Písemná část zkoušky z Úvodu do funkcionální analýzy (B)

Zimní semestr 2022/2023

Příklad 1. [celkem 15 bodů] Nechť $X = L^4((0,1))$ a $Y = L^4((0,1)) \times L^{3/2}((0,1))$, přičemž norma na Y je definována vzorcem $\|(f,g)\| = \|f\|_4 + \|g\|_{3/2}$. Pro $\alpha \in (0, \frac{8}{3})$ a $f \in X$ definujme

$$T_\alpha(f) = (t \mapsto f(\sqrt{t}), t \mapsto f(t^\alpha)).$$

(a) (6 bodů) Ukažte, že $T_\alpha \in L(X,Y)$.
(b) (4 body) Je T_α izomorfismus?
(c) (3 body) Existuje nekonečněrozměrný podprostor $Z \subset X$, pro který je $T|_Z$ izomorfismus?
(d) (2 body) Je T kompaktní?

Příklad 2. [celkem 17 bodů] Nechť $X = L^1((1,\infty)) \times L^\infty((1,\infty))$ s normou

$$\|(f,g)\| = \max\{\|f\|_1, \|g\|_\infty\}.$$

Dále nechť $Y = \{(f,g) \in X; f = g \text{ skoro všude}\}$. Pro $(f,g) \in X$ položme

$$\varphi_1(f,g) = \int_1^\infty \frac{f(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t \quad \text{a} \quad \varphi_2(f,g) = \int_1^\infty \frac{g(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t.$$

(a) (6 bodů) Ukažte, že φ_1 a φ_2 jsou spojité lineární funkcionály na X, spočtěte jejich normy a rozhodněte, zda své normy nabývají.
(b) (3 body) Spočtěte normu funkcionálů $\varphi_1 + \varphi_2$ a $\varphi_1 - \varphi_2$ a rozhodněte, zda své normy nabývají.
(c) (7 bodů) Spočtěte normu funkcionálů $\varphi_1|_Y$ a $\varphi_2|_Y$ a rozhodněte, zda své normy nabývají.
(d) (1 bod) Spočtěte normu funkcionálů $(\varphi_1 + \varphi_2)|_Y$ a $(\varphi_1 - \varphi_2)|_Y$ a rozhodněte, zda své normy nabývají.

Příklad 3. [celkem 18 bodů] Nechť $X = \ell^3$. Pro $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n=1}^\infty \in X$ položme

$$T(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n^2} + \frac{x_n}{3}\right)_{n=1}^\infty.$$

(a) (2 body) Ukažte, že $T \in L(X)$.
(b) (2 body) Vyjádřete duální operátor T' pomocí standardní reprezentace duálů.
(c) (2 body) Je T kompaktní?
(d) (8 bodů) Určete $\sigma(T)$ a $\sigma_p(T)$. Pro každé vlastní číslo najděte nějaký vlastní vektor.
(e) (4 body) Určete $\sigma(T')$ a $\sigma_p(T')$.

Poznámky:

(1) Rozdělení bodů mezi dílčí úlohy je orientační.
(2) V Příkladu 2(c) pomocí vyjádření $\frac{1}{t^3} = \min\{\frac{1}{t^3}, c^3\} + (\frac{1}{t^3} - c^3)\chi_{(1,\frac{1}{c})}$ pro $c \in (0,1)$ vyjádřete $\varphi_1|_Y$ jako součet dvou funkcionálů (v závislosti na c). Pro každé c spočtěte příslušný odhad normy a najděte takové c, pro které je odhad nejlepší.

Písemná část zkoušky z Úvodu do funkcionální analýzy (B)

Zimní semestr 2022/2023

(výsledky a orientační bodové hodnocení)

Příklad 1. (a) S použitím věty o substituci ($t = s^2$) se ukáže, že $\int_0^1 |f(\sqrt{t})|^4 \,\mathrm{d}t \le 2\|f\|_4^4$ (1 bod). Dále, pomocí věty o substituci ($t = s^{1/\alpha}$) a následně Hölderovy nerovnosti (pro dvojici exponentů $\frac{8}{3}$ a $\frac{8}{5}$) se ukáže, že $\int_0^1 |f(t^\alpha)| \,\mathrm{d}t \le \frac{1}{\alpha}\left(\frac{5\alpha}{8-3\alpha}\right)^{5/8}\left(\int_0^1 |f|^4\right)^{3/8}$ (4 body). Z toho plyne, že T zobrazuje X do Y. Protože T je zřejmě lineární, dostaneme i $\|T\| \le \sqrt[4]{2} + \frac{1}{\alpha^{2/3}}\left(\frac{5\alpha}{8-3\alpha}\right)^{5/12}$, tedy $T \in L(X,Y)$ (1 bod). (b) T není izomorfismus. Svědčí o tom například funkce $f_c = \frac{1}{\sqrt[4]{c}}\chi_{(0,c)}$ pro $c \in (0,1)$ (1 bod), protože $\|f_c\|_4 = 1$ a $\|T(f_c)\| = \sqrt[4]{c} + c^{\frac{2}{3}(\frac{1}{\alpha}-\frac{3}{8})} \to 0$ pro $c \to 0+$ (3 body). (c) Například lze vzít $Z = \{f \in X; f|_{(0,\frac{1}{2})} = 0\}$ (1 bod). Pro $f \in Z$ totiž platí $\|Tf\| \ge \|f\|_4$ (1 bod), proto je $T|_Z$ izomorfismus (1 bod). (d) T není kompaktní díky výsledku (c) (2 body).

Příklad 2. (a) $\|\varphi_1\| = 1$, nenabývá se: Nerovnost $\|\varphi_1\| \le 1$ plyne z nerovnosti $|\varphi(f,g)| \le \|f\|_1$ (1 bod). O tom, že $\|\varphi_1\| = 1$ svědčí například posloupnost $(n\chi_{(1,1+\frac{1}{n})}, 0)$ (2 body). Norma se nenabývá, je totiž snadno vidět, že v použitých odhadech nemůže nastat rovnost (mj. proto, že $\frac{1}{t^3} < 1$ na $(1,\infty)$) (1 bod). Dále, $\|\varphi_2\| = \frac{1}{2}$ a nabývá se například v prvku $(0,1)$. (2 body). (b) S použitím výsledků (a) vidíme, že $\|\varphi_1 \pm \varphi_2\| \le \frac{3}{2}$ (1 bod), platí dokonce rovnost, o čemž svědčí například posloupnost $(n\chi_{(1,1+\frac{1}{n})}, \pm 1)$ (1 bod). Norma se nenabývá, protože jinak by musel i funkcionál φ_1 nabývat normy (1 bod). (c) Jest $\varphi_1|_Y = \varphi_2|_Y$, pro oba funkcionály jsou tedy výpočty i výsledky stejné. Pokud $c \in (0,1)$, pak de nápovědy vyjádříme $\varphi_1(f,f) = \int_1^{1/c} f(t)(\frac{1}{t^3} - c^3)\,\mathrm{d}t + \int_1^\infty \min\{\frac{1}{t^3}, c^3\} f(t)\,\mathrm{d}t$, z čehož odvodíme $\|\varphi_1|_Y\| \le \frac{1}{2} + 2c^3 - \frac{3}{2}c^2$ (3 body). Funkce vpravo má minimum v bodě $c = \frac{1}{2}$, toto minimu je $\frac{3}{8}$. Proto $\|\varphi_1|_Y \le \frac{3}{8}$ (2 body). Tato norma se nabývá v bodě $(\chi_{(1,2)}, \chi_{(1,2)})$, na což lze přijít analýzou provedeného výpočtu (2 body). (d) Jest $(\varphi_1 - \varphi_2)|_Y = 0$, norma je tedy 0 a nabývá se. Dále $(\varphi_1 + \varphi_2)|_Y = 2\varphi_1|_Y$, tedy z (c) plyne, že norma tohoto funkcionálu je $\frac{3}{4}$ a nabývá se v bodě $(\chi_{(1,2)}, \chi_{(1,2)})$. (1 bod)

Příklad 3. (a) Snadno spočteme, že $\|T(\boldsymbol{x})\|_3 \le \|x\|_3 \left(\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3}\right)^{1/3} + \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^6}\right)^{1/3} + \frac{1}{3}\right)$ (1 bod). Z toho plyne, že T zobrazuje X do X a dále, protože je zřejmě lineární, $T \in L(X)$ a $\|T\| \le \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3}\right)^{1/3} + \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^6}\right)^{1/3} + \frac{1}{3}$ (1 bod).
(b) $T' \in L(\ell^{3/2})$, $T'(\boldsymbol{y}) = \left(\frac{y_1}{3} + \sum_{k=1}^\infty \frac{y_k}{k}, \frac{y_3}{3} + \sum_{k=1}^\infty \frac{y_k}{k^2}, \frac{y_3}{3}, \frac{y_4}{3}, \dots\right)$ (2 body). (c) Platí $T = \frac{1}{3}I + K$, kde $K(\boldsymbol{x}) = x_1 \cdot (\frac{1}{n}) + x_2 \cdot (\frac{1}{n^2})$. K je konečnědimenzionální operátor, tedy kompaktní. Proto T není kompaktní (jinak by $I = 3(T-K)$ musela být kompaktní). (2 body) (d) Nejprve najdeme vlastní čísla K. 0 je vlastní číslo, vlastním vektorem je každá posloupnost (x_n) splňující $x_1 = x_2 = 0$. (1 bod) Je-li $\lambda \ne 0$, pak vlastní vektor musí být lineární kombinací posloupností $(\frac{1}{n})$ a $(\frac{1}{n^2})$ (1 bod), což vede na soustavu $(1-\lambda)a + b = 0$, $\frac{1}{2}a + (\frac{1}{4} - \lambda)b = 0$ (1 bod). Ta musí mít netriviální řešení, tedy $\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4}-\lambda \end{pmatrix} = 0$ (1 bod), což dává vlastní čísla $\frac{5\pm\sqrt{41}}{3}$ (1 bod). Jim příslušné vlastní vektory jsou $(\frac{1}{n} + \frac{-3+\sqrt{41}}{8}\frac{1}{n^2})$ a $(\frac{1}{n} - \frac{3+\sqrt{41}}{8}\frac{1}{n^2})$ (2 body). Proto $\sigma_p(K) = \{0, \frac{5+\sqrt{41}}{3}, \frac{5-\sqrt{41}}{3}\}$. Protože K je kompaktní, je $\sigma(K) = \sigma_p(K) \cup \{0\} = \sigma_p(K)$. Nakonec dostaneme $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \frac{1}{3} + \sigma(K) = \{\frac{1}{3}, \frac{23}{24} + \frac{\sqrt{41}}{8}, \frac{23}{24} - \frac{\sqrt{41}}{8}\}$ (1 bod). (e) Z obecné věty plyne $\sigma(T') = \sigma(T)$ (1 bod). Platí $T' = \frac{1}{3}I + K'$ a K' je kompaktní, proto $\frac{5\pm\sqrt{41}}{8} \in \sigma_p(K')$ (1 bod). Dále, $K'(\boldsymbol{y}) = \left(\sum_{k=1}^\infty \frac{y_k}{k}, \sum_{k=1}^\infty \frac{y_k}{k^2}, 0, 0, \dots\right)$, což není prostý operátor, například $(\frac{1}{9}, -\frac{8}{9}, 1, 0, 0, \dots) \in \ker K'$ (1 bod). Proto $0 \in \sigma_p(K')$, a tedy $\sigma_p(K') = \sigma_p(K)$. Z toho plyne $\sigma_p(T') = \sigma(T') = \sigma(T)$ (1 bod).