# Písemná část zkoušky z Úvodu do funkcionální analýzy (E)

Zimní semestr 2022/2023

---

**Příklad 1.** [celkem 16 bodů] Nechť $p \in [1, \infty)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Uvažme následující prostor posloupností:

$$X_{p,\alpha} = \left\{ \boldsymbol{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty} \colon \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |x_n|^p < \infty \right\}$$

opatřený normou

$$\|\boldsymbol{x}\|_{p,\alpha} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \boldsymbol{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in X_{p,\alpha}.$$

(a) (4 body) Najděte lineární izometrii $T : X_{p,\alpha} \xrightarrow{\text{na}} \ell^p$ a vyjádřete $T^{-1}$.

(b) (5 body) Reprezentujte duál $(X_{p,\alpha})^*$ jako prostor posloupností (s využitím izometrie $T$ a znalosti reprezentace $(\ell^p)^*$).

(c) (7 bodů) Určete, pro které hodnoty $p$ a $\alpha$ definuje vzorec

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \quad \boldsymbol{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in X_{p,\alpha}$$

spojitý lineární funkcionál na $X_{p,\alpha}$

**Příklad 2.** [celkem 16 bodů] Nechť $X = (L^1((0,3)), \|\cdot\|)$, kde

$$\|\boldsymbol{f}\| = \int_0^3 (3 - \lfloor x \rfloor)|f(x)|\,\mathrm{d}x, \quad f \in L^1((0,3)) \qquad (\lfloor \cdot \rfloor \text{ značí (dolní) celou část})$$

(a) (2 body) Ukažte, že $\|\cdot\|$ je norma ekvivalentní $\|\cdot\|_1$.

(b) (6 bodů) Ukažte, že $\varphi_1(f) = \int_0^3 f$, $f \in X$, je spojitý lineární funkcionál na $X$, spočtěte jeho normu a rozhodněte, zda své normy nabývá.

(c) (8 bodů) Ukažte, že $\varphi_2(f) = \int_0^3 (x-3)^2 f(x)\,\mathrm{d}x$, $f \in X$, je spojitý lineární funkcionál na $X$, spočtěte jeho normu a rozhodněte, zda své normy nabývá.

**Příklad 3.** [celkem 18 bodů] Nechť prostor $X = \ell^1 \times c_0$ je opatřený normou

$$\|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\| = \|\boldsymbol{x}\|_1 + \|\boldsymbol{y}\|_{\infty}, \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in X.$$

Dále pro $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^1$ a $\boldsymbol{y} = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$ položme

$$T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left( \left( -\frac{1}{n} x_n + \frac{2}{n^2} y_n \right)_{n=1}^{\infty}, \boldsymbol{x} \right).$$

(a) (2 body) Ukažte, že $T \in L(X)$.

(b) (2 body) Vyjádřete duální operátor $T'$ pomocí standardní reprezentace duálů. (To, že $X^*$ je kanonicky izometrické prostoru $\ell^{\infty} \times \ell^1$ s normou $\|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\| = \max\{\|\boldsymbol{x}\|_{\infty}, \|\boldsymbol{y}\|_1\}$, nemusíte dokazovat. Stačí tento fakt použít.)

(c) (2 body) Je $T$ kompaktní?

(d) (5 bodů) Určete $\sigma_p(T)$ a pro každé vlastní číslo najděte nějaký vlastní vektor.

(e) (6 bodů) Ukažte, že pro každé $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\sigma_p(T) \cup \{0\})$ je operátor $\lambda I - T$ na.

(f) (1 bod) Určete $\sigma(T)$.

---

**Poznámky:**

(1) Rozdělení bodů mezi dílčí úlohy je orientační.

(2) V Příkladu 1(b) lze použít následující postřeh: Je-li $f \in (X_{p,\alpha})^*$, pak $f \circ T^{-1} \in (\ell^p)^*$ a $f = (f \circ T^{-1}) \circ T$. Přitom repreztentaci $(\ell^p)^*$ známe.

(3) V Příkladu 1(c) je třeba použít reprezentaci z bodu (b).

(4) V Příkladu 3(e) vyřešte rovnici $(\lambda I - T)(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ (pro $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in X$) a ukažte, že řešení $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, které vyjde, opravdu patří do $X$.

# Písemná část zkoušky z Úvodu do funkcionální analýzy (E)

Zimní semestr 2022/2023

(výsledky a orientační bodové hodnocení)

---

**Příklad 1.** (a) Lze vzít operátor $T : X_{p,\alpha} \to \ell^p$ definované vzorcem $((x_n)) = (n^{\alpha/p}x_n)$ (1 bod). To je zřejmě lineární izometrie $X_{p,\alpha}$ do $\ell^p$ (1 bod). $T$ je na, inverzní operátor je $T^{-1}((y_n)) = (n^{-\alpha/p}y_n)$ (2 body). (b) Pokud $\varphi \in (X_{p,\alpha})^*$, pak $\varphi \circ T^{-1} \in (\ell^p)^*$, a tedy existuje $\boldsymbol{y} \in \ell^q$ (kde $q$ je duální exponent k $p$), že $(\varphi \circ T^{-1})(\boldsymbol{x}) = \sum x_n y_n$ pro $\boldsymbol{x} \in \ell^p$ (2 body). Protože $\varphi = (\varphi \circ T^{-1}) \circ T$, dostaneme $\varphi(\boldsymbol{x}) = \sum n^{\alpha/p}x_n y_n$ pro $\boldsymbol{x} \in X_{p,\alpha}$ (2 body). Navíc, každý funkcionál tohoto tvaru patří do $(X_{p,\alpha})^*$ (například proto, že $\psi \in (\ell^p)^* \Rightarrow \psi \circ T \in (X_{p,\alpha})^*$) (1 bod). (c) Vyjádříme $\varphi(\boldsymbol{x}) = \sum n^{\alpha/p}n^{-\alpha/p}x_n$, abychom mohli použít reprezentaci z bodu (b) (1 bod). Podle (b) pak vidíme, že $\varphi$ definuje spojitý lineární funkcionál na $X_{p,\alpha}$, právě když $(n^{-\alpha/p}) \in \ell^q$ (1 bod). Pro $p = 1$ je $q = \infty$, a tedy vyjde, že $\varphi$ definuje spojitý lineární funkcionál na $X_{1,\alpha}$, právě když $\alpha \geq 0$ (2 body). Pokud $p \in (1, \infty)$, pak $q = \frac{p}{p-1}$, tedy vyjde, že $\varphi$ definuje spojitý lineární funkcionál na $X_{p,\alpha}$, právě když $\alpha > p - 1$ (3 body).

**Příklad 2.** (a) Protože pro $x \in (0, 3)$ je $1 \leq 3 - \lfloor x \rfloor \leq 3$, dostáváme $\|f\|_1 \leq \|f\| \leq 3\|f\|_1$ (1 bod). $\|\cdot\|$ splňuje axiomy normy, což se ukáže stejně jako pro $\|\cdot\|_1$, je to tedy ekvivalentní norma (1 bod). (b) $\varphi_1$ je spojitý lineární funkcionál na $L^1(0, 3)$ (například to plyne ze známé reprezentace duálu), tedy i na $X$ (1 bod). Platí $|\varphi_1(f)| \leq \int_0^3 \frac{1}{3-\lfloor x \rfloor} \cdot (3 - \lfloor x \rfloor)|f(x)|\,dx \leq \|f\|$, tedy $\|\varphi_1\| \leq 1$ (3 body). Norma je opravdu 1 a nabývá se například v prvku $f = \chi_{(2,3)}$ (2 body). (c) $\varphi_2$ je opět spojitý lineární funkcionál na $X$ (analogicky jako v (b)). Dále platí $|\varphi_2(f)| \leq \int_0^3 \frac{(x-3)^2}{3-\lfloor x \rfloor} \cdot (3 - \lfloor x \rfloor)|f(x)|\,dx$ (2 body), tedy norma je odhadnuta (esenciálním) supremem funkce $\frac{(x-3)^2}{3-\lfloor x \rfloor}$ na $(0, 3)$. Tato funkce je klesající na každém z intervalů $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, suprema na těchto intervalech jsou po řadě $3, 2, 1$, a tedy $\|\varphi_2\| \leq 3$ (2 body). O tom, že $\|\varphi_2\| = 3$, svědčí například posloupnost $f_n = \frac{n}{3}\chi_{(0,\frac{1}{n})}$ (2 body). Norma se nenabývá, protože $\frac{(x-3)^2}{3-\lfloor x \rfloor} < 3$ na $(0, 3)$ (2 body).

**Příklad 3.** (a) Pokud $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in X$, pak $\boldsymbol{x} \in c_0$ a $\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{x}\|_1$ a $(-\frac{1}{n}x_2 + \frac{2}{n^2}y_n) \in \ell^1$ a $\|(-\frac{1}{n}x_2 + \frac{2}{n^2}y_n)\|_1 \leq \|x\|_1 + \frac{\pi^2}{3}\|y\|_\infty$, tedy $T$ zobrazuje $X$ do $X$ (1 bod). Navíc $T$ je zřejmě lineární a z uvedených odhadů plyne $\|T\| \leq 2 + \frac{\pi^2}{3}$, tedy $T \in L(X)$ (1 bod). (b) $T' \in L(\ell^\infty \times \ell^1)$, $T'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = ((-\frac{1}{n}x_n + y_n), (\frac{2}{n^2}x_n))$ (2 body). (c) $T$ není kompaktní, protože $(\boldsymbol{e}_n, 0)$ je omezená posloupnost, $T(\boldsymbol{e}_n, 0) = (-\frac{1}{n}\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_n)$ a pro $m \neq n$ je $\|(-\frac{1}{n}\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_n) - (-\frac{1}{m}\boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{e}_m)\| \geq 1$, a tedy nelze vybrat konvergentní podposloupnost (2 body). (d) Je-li $\lambda$ vlastní číslo a $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ vlastní vektor, musí pro každé $n$ platit $(-\lambda - \frac{1}{n})x_n + \frac{2}{n^2}y_n = 0$, $x_n - \lambda y_n = 0$ (1 bod). Protože vlastní vektor je nenulový, musí být aspoň pro jedno $n$ determinant soustavy nulový (1 bod), tedy $\lambda^2 + \frac{\lambda}{n} - \frac{2}{n^2} = 0$ (1 bod). Dostáváme takto vlastní čísla $-\frac{2}{n}$ a $\frac{1}{n}$, příslušné vlastní vektory jsou $(-\frac{2}{n}\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_n)$ resp. $(\frac{1}{n}\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_n)$ (1 bod). Celkově tedy $\sigma_p(T) = \{-\frac{2}{n}, \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$ (1 bod). (e) Pro $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\sigma_p(T) \cup \{0\})$ a $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in X$ řešíme soustavu $(\lambda + \frac{1}{n})x_n - \frac{2}{n^2}y_n = u_n$, $-x_n + \lambda y_n = v_m$ (1 bod). Spočteme $x_n = \frac{\lambda u_n + \frac{2}{n^2}v_n}{\lambda^2 + \frac{\lambda}{n} - \frac{2}{n^2}}$ (1 bod). Takto spočtená posloupnost $(x_n)$ patří do $\ell^1$ (protože $\lambda\boldsymbol{u} \in \ell^1, (\frac{2}{n^2}v_n) \in \ell^1$ a $\lambda^2 + \frac{\lambda}{n} - \frac{2}{n} \to \lambda^2 \neq 0$) (1 bod). Dále $y_n = \frac{1}{\lambda}(v_n + x_n)$, neboli $\boldsymbol{y} = \frac{1}{\lambda}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{x})$ (1 bod), což patří do $c_0$ (protože $\boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{x}$ patří do $c_0$ a $\lambda \neq 0$) (1 bod). Z těchto výpočtů plyne, že $\lambda I - T$ je na (1 bod). (f) Jest $\sigma(T) = \overline{\sigma_p(T)} \cup \{0\}$. Inkluze $\supset$ plyne z toho, že spektrum je uzavřené, obsahuje vlastní čísla a $0 \in \overline{\sigma_p(T)}$. Inkluze $\subset$ plyne z (e), protože pro $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\sigma_p(T) \cup \{0\})$ je operátor $\lambda I - T$ prostý (protože $\lambda$ není vlastní číslo) a na (díky (e)) (1 bod).