Písemná část zkoušky z Úvodu do funkcionální analýzy (D)

Zimní semestr 2022/2023

Příklad 1: [celkem 15 bodů] Nechť $H = L^2((0,\infty),\mu)$, kde $\mathrm{d}\mu = e^{-t}\,\mathrm{d}t$, tj. $\mu(A) = \int_A e^{-t}\,\mathrm{d}t$ pro $A \subset (0,\infty)$ borelovskou. Pro $n \in \mathbb{N}_0$ označme $f_n(t) = t^n$, $t \in (0,\infty)$.

(a) (7 bodů) Ukažte, že $f_n \in H$ pro každé n, a najděte nějakou ortonormální bázi prostoru $Y = \operatorname{span}\{f_0, f_1, f_2\}$.
(b) (2 body) Napište vzorec pro ortogonální projekci na Y.
(c) (3 body) Najděte nejbližší bod v prostoru Y k prvku f_3.
(d) (3 body) Spočtěte vzdálenost f_3 od Y.

Příklad 2: [celkem 17 bodů] Nechť $X = (\ell^1, \|\cdot\|)$, kde

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n}|x_n|, \quad \boldsymbol{x} = (x_n) \in \ell^1.$$

Pro $\boldsymbol{x} = (x_n) \in X$ položme

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n}, \qquad \psi(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \tfrac{1}{n})x_{2n-1}.$$

(a) (2 body) Ukažte, že $\|\cdot\|$ je norma ekvivalentní $\|\cdot\|_1$.
(b) (6 bodů) Ukažte, že φ a ψ jsou spojité lineární funkcionály na X, spočtěte jejich normy a rozhodněte, které z nich nabývají normy.
(c) (5 bodů) Spočtěte $\|\varphi + c\psi\|$ v závislosti na $c \in \mathbb{R}$.
(d) (4 body) Pro která $c \in \mathbb{R}$ funkcionál $\varphi + c\psi$ nabývá své normy?

Příklad 3: [celkem 18 bodů] Nechť $X = c_0(\mathbb{Z})$. Pro $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X$ položme

$$T(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{x_{n^+} + x_{-n}}{1 + |n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}} \qquad \text{(připomeňme, že } n^+ = \max\{n, 0\}).$$

(a) (3 body) Ukažte, že $T \in L(X)$.
(b) (2 body) Vyjádřete duální operátor T' pomocí standardní reprezentace duálů.
(c) (3 body) Je T kompaktní?
(d) (8 bodů) Určete $\sigma(T)$ a $\sigma_p(T)$. Pro každé vlastní číslo najděte nějaký vlastní vektor.
(e) (2 body) Určete $\sigma(T')$ a $\sigma_p(T')$.

Poznámky:

(1) Rozdělení bodů mezi dílčí úlohy je orientační.
(2) V Příkladu 1 použijte vzorec pro integraci podle míry s hustotou, takže platí $\int_A f\,\mathrm{d}\mu = \int_A f(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$.
(3) V Příkladu 1 pomůže, pokud nejprve spočítáte $\int_{(0,\infty)} t^n\,\mathrm{d}\mu(t)$ pro $n \in \mathbb{N}_0$ a výsledek budete opakovaně využívat v dalších výpočtech.
(4) V Příkladu 3(c) odhadněte normu $\|T - P_nT\|$, kde P_n je kanonická projekce na X, která vynuluje všechny souřadnice s indexem k pro $|k| > n$, tj. $P_n(\boldsymbol{x})(k) = \begin{cases} x_k & |k| \le n, \\ 0 & |k| > n. \end{cases}$

Písemná část zkoušky z Úvodu do funkcionální analýzy (D)

Zimní semestr 2022/2023

(výsledky a orientační bodové hodnocení)

Příklad 1. (a) Platí $\int_{(0,\infty)} t^n \, \mathrm{d}\mu(t) = \int_0^\infty t^n e^{-t} \, \mathrm{d}t = n!$ (dokáže se indukcí pomocí integrace per partes, je to zároveň známá věc z vlastností funkce Γ). Z toho plyne mj., že $f_n \in H$ pro každé n (1 bod). Protože $\|f_0\| = 1$, jako první prvek ON báze vezmeme $u_0 = f_0 = 1$ (1 bod). Dále postupujeme metodou ortogonalizace – spočteme $\langle f_1, u_0 \rangle = 1$, a tedy položíme $g_1(t) = t - 1$ (protože $g_1 = f_1 - \langle f_1, u_0 \rangle u_0$; 1 bod). Protože $\|g_1\| = 1$, je druhý prvek ON báze $u_1 = g_1$ (1 bod). Pro výpočet třetího prvku nejprve spočteme $g_2 = f_2 - \langle f_2, u_0 \rangle u_0 - \langle f_2, u_1 \rangle u_1$. Přitom $\langle f_2, u_0 \rangle = 2$ (1 bod), $\langle f_2, u_1 \rangle = 4$ (1 bod), tedy $g_2(t) = t^2 - 4t + 2$. Protože $\|g_2\| = 2$, poslední prvek ON báze je $u_2(t) = \frac{1}{2}(t^2 - 4t + 2)$ (1 bod). (b) Obecný vzorec pro ON projekci dává $Pf = \langle f, u_0 \rangle u_0 + \langle f, u_1 \rangle u_1 + \langle f, u_2 \rangle u_2$, tedy $Pf(x) = \int f \, \mathrm{d}\mu + \left(\int_{(0,\infty)} f(t)(t-1) \, \mathrm{d}\mu(t) \right) \cdot (x-1) + \frac{1}{4} \left(\int_{(0,\infty)} f(t)(t^2 - 4t + 2) \, \mathrm{d}\mu(t) \right) \cdot (x^2 - 4x + 2)$ (2 body). (c) Spočteme $P(f_3)$. Jest $\langle f_3, u_0 \rangle = 6$, $\langle f_3, u_1 \rangle = 18$ a $\langle f_3, u_2 \rangle = 18$ (2 body), odkud spočteme $Pf_3(t) = 9t^2 - 18t + 6$ (1 bod). (d) Jest $\|f_3\|^2 = 6! = 720$ (1 bod) a $\|Pf_3\|^2 = 6^2 + 18^2 + 18^2 = 36 \cdot 19$ (1 bod), proto $\operatorname{dist}(f_3, Y) = \|f_3 - Pf_3\| = \sqrt{\|f_3\|^2 - \|Pf_3\|^2} = 6$ (1 bod).

Příklad 2. (a) To, že $\|\cdot\|$ je norma, se dokáže stejně jako pro $\|\cdot\|_1$ (1 bod). Protože $\frac{1}{2}\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\| \leq 2\|\cdot\|_1$, jsou normy ekvivalentní (1 bod). (b) To, že funkcionály jsou dobře definované, plyne z toho, že pro $\boldsymbol{x} \in X$ řada $\sum_{n=1}^\infty |x_n|$ konverguje, tedy i řady v definici funkcionálů konvergují absolutně (1 bod). Linearita funkcionálů plyne z věty o aritmetice limit. Dále platí $|\varphi(\boldsymbol{x})| \leq \frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}\|$, tedy $\|\varphi\| \leq \frac{1}{2}$ (1 bod). Je to opravdu norma a nabývá se například v bodě $\frac{1}{2}\boldsymbol{e}^2$ (1 bod). Dále, $|\psi(\boldsymbol{x})| \leq 2\|\boldsymbol{x}\|$, tedy $\|\psi\| \leq 2$ (1 bod). Jest $\|2\boldsymbol{e}^{2n-1}\| = 1$ a $\psi(2\boldsymbol{e}^{2n-1}) \to 2$, tedy $\|\psi\| = 2$ (1 bod). Norma se nenabývá, protože k tomu, aby v nerovnosti $|\psi(\boldsymbol{x})| \leq 2\|\boldsymbol{x}\|$ nastávala rovnost, muselo by platit $x_{2n} = 0$ i $x_{2n-1} = 0$ pro každé n (1 bod). (c)+(d) Spočteme $|\varphi(\boldsymbol{x}) + c\psi(\boldsymbol{x})| \leq \max\{\frac{1}{2}, 2|c|\}\|\boldsymbol{x}\|$, tedy $\|\varphi + c\psi\| \leq \max\{\frac{1}{2}, 2|c|\}$ (2 body). Další řešení rozdělíme na dva případy: $|c| \leq \frac{1}{4}$ a $|c| > \frac{1}{4}$ (1 bod). Pokud $|c| \leq \frac{1}{4}$, pak $\frac{1}{2}\boldsymbol{e}^1$ má normu 1 a $(\varphi + c\psi)(\frac{1}{2}\boldsymbol{e}^1) = \frac{1}{2}$, tedy norma je $\frac{1}{2}$ (1 bod) a nabývá se (1 bod). Pokud $|c| > \frac{1}{4}$, pak $2\boldsymbol{e}^{2n-1}$ má normu 1 a $(\varphi + c\psi)(2\boldsymbol{e}^{2n-1}) \to 2c$, tedy $\|\varphi + c\psi\| = 2|c|$ (1 bod). Norma se v tomto případě nenabývá, což zjistíme analýzou toho, kdy nastává rovnost v nerovnosti $|\varphi(\boldsymbol{x}) + c\psi(\boldsymbol{x})| \leq 2|c|\|\boldsymbol{x}\|$ (3 body). Závěr tedy je, že $\|\varphi + c\psi\| = \max\{\frac{1}{2}, 2|c|\}$ a norma se nabývá, právě když $|c| \leq \frac{1}{4}$.

Příklad 3. (a) $T(\boldsymbol{x})(n) = \begin{cases} \frac{x_0+x_{-n}}{1+|n|} & n<0, \\ 2x_0 & n=0, \\ \frac{x_n+x_{-n}}{1+n} & n>0 \end{cases}$ (1 bod), proto T zobrazuje X do X (1 bod). Zároveň z toho plyne, že $\|T(\boldsymbol{x})\| \leq 2\|\boldsymbol{x}|$. Protože T je zřejmě lineární, je $T \in L(X)$ a $\|T\| \leq 2$ (1 bod). (b) $T' \in L(\ell^1(\mathbb{Z}))$ je dáno vzorcem $T'(\boldsymbol{y})(n) = \begin{cases} \frac{y_{-n}}{1+|n|} & n<0, \\ 2y_0 + \sum_{k<0} \frac{y_k}{1+|k|} & n=0, \\ \frac{y_{-n}+y_n}{1+n} & n>0 \end{cases}$ (2 body). (c) Pokud P_n vezmeme dle nápovědy, pak $P_nT \in F(X) \subset K(X)$ (1 bod), $\|T - P_nT\| \leq \frac{2}{1+n} \to 0$ (1 bod), tedy T je kompaktní (1 bod). (d) Hledejme vlastní čísla T. Napíšeme si rovnost $T\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ po souřadnicích (1 bod), z rovnosti $2x_0 = \lambda x_0$ plyne $\lambda = 2$ nebo $x_0 = 0$ (1 bod). Pro $\lambda = 2$ najdeme vlastní vektor ($x_0 = 1$, pro $n > 0$ je $x_{-n} = \frac{1}{2n+2-\frac{1}{2n+1}}$ a $x_n = \frac{1}{2n+1}x_{-n}$; 1 bod). Pro $\lambda \neq 2$ je $x_0 = 0$ a pro $n > 0$ dostaneme soustavu $\frac{x_n}{1+n} - \lambda x_{-n} = 0$, $x_n(\frac{1}{1+n} - \lambda) + \frac{x_{-n}}{1+n} = 0$ (1 bod). Aby λ bylo vlastní číslo, musí mít tato soustava aspoň pro jedno n netriviální řešení, což znamená $\det \begin{pmatrix} \frac{1}{1+n} & -\lambda \\ \frac{1}{1+n} - \lambda & \frac{1}{1+n} \end{pmatrix} = 0$ (1 bod). Kořeny jsou $\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ (1 bod). Příslušné vlastní vektory jsou $\boldsymbol{e}^{-n} + \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\boldsymbol{e}^n$ (1 bod). Tedy $\sigma_p(T) = \{2\} \cup \{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2(n+1)} : n \in \mathbb{N}\}$ a $\sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_p(T)$ (1 bod). (e) $\sigma(T') = \sigma(T)$ platí vždy. Díky kompaktnosti T' jsou všechny prvky $\sigma(T')$ až na 0 vlastní čísla (1 bod). Výpočtem zjistíme, že 0 není vlastní číslo T', a tedy $\sigma_p(T') = \sigma_p(T)$ (1 bod).