Početní písemná část z Matematiky IV (E) pro IES FSV UK

Letní semestr 2020/2021

Příklad 1: (14 bodů) Uvažujme diferenciální rovnici

$$y''' + 9y'' + 16y' - 26y = 5\cos x - 2\sin x$$

a. Najděte všechna maximální řešení této diferenciální rovnice.
b. Najděte všechna maximální řešení splňující počáteční podmínky $y(0) = y'(0) = 0$.
c. Která maximální řešení jsou omezená na intervalu $(0, +\infty)$?
d. Která maximální řešení jsou omezená na intervalu $(-\infty, 0)$?
e. Která maximální řešení jsou omezená na $\mathbf{R}$?

Příklad 2: (14 bodů) Uvažujme diferenciální rovnici

$$y' = \sqrt{4 - y^2} \cdot x$$

a. Najděte všechna maximální řešení této diferenciální rovnice.
b. Načrtněte grafy maximálních řešení.
c. Najděte maximální řešení splňující počáteční podmínku $y(0) = 1$.

Příklad 3: (14 bodů) Uvažujme autonomní diferenciální rovnici

$$y' = \frac{\sqrt[3]{y^3 + 2y^2 + y} \cdot (y^4 + 1)}{y - 1}$$

Na základě vyšetření monotonie a definičních oborů řešení určete a načrtněte následující množiny:

a. Množina všech bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází nějaké rostoucí řešení.
b. Množina všech bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází nějaké rostoucí maximální řešení.
c. Množina všech bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází nějaké řešení definované na $\mathbf{R}$.
d. Množina všech bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází právě jedno maximální řešení.

Příklad 4: (14 bodů) Uvažujme diferenciální rovnici

$$y' \cdot (2 + x) + \frac{y}{\log(2 + x)} = x$$

a. Najděte všechna maximální řešení této diferenciální rovnice.
b. Najděte maximální řešení splňující počáteční podmínku $y(e^2 - 2) = 3$.

Příklad 5: (14 bodů) Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 30 & -35 & -24 \\ 0 & -4 & 5 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x}$$

a. Najděte obecný tvar x_2, x_3, x_4, tj. druhé, třetí a čtvrté složky řešení.
b. Spočtěte limitu $\lim\limits_{t \to +\infty} x_3(t)$ pro každé řešení, pro které limita existuje.
c. Spočtěte limitu $\lim\limits_{t \to -\infty} x_3(t)$ pro každé řešení, pro které limita existuje.

Výsledky

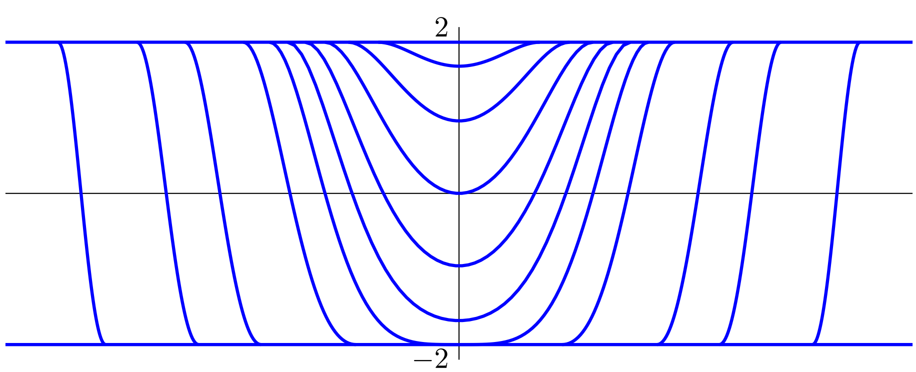
Příklad 1:

a. $y(x) = -\frac{1}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x + ae^x + e^{-5x}(b\cos x + c\sin x)$, $x \in \mathbf{R}$ $(a, b, c \in \mathbf{R})$;
b. $y(x) = -\frac{1}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x + ae^x + e^{-5x}((\frac{1}{10} - a)\cos x + (\frac{2}{5} - 6a)\sin x)$, $x \in \mathbf{R}$ $(a \in \mathbf{R})$,
tj. ta řešení z bodu a., pro která je $b = \frac{1}{10} - a$ a $c = \frac{2}{5} - 6a$;
c. řešení z bodu a., pro která je $a = 0$;
d. řešení z bodu a., pro která je $b = c = 0$;
e. řešení z bodu a., pro která je $a = b = c = 0$, tedy právě řešení $y(x) = -\frac{1}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x$, $x \in \mathbf{R}$.

Příklad 2:

a. Maximální řešení jsou:
(i) $y(x) = 2$, $x \in \mathbf{R}$;
(ii) $y(x) = -2$, $x \in \mathbf{R}$;
(iii) $$y(x) = \begin{cases} 2, & x \in (-\infty, -\sqrt{\pi - 2c}\rangle, \\ 2\sin(\frac{x^2}{2} + c), & x \in (-\sqrt{\pi - 2c}, \sqrt{\pi - 2c}), \\ 2, & x \in \langle\sqrt{\pi - 2c}, +\infty), \end{cases} \qquad \text{kde } c \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2});$$
(iv) $$y(x) = \begin{cases} 2, & x \in (-\infty, -\sqrt{\pi - 2c}\rangle, \\ 2\sin(\frac{x^2}{2} + c), & x \in (-\sqrt{\pi - 2c}, -\sqrt{-\pi - 2c}), \\ -2, & x \in \langle-\sqrt{-\pi - 2c}, +\infty), \end{cases} \qquad \text{kde } c \leq -\tfrac{\pi}{2};$$
(v) $$y(x) = \begin{cases} -2, & x \in (-\infty, \sqrt{-\pi - 2c}\rangle, \\ 2\sin(\frac{x^2}{2} + c), & x \in (\sqrt{-\pi - 2c}, \sqrt{\pi - 2c}), \\ 2, & x \in \langle\sqrt{\pi - 2c}, +\infty), \end{cases} \qquad \text{kde } c \leq -\tfrac{\pi}{2};$$
(vi) $$y(x) = \begin{cases} 2, & x \in (-\infty, -\sqrt{\pi - 2c_1}\rangle, \\ 2\sin(\frac{x^2}{2} + c_1), & x \in (-\sqrt{\pi - 2c_1}, -\sqrt{-\pi - 2c_1}), \\ -2, & x \in \langle-\sqrt{-\pi - 2c_1}, \sqrt{-\pi - 2c_2}\rangle, \\ 2\sin(\frac{x^2}{2} + c_2), & x \in (\sqrt{-\pi - 2c_2}, \sqrt{\pi - 2c_2}), \\ 2, & x \in \langle\sqrt{\pi - 2c_2}, +\infty), \end{cases} \qquad \text{kde } c_1, c_2 \leq -\tfrac{\pi}{2}.$$

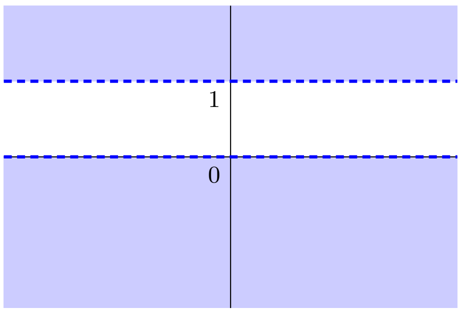
b.



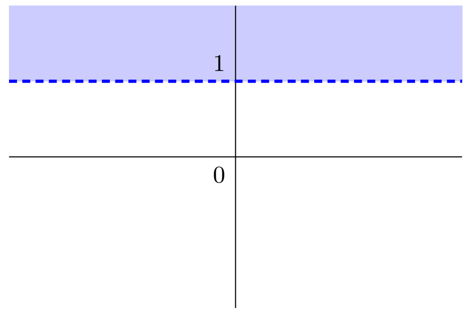
c. Jde o řešení z bodu a(iii) pro $c = \frac{\pi}{6}$, tj. $y(x) = \begin{cases} 2, & x \in (-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}\pi}\rangle, \\ 2\sin(\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{6}), & x \in (-\sqrt{\frac{2}{3}\pi}, \sqrt{\frac{2}{3}\pi}), \\ 2, & x \in \langle\sqrt{\frac{2}{3}\pi}, +\infty), \end{cases}$

Příklad 3:

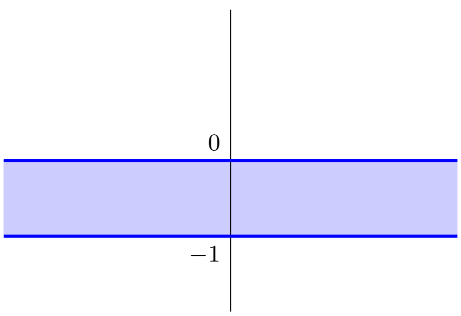
a. $\{[x,y] \in \mathbf{R}^2 \colon y \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)\}$



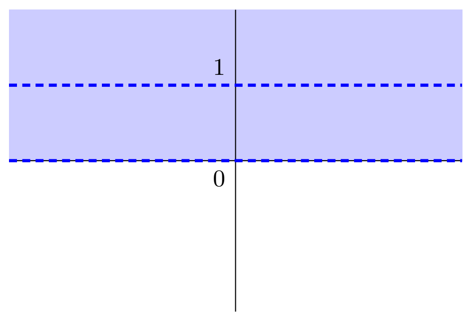
b. $\{[x,y] \in \mathbf{R}^2 \colon y \in (1, +\infty)\}$



c. $\{[x,y] \in \mathbf{R}^2 \colon y \in \langle -1, 1\rangle\}$



d. $\{[x,y] \in \mathbf{R}^2 \colon y \in (0, 1) \cup (1, +\infty)\}$



Příklad 4:

a. $y(x) = 2 + x - \frac{x}{\log(2+x)} - \log(2+x) + \frac{c}{\log(2+x)}$, $x \in (-2, -1)$ nebo $x \in (-1, +\infty)$ ($c \in \mathbf{R}$).

b. $y(x) = 2 + x - \frac{x}{\log(2+x)} - \log(2+x) + \frac{8-e^2}{\log(2+x)}$, $x \in (-1, +\infty)$.

Příklad 5:

a. $x_4(t) = ae^{-t} + b\cos 3t + c\sin 3t$, $x_3(t) = -2ae^{-t} + \frac{13}{15}b\sin 3t - \frac{7}{5}b\cos 3t - \frac{7}{5}c\sin 3t - \frac{13}{15}c\cos 3t + d$, $x_2(t) = -2e^{-t} + \frac{1}{3}b\sin 3t - b\cos 3t - c\sin t - \frac{1}{3}c\cos 3t + \frac{5}{4}d$, $t \in \mathbf{R}$ ($a, b, c, d \in \mathbf{R}$).

b. Limita je rovna d, pokud $b = c = 0$, v ostatních případech neexistuje.

c. Limita je rovna $+\infty$, pokud $a < 0$; $-\infty$, pokud $a > 0$; d, pokud $a = b = c = 0$; v ostatních případech neexistuje.