Písemná část zkoušky z Úvodu do funkcionální analýzy (A)

Zimní semestr 2022/2023

Příklad 1: [celkem 18 bodů] Nechť

$$X_1 = \left\{ \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} ; f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22} \in L^1((-\pi,\pi)) \right\},$$

$$X_2 = \left\{ \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} ; f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22} \in L^2((-\pi,\pi)) \right\}.$$

Pro $\boldsymbol{f} \in X_1$ položme

$$\tau(\boldsymbol{f}) = \int_{-\pi}^{\pi} (f_{11} + f_{22}).$$

(a) (1 bod) Ukažte, že pro $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \in X_2$ platí $\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g} \in X_1$ (kde $\cdot$ označuje běžné maticové násobení).

(b) (3 body) Pro $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \in X_2$ položme $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle = \tau(\boldsymbol{g}^* \cdot \boldsymbol{f})$ (kde $\cdot$ označuje maticové násobení a $\boldsymbol{g}^*$ je adjungovaná matice ke $\boldsymbol{g}$). Ukažte, že $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je skalární součin na X_2 a X_2 je pak Hilbertův prostor.

(c) (6 bodů) Najděte nějakou ortonormální bázi prostoru

$$Y = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} \sin & \sin \\ 0 & \sin \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos & \sin \\ 0 & \sin \end{pmatrix} \right\}.$$

(d) (2 body) Napište vzorec pro ortogonální projekci na Y.

(e) (6 bodů) Spočtěte vzdálenost $\begin{pmatrix} \cos & \cos \\ 0 & \sin \end{pmatrix}$ od Y a najděte k tomuto prvku nejbližší bod v Y.

Příklad 2: [celkem 17 bodů] Nechť $X = (C([0,1]), \|\cdot\|)$, kde

$$\|f\| = \sup_{t\in[0,1]} (1+t)|f(t)|, \quad f \in C([0,1]).$$

Pro $f \in X$ položme

$$\varphi_1(f) = \int_0^1 f \quad \text{a} \quad \varphi_2(f) = f(0) - f(1).$$

(a) (2 body) Ukažte, že $\|\cdot\|$ je norma ekvivalentní $\|\cdot\|_\infty$.

(b) (5 bodů) Ukažte, že φ_1, φ_2 jsou spojité lineární funkcionály na X, spočtěte jejich normy a rozhodněte, které z nich nabývají normy.

(c) (6 bodů) Spočtěte $\|\varphi_1 + c\varphi_2\|$ v závislosti na $c \in \mathbb{R}$.

(d) (4 body) Pro která $c \in \mathbb{R}$ funkcionál $\varphi_1 + c\varphi_2$ nabývá své normy?

Příklad 3 [celkem 15 bodů] Nechť $X = L^1((1,\infty)) \times L^2((1,\infty))$ s normou $\|(f,g)\| = \|f\|_1 + \|g\|_2$. Pro $(f,g) \in X$ položme

$$T(f,g) = (t \mapsto \frac{g(t)}{t} - f(t), 0).$$

(a) (2 body) Ukažte, že $T \in L(X)$.

(b) (2 body) Vyjádřete duální operátor T' pomocí standardní reprezentace duálů. (To, že X^* je kanonicky izometrické prostoru $L^\infty((1,\infty)) \times L^2((1,\infty))$ s normou $\|(f,g)\| = \max\{\|f\|_\infty, \|g\|_2\}$ nemusíte dokazovat. Stačí tuto identifikaci použít.)

(c) (5 bodů) Určete $\sigma(T)$ a $\sigma_p(T)$. Pro každé vlastní číslo najděte nějaký vlastní vektor.

(d) (3 body) Určete $\sigma(T')$ a $\sigma_p(T')$. Pro každé vlastní číslo najděte nějaký vlastní vektor.

(e) (2 body) Existuje nějaký nekonečněrozměrný podprostor $Y \subset X$, na němž je T izomorfismus (nebo dokonce izometrie)?

(f) (1 bod) Je T kompaktní?

Poznámky:

(1) Rozdělení bodů mezi dílčí úlohy je orientační.

(2) V Příkladu 1 spočtěte vzorec pro $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle$. Ten lze využít v úloze (b) i v dalších výpočtech.

Písemná část zkoušky z Úvodu do funkcionální analýzy (A)

Zimní semestr 2022/2023

(výsledky a orientační bodové hodnocení)

Příklad 1 (a) Tvrzení plyne z definice maticového násobení a Hölderovy nerovnosti, která implikuje, že součin dvou funkcí z L^2 patří do L^1. (1 bod). (b) Lze snadno spočítat, že $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} (f_{11}\overline{g_{11}} + f_{12}\overline{g_{12}} + f_{21}\overline{g_{21}} + f_{22}\overline{g_{22}})$ (1 bod), z čehož se snadno ověří axiomy skalárního součinu (1 bod). Úplnost plyne z úplnosti L^2, protože X_2 je izomorfní $(L^2((-\pi,\pi)))^4$. (c) ON bázi tvoří například prvky $\frac{1}{\sqrt{3\pi}} \begin{pmatrix} \sin & \sin \\ 0 & \sin \end{pmatrix}$ a $\sqrt{\frac{3}{5\pi}} \begin{pmatrix} \cos - \frac{2}{3}\sin & \frac{1}{3}\sin \\ 0 & \frac{1}{3}\sin \end{pmatrix}$. Spočte se metodou ortogonalizace: Označíme-li dva prvky ze zadání $\boldsymbol{f}_1$ a $\boldsymbol{f}_2$, pak $\|\boldsymbol{f}_1\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_1 \rangle} = \sqrt{3\pi}$ (1 bod), a tedy první prvek ON báze bude $\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3\pi}} \boldsymbol{f}_1$ (1 bod). Dále spočteme $\boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{f}_2 - \langle \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{u}_1 \rangle \boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} \cos - \frac{2}{3}\sin & \frac{1}{3}\sin \\ 0 & \frac{1}{3}\sin \end{pmatrix}$ (2 body) a $\boldsymbol{u}_2 = \frac{\boldsymbol{g}_2}{\|\boldsymbol{g}_2\|}$, což dá výše uvedený druhý prvek ON báze (2 body). (d) Dosadíme do obecného vzorce pro OG projekci a dostaneme $P(\boldsymbol{f}) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_1 \rangle \boldsymbol{u}_1 + \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_2 \rangle \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{3\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} (f_{11} + f_{12} + f_{22}) \sin \cdot \begin{pmatrix} \sin & \sin \\ 0 & \sin \end{pmatrix} + \frac{3}{5\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f_{11} - \frac{2}{3}\sin) + \frac{1}{3}(f_{12} + f_{22}) \sin) \cdot \begin{pmatrix} \cos - \frac{2}{3}\sin & \frac{1}{3}\sin \\ 0 & \frac{1}{3}\sin \end{pmatrix}$ (2 body). (e) Nejbližší bod je $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} \sin & \sin \\ 0 & \sin \end{pmatrix} + \frac{4}{5} \begin{pmatrix} \cos - \frac{2}{3}\sin & \frac{1}{3}\sin \\ 0 & \frac{1}{3}\sin \end{pmatrix}$, vzdálenost je $\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$. Označíme-li $\boldsymbol{g}$ prvek ze zadání, spočteme $\langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{u}_1 \rangle = \sqrt{\frac{\pi}{3}}$ a $\langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{u}_2 \rangle = \frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt{15}}$ (2 body). Odtud spočteme nejbližší bod jako $P(\boldsymbol{g})$ (1 bod). Vzdálenost je pak rovna $\|\boldsymbol{g} - P(\boldsymbol{g})\| = \sqrt{\|g\|^2 - \|P(\boldsymbol{g})\|^2}$. Přitom $\|g\| = \sqrt{3\pi}$ (1 bod) a $\|P(\boldsymbol{g})\| = \sqrt{\frac{7\pi}{3}}$ (dle Parsevalovy rovnosti) (1 bod), z čehož dostaneme výsledek (1 bod).

Příklad 2. (a) To, že je $\|\cdot\|$ norma, se dokáže stejně jako pro $\|\cdot\|_\infty$. Protože $1 \le 1+t \le 2$, vyjde $\|\cdot\|_\infty \le \|\cdot\| \le 2\|\cdot\|_\infty$, z čehož plyne ekvivalence norem. (2 body). (b) To, že φ_1 je lineární funkcionál, plyne z toho, že spojitá funkce na uzavřeném intervalu má integrál a z linearity integrálu. Pro φ_2 to je zřejmé. (1 bod). Spočteme, že $|\varphi_1(f)| \le \log 2 \cdot \|f\|_\infty$, tedy $\|\varphi_1\| \le \log 2$ (1 bod). To, že to je opravdu hodnota normy a že se norma nabývá plyne z dosazení funkce $f(t) = \frac{1}{1+t}$ (1 bod). Dále spočteme, že $|\varphi_2(f)| \le \frac{3}{2} \cdot \|f\|_\infty$, tedy $\|\varphi_2\| \le \frac{3}{2}$ (1 bod). To, že to je opravdu hodnota normy a že se norma nabývá plyne (například) z dosazení funkce $f(t) = \frac{1-2t}{1+t}$ (1 bod). (c) S využitím výpočtů v úloze (b) snadno spočteme, že $|\varphi_1(f) + c\varphi_2(f)| \le (\log 2 + \frac{3}{2}|c|)\|f\|_\infty$, tedy $\|\varphi_1 + c\varphi_2\| \le \log 2 + \frac{3}{2}|c|$ (2 body). Případ $c = 0$ je pokrytý úlohou (b). To, že i pro $c \ne 0$ jde opravdu o hodnotu normy, zjistíme dosazením funkcí $f_n(t) = \frac{g_n(t)}{1+t}$, kde pro $c > 0$ volíme $g_n(t) = 1$ na $[0, 1 - \frac{1}{n}]$, $g_n(1) = -1$ a doplníme lineárně; pro $c < 0$ volíme $g_n(0) = 1$, $g_n(t) = -1$ na $[\frac{1}{n}, 1]$ a doplníme lineárně (4 body). (d) Pro $c \ne 0$ se norma nenabývá. Analýzou výpočtů z (c) totiž zjistíme, že by muselo platit zároveň, že f nemění znaménko, $|f(t)| = \frac{1}{1+t}$ na $[0,1]$ a $f(0) = -f(1)$, což nelze splnit. (4 body)

Příklad 3. (a) T zobrazuje X do X, protože pro $g \in L^2(1,\infty)$ platí, že $t \mapsto \frac{g(t)}{t}$ patří do $L^1(1,\infty)$ (díky Hölderově nerovnosti, 1 bod). Dále s použitím Hölderovy nerovnosti dostaneme $\|T(f,g)\| \le \|f\|_1 + \|g\|_2$. Protože T je zřejmě lineární, plyne z toho $T \in L(X)$ a $\|T\| \le 1$. (b) $T' : L^\infty(1,\infty) \times L^2(1,\infty) \to L^\infty(1,\infty) \times L^2(1,\infty)$ je dáno vzorcem $T(u,v) = (-u, t \mapsto \frac{u(t)}{t})$. (2 body). (c) $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{0, -1\}$. Vlastní čísla získáme řešením rovnic $\frac{g(t)}{t} - f(t) = \lambda f(t)$, $0 = \lambda g(t)$ (celkem 3 body). Pro $\lambda \notin \{0, -1\}$ spočteme $(\lambda I - T)^{-1}$, tedy nic víc ve spektru není (2 body). (d) $\sigma(T') = \sigma_p(T') = \{0, -1\}$. Rovnost $\sigma(T') = \sigma(T)$ plyne z obecné věty (1 bod), u čísel $0, -1$ ověříme, že jsou vlastní čísla pomocí vzorce z (b) (2 body). (e) Stačí zvolit $Y = \{(f, 0), f \in L^1(1,\infty)\}$. Pak $T = -Id$ na Y, tedy je to dokonce izometrie (2 body). (f) T není kompaktní kvůli výsledku (e) (1 bod).