Písemná část zkoušky z Úvodu do funkcionální analýzy (C)

Zimní semestr 2022/2023

Příklad 1. [celkem 16 bodů] Nechť μ_1 a μ_2 jsou dvě míry na $(0,\infty)$ definované předpisem

$$\mu_1(A)=\int_A t^3\,\mathrm{d}t \quad \text{a} \quad \mu_2(A)=\int_A \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t, \quad A\subset(0,\infty) \text{ borelovská.}$$

Pro každý ze čtyř následujících vzorců rozhodněte, zda definují spojitý lineární funkcionál (v závislosti na $p\in[1,\infty]$; integrály ve vzorcích jsou podle Lebesgueovy míry). Pokud ano, určete jeho normu.

(a) (4,5 bodu) $\varphi_1(f)=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$, $f\in L^p(\mu_1)$;
(b) (4,5 bodu) $\varphi_2(f)=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$, $f\in L^p(\mu_2)$;
(c) (4 body) $\varphi_3(f)=\int_1^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$, $f\in L^p(\mu_1)$;
(d) (3 body) $\varphi_4(f)=\int_1^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$, $f\in L^p(\mu_2)$.

Příklad 2. [celkem 16 bodů] Nechť $H=\ell^2$ a $X=K(H)$, prostor kompaktních operátorů na H. Nechť $(\boldsymbol{e}^n)$ je kanonická ortonormální báze H.

(a) (3 body) Pro $u,v\in H$ definujme

$$T_{u,v}(x)=\langle x,u\rangle\, v, \quad x\in H.$$

Dokažte, že $T_{u,v}\in K(H)$ a spočtěte normu tohoto operátoru.

(b) (5 bodů) Nechť $u_1,\dots,u_n$ a $v_1,\dots,v_n$ jsou dva ortogonální systémy v H. Ukažte, že $T_{u_1,v_1}+\dots+T_{u_n,v_n}\in K(H)$ a spočtěte normu tohoto operátoru.

(c) (3 body) Definujme funkcionál

$$\varphi_1(T)=\left\langle T\boldsymbol{e}^1,\boldsymbol{e}^2\right\rangle+\left\langle T\boldsymbol{e}^2,\boldsymbol{e}^1\right\rangle, \quad T\in X.$$

Ukažte, že $\varphi_1\in X^*$, spočtěte jeho normu a rozhodněte, zda své normy nabývá.

(d) (5 bodů) Definujme funkcionál

$$\varphi_2(T)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left\langle T\boldsymbol{e}^n,\boldsymbol{e}^n\right\rangle, \quad T\in X.$$

Ukažte, že $\varphi_2\in X^*$, spočtěte jeho normu a rozhodněte, zda své normy nabývá.

Příklad 3. [celkem 18 bodů] Nechť $H=L^2((0,2\pi))$. Pro $f\in H$ položme

$$T(f)(x)=\left(\int_0^{2\pi} f(t)\cos t\,\mathrm{d}t\right)\cdot\sin x-2\left(\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t\right)\cdot\cos x+3f(x), \quad x\in(0,2\pi).$$

(a) (3 body) Ukažte, že $T\in L(H)$.
(b) (2 body) Vyjádřete T^* (hilbertovsky adjungovaný operátor).
(c) (2 body) Je T kompaktní?
(d) (8 bodů) Určete $\sigma(T)$ a $\sigma_p(T)$. Pro každé vlastní číslo najděte nějaký vlastní vektor.
(e) (3 body) Určete $\sigma(T^*)$ a $\sigma_p(T^*)$.

Poznámky:

(1) Rozdělení bodů mezi dílčí úlohy je orientační.
(2) V Příkladu 1 použijte větu o reprezentaci duálu k $L^p(\mu)$ pro σ-konečnou míru. Dále použite vzorec pro integraci podle míry s hustotou, takže například $\int_A f\,\mathrm{d}\mu_1=\int_A f(t)t^3\,\mathrm{d}t$ a podobně pro μ_2.
(3) V Příkladu 2(b) nejprve uvažte ortonormální systémy a použijte Parsevalovu rovnost a Besselovu nerovnost. Poté výpočet modifikujte pro ortogonální systémy.
(4) V Příkladu 2(c,d) pro zkoumání přesné hodnoty normy a jejího nabývání dosaďte do φ_1 a φ_2 vhodné operátory tvaru popsaného v (b).
(5) V Příkladu 2(d) pro vyšetření otázky nabývání normy použijte znalost, kdy nastává rovnost v Cauchy-Schwarzově nerovnosti.

Písemná část zkoušky z Úvodu do funkcionální analýzy (C)

Zimní semestr 2022/2023

(výsledky a orientační bodové hodnocení)

Příklad 1. (a) Jest $\varphi_1(f) = \int_{(0,1)} \frac{f(t)}{t^3}\,\mathrm{d}\mu_1(t)$. Tedy φ_1 je spojitý lineární funkcionál na $L^p(\mu_1)$, právě když funkce $t \mapsto \frac{1}{t^3}\chi_{(0,1)}(t)$ patří do $L^q(\mu_1)$ (kde q je sdružený exponent) (1 bod). Pro $p = 1$ je $q = \infty$, a tedy φ_1 není spojitý lineární funkcionál na $L^1(\mu_1)$ (protože funkce $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ není esenciálně omezená na $(0,1)$) (1 bod). Pro $p > 1$ dostaneme, že uvedená funkce patří do $L^q(\mu_1)$, právě když $q < \frac{4}{3}$, neboli $p > 4$ (1 bod). Pro $p \in (4,\infty)$ je norma funkcionálu $\left(\frac{p-1}{p-4}\right)^{\frac{p-1}{p}}$ (1 bod), pro $p = \infty$ norma vyjde 1 (0,5 bodu). (b) Jest $\varphi_2(f) = \int_{(0,1)} f(t)t^3\,\mathrm{d}\mu_2(t)$. Tedy φ_2 je spojitý lineární funkcionál na $L^p(\mu_2)$, právě když funkce $t \mapsto t^3\chi_{(0,1)}(t)$ patří do $L^q(\mu_2)$ (kde q je sdružený exponent) (1 bod). Pro $p = 1$ je $q = \infty$, a tedy φ_2 je spojitý lineární funkcionál na $L^1(\mu_2)$ a má normu 1 (protože funkce $t \mapsto t^3$ má na $(0,1)$ supremovou normu 1) (1 bod). Pro $p > 1$ dostaneme, že uvedená funkce patří do $L^q(\mu_2)$, právě když $q > \frac{2}{3}$, tedy pro každé p (1 bod). Pro $p \in (1,\infty)$ je norma funkcionálu $\left(\frac{p-1}{p+2}\right)^{\frac{p-1}{p}}$ (1 bod), pro $p = \infty$ norma vyjde 1 (0,5 bodu). (c) Jest $\varphi_3(f) = \int_{(1,\infty)} \frac{f(t)}{t^3}\,\mathrm{d}\mu_1(t)$. Tedy φ_3 je spojitý lineární funkcionál na $L^p(\mu_1)$, právě když funkce $t \mapsto \frac{1}{t^3}\chi_{(1,\infty)}(t)$ patří do $L^q(\mu_1)$ (kde q je sdružený exponent) (1 bod). Pro $p = 1$ je $q = \infty$, a tedy φ_1 je spojitý lineární funkcionál na $L^1(\mu_1)$ a má normu 1 (protože funkce $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ má na $(1,\infty)$ supremovou normu 1) (1 bod). Pro $p > 1$ dostaneme, že uvedená funkce patří do $L^q(\mu_1)$, právě když $q < \frac{4}{3}$, neboli $p < 4$ (1 bod). Pro $p \in (1,4)$ je norma funkcionálu $\left(\frac{p-1}{4-p}\right)^{\frac{p-1}{p}}$ (1 bod). (d) Jest $\varphi_4(f) = \int_{(1,\infty)} f(t)t^3\,\mathrm{d}\mu_2(t)$. Tedy φ_4 je spojitý lineární funkcionál na $L^p(\mu_2)$, právě když funkce $t \mapsto t^3\chi_{(1,\infty)}(t)$ patří do $L^q(\mu_2)$ (kde q je sdružený exponent) (1 bod). Pro $p = 1$ je $q = \infty$, a tedy φ_4 není spojitý lineární funkcionál na $L^1(\mu_2)$ (protože funkce $t \mapsto t^3$ není esenciálně omezená na $(1,\infty)$) (1 bod). Pro $p > 1$ dostaneme, že uvedená funkce patří do $L^q(\mu_2)$, právě když $q < \frac{2}{3}$, tedy pro žádné p (1 bod).

Příklad 2. (a) Zřejmě je $T_{u,v}$ lineární zobrazení H do H a $\dim R(T_{u,v}) \le 1$ (1 bod). Z Cauchy-Schwarzovy nerovnosti plyne $\|T_{u,v}\| \le \|u\|\cdot\|v\|$ (1 bod), tedy $T_{u,v} \in F(H) \subset K(H)$. Norma je rovna $\|u\|\cdot\|v\|$ – pro $u = 0$ je to jasné, pro $u \ne 0$ se nabývá v bodě $\frac{u}{\|u\|}$ (1 bod). (b) Operátor patří do $K(H)$, protože je to součet několika operátorů z bodu (a) a $K(H)$ je vektorový prostor (1 bod). Z Parsevalovy rovnosti a Besselovy nerovnosti plyne $\|T_{u_1,v_1}(x) + \cdots + T_{u_n,v_n}(x)\|^2 \le \|x\|^2 \cdot \max\limits_{1\le k\le n} \|u_k\|^2 \cdot \|v_k\|^2$, proto norma uvedeného operátoru je $\le \max\limits_{1\le k\le n} \|u_k\|\cdot\|v_k\|$ (3 body). Norma se dokonce rovná tomuto výrazu, o čemž se přesvědčíme dosazením $\frac{u_k}{\|u_k\|}$ pro nenulová u_k (1 bod). (Pokud jsou systémy ortonormální, je norma 1 a výpočty jsou jednodušší.) (c) φ_1 je zřejmě lineární funkcionál (díky vlastnostem skalárního součinu). Z Cauchy-Schwarzovy nerovnosti plyne $\|\varphi_1\| \le 2$ (1 bod). Uvážíme-li $T = T_{\boldsymbol{e}^1,\boldsymbol{e}^2} + T_{\boldsymbol{e}^2,\boldsymbol{e}^1}$, pak dle (b) je $\|T\| = 1$ (1 bod) a dosazením dostaneme $\varphi_1(T) = 2$. Proto $\|\varphi_1\| = 2$ a nabývá se (1 bod). (d) Z Cauchy-Schwarzovy nerovnosti plyne $\|\varphi_2(T)\| \le \|T\|$. Protože φ_2 je zřejmě lineární, je $\varphi_2 \in X^*$ a $\|\varphi_2\| \le 1$ (1 bod). Uvažme pro $n \in \mathbb{N}$ operátor $T_n = T_{\boldsymbol{e}^1,\boldsymbol{e}^1} + \cdots + T_{\boldsymbol{e}^n,\boldsymbol{e}^n}$. Pak $T_n \in X$ a $\|T_n\| = 1$ (dle (b), 1 bod) a $\varphi_2(T_n) \to 1$, tedy $\|\varphi_2\| = 1$ (1 bod). Norma se nenabývá. Pokud by se v nějakém T nabývala, pak z analýzy výpočtu s použitím znalosti, kdy nastává rovnost v Cauchy-Schwarzově nerovnosti by muselo pro každé n platit $T(\boldsymbol{e}^n) = \alpha_n \boldsymbol{e}^n$, kde α_n je komplexní jednotka. Takové T ovšem nemůže být kompaktní (2 body).

Příklad 3. (a) T lze vyjádřit jako $Tf(x) = \varphi_1(f) \cdot \sin x - 2\varphi_2(f) \cdot \cos x + 3f(x)$, kde $\varphi_1(f) = \int_0^{2\pi} f(t) \cos t \,\mathrm{d}t$ a $\varphi_2(f) = \int_0^{2\pi} f(t) \sin t \,\mathrm{d}t$. Funkce sin a cos patří do H a obě mají normu $\sqrt{\pi}$ (1 bod), proto φ_1 i φ_2 jsou spojité lineární funkcionály a mají normu $\sqrt{\pi}$ (1 bod). Zároveň z toho plyne, že T zobrazuje H do H a patí $\|Tf\| \le (4\pi + 3)\|f\|$. Protože T je zřejmě lineární, dostáváme $T \in L(H)$ a $\|T\| \le 4\pi + 3$ (1 bod). (b) Z definice adjungovaného operátoru pomocí Fubiniovy věty dostaneme $T^* f(x) = \left(\int_0^{2\pi} f(t) \sin t \,\mathrm{d}t\right) \cdot \cos x - 2\left(\int_0^{2\pi} f(t) \cos t \,\mathrm{d}t\right) \cdot \sin x + 3f(x)$ (2 body). (b) Platí $T = K + 3I$, kde $K(f)(x) = \left(\int_0^{2\pi} f(t) \cos t \,\mathrm{d}t\right) \cdot \sin x - 2\left(\int_0^{2\pi} f(t) \sin t \,\mathrm{d}t\right) \cdot \cos x$ (1 bod). Přitom $K \in F(H) \subset K(H)$, tedy T není kompaktní (jinak by $I = \frac{1}{3}(T - K)$ byla kompaktní) (1 bod). (d) Nejprve spočteme $\sigma_p(K)$. 0 je vlastní číslo, vlastní vektory jsou všechny nenulové funkce z $\{\sin, \cos\}^\perp$, například $f = 1$ (1 bod). Vlastní vektory příslušné k nenulovému λ musí být tvaru $f(x) = a \cos x + b \sin x$ (1 bod). Po dosazení dostaneme rovnici $a\pi \sin x - 2b\pi \cos x = \lambda a \cos x + b \sin x$ (2 body), neboli soustavu $a\pi = \lambda b$, $-2b\pi = \lambda a$ (1 bod). Odsud dostaneme $\lambda = \pm i\pi\sqrt{2}$ (1 bod), příslušné vlastní vektory jsou $f(x) = \sin x \pm i\sqrt{2} \cos x$ (1 bod). Protože K je kompaktní, dostáváme $\sigma(K) = \sigma_p(K) = \{0, i\pi\sqrt{2}, -i\pi\sqrt{2}\}$. Tedy $\sigma(T) = \sigma_p(T) = 3 + \sigma(T) = \{3, 3 + i\pi\sqrt{2}, 3 - i\pi\sqrt{2}\}$ (1 bod). (e) Vždy platí $\sigma(T^*) = \{\overline{\lambda} \colon \lambda \in \sigma(T)\}$, což v našem případě dá $\sigma(T^*) = \sigma(T)$ (1 bod). Protože $T^* = 3K^* + I$ a K^* je kompaktní, je $\pm i\pi\sqrt{2} \in \sigma_p(K^*)$, tedy $3 \pm i\pi\sqrt{2} \in \sigma_p(T^*)$ (1 bod). Dále, $K^* f(x) = \left(\int_0^{2\pi} f(t) \sin t \,\mathrm{d}t\right) \cdot \cos x - 2\left(\int_0^{2\pi} f(t) \cos t \,\mathrm{d}t\right) \cdot \sin x$, tedy 0 je také vlastním číslem K^* (vlastní vektory jsou v tomto případě stejné jako pro K). Tedy $\sigma_p(T^*) = \sigma(T^*) = \sigma(T)$ (1 bod).