí

$$H = \left\{ f : (1,\infty) \to \mathbb{F} \text{ měřitelná: } \int_1^\infty \frac{|f(x)|^2}{x}\,\mathrm{d}x < \infty \right\}$$

opatřený normou

$$\|\boldsymbol{f}\| = \left(\int_1^\infty \frac{|f(x)|^2}{x}\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}, \quad f \in H,$$

přičemž ztotožňujeme funkce, které se rovnají skoro všude.
Dále pro $a \in \mathbb{R}$ označme $f_a(x) = \frac{1}{x^a}$, $x \in (1,\infty)$.

(a) (3 body) Ukažte, že H je Hilbertův prostor, a napište vzorec pro skalární součin.
(b) (2 body) Určete, pro která $a \in \mathbb{R}$ platí $f_a \in H$.
(c) (4 body) Najděte nějakou ortonormální bázi prostoru $Y = \operatorname{span}\{f_1, f_2\}$.
(d) (4 body) Najděte nejbližší bod v Y k prvku f_3.
(e) (3 body) Spočtěte vzdálenost $\operatorname{dist}(f_3, Y)$.

Příklad 2. [celkem 17 bodů] Nechť X je prostor posloupností

$$X = \left\{ \boldsymbol{x} = (x_n)_{n=1}^\infty : \sum_{n=1}^\infty \frac{|x_n|}{n} < \infty \right\} \quad \text{opatřený normou } \|\boldsymbol{x}\| = \sum_{n=1}^\infty \frac{|x_n|}{n},\ \boldsymbol{x} = (x_n) \in X.$$

Pro $\boldsymbol{x} \in X$ a $k \in \mathbb{N}$ položme

$$\varphi_k(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=k}^\infty \frac{x_n}{n^2} \quad \text{a} \quad \psi_k(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=k}^\infty \frac{x_n}{n}.$$

(a) (4 body) Pro každé $k \in \mathbb{N}$ ukažte, že φ_k je spojitý lineární funkcionál na X, spočtěte jeho normu a rozhodněte, zda své normy nabývá.
(b) (4 body) Pro každé $k \in \mathbb{N}$ ukažte, že ψ_k je spojitý lineární funkcionál na X, spočtěte jeho normu a rozhodněte, zda své normy nabývá.
(c) (3 body) Pro každé $k \in \mathbb{N}$ spočtěte normu funkcionálu $\varphi_k + \psi_k$ a rozhodněte, zda své normy nabývá.
(d) (6 bodů) Pro každé $k \in \mathbb{N}$ spočtěte normu funkcionálu $\varphi_k - \psi_k$ a rozhodněte, zda své normy nabývá.

Příklad 3. [celkem 17 bodů] Nechť $X = C([0,\pi])$. Pro $f \in X$ položme

$$T(f)(x) = 2f(x) + 3\int_0^\pi f(t)\cos t\,\mathrm{d}t + (f(\pi) - f(0))\cos x, \quad x \in [0, pi].$$

(a) (2 body) Ukažte, že $T \in L(X)$.
(b) (2 body) Je T kompaktní?
(c) (8 bodů) Určete $\sigma(T)$ a $\sigma_p(T)$. Pro každé vlastní číslo najděte nějaký vlastní vektor.
(d) (2 body) Vyjádřete duální operátor T' pomocí standardní reprezentace duálů.
(e) (3 body) Určete $\sigma(T')$ a $\sigma_p(T')$.

Poznámky:

(1) Rozdělení bodů mezi dílčí úlohy je orientační.
(2) V Příkladu 1(a) mj. ukažte, že H je izometrický prostoru $L^2((1,\infty))$.
(3) V Příkladu 1 pomůže, pokud spočítáte $\langle f_a, f_b \rangle$ v závislosti na $a, b \in \mathbb{R}$ a výsledek budete opakovaně využívat v dalších výpočtech.
(4) V Příkladu 3(d,e) pomůže znalost, že míra μ na $[0,\pi]$ má hustotu h vůči Lebesgueově míře (tj. $\mu(A) = \int_A h(t)\,dt$ pro A borelovskou), právě když $\int_{[0,\pi]} f\,\mathrm{d}\mu = \int_0^\pi f(t)h(t)\,\mathrm{d}t$ pro $f \in C([0,1])$.

Písemná část zkoušky z Úvodu do funkcionální analýzy (F)

Zimní semestr 2022/2023

(výsledky a orientační bodové hodnocení)

Příklad 1. (a) H je Hilbertův prostor, protože je izometrický prostoru $L^2((1,\infty))$, izometrie je například operátor daný vzorcem $T(f)(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x}}$ (2 body). Skalární součin je dán vzorcem $\langle f, g\rangle = \int_1^\infty \frac{f(x)\overline{g(x)}}{x}\,\mathrm{d}x$ (1 bod). (b) Platí $\int_1^\infty \frac{1}{x^a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a-1}$ pro $a>1$, jinak integrál diverguje (1 bod). Tedy $f_a \in H$, právě když $a>0$ a $\|f_a\| = \frac{1}{\sqrt{2a}}$ (1 bod). Dále dle nápovědy spočteme, že $\langle f_a, f_b\rangle = \frac{1}{a+b}$ pro $a,b>0$. (c) Jest $\|f_1\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, tedy první prvek ON báze bude $\boldsymbol{u}_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{x}$ (1 bod). Dále $\langle f_2, \boldsymbol{u}_1\rangle = \frac{\sqrt{2}}{3}$ (1 bod), položme $\boldsymbol{v}_2 = f_2 - \langle f_2, \boldsymbol{u}_1\rangle\, \boldsymbol{u}_1$, tedy $\boldsymbol{v}_2(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{3x}$ (1 bod). Jest $\|\boldsymbol{v}_2\| = \frac{1}{6}$ (1 bod), a tedy druhý prvek ON báze je $\boldsymbol{u}_2(x) = \frac{6}{x^2} - \frac{4}{x}$. (d) Nejbližší bod k f_3 je $g = \langle f_3, \boldsymbol{u}_1\rangle\, \boldsymbol{u}_1 + \langle f_3, \boldsymbol{u}_2\rangle\, \boldsymbol{u}_2$ (1 bod). Přitom $\langle f_3, \boldsymbol{u}_1\rangle = \frac{\sqrt{2}}{4}$ (1 bod) a $\langle f_3, \boldsymbol{u}_2\rangle = \frac{1}{5}$ (1 bod), tedy $g(x) = -\frac{3}{10x} + \frac{6}{5x^2}$ (1 bod). (e) Dle Pythagorovy věty platí $\operatorname{dist}(f_3, Y) = \|f_3 - g\| = \sqrt{\|\boldsymbol{f}_3\|^2 - \|g\|^2}$. Přitom $\|\boldsymbol{f}_3\|^2 = \frac{1}{6}$ (1 bod) a $\|g\|^2 = \frac{2}{16} + \frac{1}{25} = \frac{33}{1000}$ (dle Parsevalovy rovnosti) (1 bod), tedy vzdálenost vyjde $\sqrt{\frac{401}{500}}$ (1 bod).

Příklad 2. (a) Funkcionál φ_k je dobře definovaný, protože řada ve vzorci pro každé $\boldsymbol{x} \in X$ konverguje absolutně podle srovnávacího kritéria (1 bod). Dále, φ_k je zřejmě lineární (podle věty o aritmetice limit) a $|\varphi_k(\boldsymbol{x})| \le \frac{1}{k}\|\boldsymbol{x}\|$ pro $\boldsymbol{x} \in X$ (2 body). Proto je φ_k spojitý a $\|\varphi_k\| \le \frac{1}{k}$. Je to opravdu norma a nabývá se v bodě $k\boldsymbol{e}_k$ (1 bod). (b) Funkcionál ψ_k je dobře definovaný, protože řada ve vzorci pro každé $\boldsymbol{x} \in X$ konverguje absolutně podle definice prostoru X (1 bod). Dále, ψ_k je zřejmě lineární (podle věty o aritmetice limit) a $|\psi_k(\boldsymbol{x})| \le \|\boldsymbol{x}\|$ pro $\boldsymbol{x} \in X$ (2 body). Proto je ψ_k spojitý a $\|\psi_k\| \le 1$. Je to opravdu norma a nabývá se (například) v bodě $k\boldsymbol{e}_k$ (1 bod). (c) Z (a) a (b) plyne, že funkcionál $\varphi_k + \psi_k$ je spojitý a lineární a $\|\varphi_k + \psi_k| \le 1 + \frac{1}{k}$ (2 body) a také to, že je to opravdu norma a nabývá se v bodě $k\boldsymbol{e}_k$ (1 bod). (d) Z (a) a (b) plyne, že funkcionál $\varphi_k - \psi_k$ je spojitý a lineární; podobným výpočtem jako v (a) a (b) plyne, že $|\varphi_k(\boldsymbol{x}) - \psi_k(\boldsymbol{x})| \le \|\boldsymbol{x}\|$, tedy $\|\varphi_k - \psi_k\| \le 1$ (2 body). Je to opravdu norma: $\|m\boldsymbol{e}_m\| = 1$ pro každé m, přitom pro $m \ge k$ je $\varphi_k(m\boldsymbol{e}_m) - \psi_k(m\boldsymbol{e}_n) = \frac{1}{m} - 1 \to -1$. Proto $\|\varphi_k - \psi_k\| \ge 1$, neboli platí rovnost (2 body). Norma se přitom nenabývá: Protože $1 - \frac{1}{n} < 1$ pro každé n, k tomu, aby v nerovnosti $|\varphi_k(\boldsymbol{x}) - \psi_k(\boldsymbol{x})| \le \|\boldsymbol{x}\|$ nastávala rovnost, muselo by být $x_n = 0$ pro každé n, neboli $\boldsymbol{x} = 0$ (2 body).

Příklad 3. (a) T zobrazuje X do X, protože pro každé $f \in C([0,\pi])$ je Tf součtem tří spojitých funkcí ($2f$, konstantní funkce a násobku funkce kosinus) (1 bod). T je zřejmě lineární (mj. díky linearitě integrálu). Dále, $\|T(f)\| \le (2 + 3\int_0^\pi |\cos t|\,\mathrm{d}t + 2)\|f\| = 10\|f\|$. T je tedy spojitý a $\|T\| \le 10$ (1 bod). (b) Jest $T = 2I + K$, kde $K(f)(x) = 3\int_0^\pi f(t)\cos t\,\mathrm{d}t + (f(\pi) - f(0))\cos x$. Přitom $K \in F(X) \subset K(X)$ (1 bod). Proto T není kompaktní – jinak by $I = \frac{1}{2}(T - K)$ byl kompaktní operátor, což není (1 bod). (c) Spočteme vlastní čísla K řešením rovnice $Kf = \lambda f$: Pro $\lambda = 0$ dostáváme $f(\pi) = f(0)$ a $\int_0^\pi f(t)\cos t\,\mathrm{d}t = 0$ (1 bod). Vlastním vektorem je například funkce sin, proto 0 je vlastní číslo (1 bod). Pro $\lambda \ne 0$ musí být vlastní vektor nutně tvaru $f(x) = a + b\cos x$ pro nějaká $a, b \in \mathbb{C}$ (1 bod). V takovém případě je $\int_0^\pi f(t)\cos t\,\mathrm{d}t = b \cdot \frac{\pi}{2}$ (1 bod) a $f(\pi) - f(0) = -2b$ (1 bod). Tedy dostáváme soustavu $\frac{3}{2}b\pi = \lambda a$, $-2b = \lambda b$ (1 bod). Z druhé rovnice plyne, že $\lambda = -2$ nebo $b = 0$. První možnost dává vlastní vektor $f(x) = -\frac{3}{4}\pi + \cos x$ (1 bod), druhý případ ($b = 0$) vede k rovnici $\lambda a = 0$, tedy $a = 0$ (pak ovšem $f = 0$ a nejde o vlastní vektor) nebo $\lambda = 0$ (a to je ve sporu s předpokladem $\lambda \ne 0$). Tedy $\sigma_p(K) = \{0, -2\}$. Protože K je kompaktní, je rovněž $\sigma(K) = \{0, -2\}$. Tedy $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{2, 0\}$ (1 bod). (d) X^* je podle Rieszovy věty izometrický $M([0,\pi])$, prostoru měr na $[0,\pi]$. Jest $T'\mu = 2\mu + 3\mu([0,\pi]) \cdot \nu_0 + \left(\int_{[0,\pi]} \cos x\,\mathrm{d}\mu(x)\right) \cdot (\delta_\pi - \delta_0)$, kde ν_0 je míra s hustotou $\cos t$ vůči Lebsgueově míře, neboli $\nu_0(A) = \int_A \cos t\,\mathrm{d}t$ pro $A \subset [0,\pi]$ borelovskou (2 body). (e) $\sigma(T') = \sigma(T) = \{2, 0\}$ podle obecné věty (1 bod). Dále, $T' = 2I + K'$, $-2 \in \sigma_p(K')$, protože K' je kompaktní (1 bod). Dále $0 \in \sigma_p(K')$, vlastním vektorem je například míra $\delta_0 + \delta_\pi - 2\delta_{\frac{\pi}{2}}$ (1 bod). Tedy $\sigma_p(K') = \sigma(K')$, a proto i $\sigma(T') = \sigma_p(T') = \{2, 0\}$.