Početní písemná část z Matematiky IV (D) pro IES FSV UK

Letní semestr 2020/2021

Příklad 1: (14 bodů) Uvažujme diferenční rovnici

$$y(n+3) + 3y(n+2) + 4y(n+1) - 8y(n) = (-2)^n$$

a. Najděte všechna řešení této diferenční rovnice.
b. Najděte řešení splňující počáteční podmínky $y(1) = y(2) = y(3) = 0$.
c. Spočtěte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y(2n+1)}{2^{2n+1}}$ pro každé řešení, pro které tato limita existuje.

Příklad 2: (14 bodů) Uvažujme diferenciální rovnici

$$y' = \frac{2x+y}{x} \cdot \log \frac{2x+y}{x} + \frac{y}{x}$$

a. Najděte všechna maximální řešení této diferenciální rovnice.
b. Pro která $d \in \mathbf{R}$ existuje maximální řešení, které splňuje počáteční podmínku $y(1) = d$? Pro ta d, pro která takové řešení existuje, je najděte.

Příklad 3: (14 bodů) Uvažujme autonomní diferenciální rovnici

$$y' = \sqrt[3]{\arcsin y} \cdot \left(\tfrac{\pi}{6} - \arcsin y\right) \cdot \left(\tfrac{\pi}{3} + \arcsin y\right)$$

Na základě vyšetření monotonie a definičních oborů řešení určete a načrtněte následující množiny:

a. Množina všech bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází nějaké klesající řešení.
b. Množina všech bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází nějaké klesající maximální řešení.
c. Množina všech bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází právě jedno maximální řešení.
d. Množina všech bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází nějaké řešení definované na $\mathbf{R}$.

Příklad 4: (14 bodů) Uvažujme diferenciální rovnici

$$y' + \frac{y}{2+3x} = \frac{3+x^2}{y}$$

a. Najděte tvar všech řešení této diferenciální rovnice a popište jejich definiční obory pomocí vhodné nerovnosti.
b. Existuje řešení definované na intervalu tvaru $(T, +\infty)$ pro nějaké $T \in \mathbf{R}$? Zdůvodněte.

Příklad 5: (14 bodů) Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -11 \\ 3 & -1 & 3 \\ -9 & 9 & 1 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x}$$

a. Najděte fundamentální matici této soustavy.
b. Spočtěte limitu $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-2t} \cdot x_1(t)$ pro každé řešení, pro které limita existuje.
c. Spočtěte limitu $\lim\limits_{t\to-\infty} e^{13t} \cdot x_2(t)$ pro každé řešení, pro které limita existuje.

Výsledky

Příklad 1:

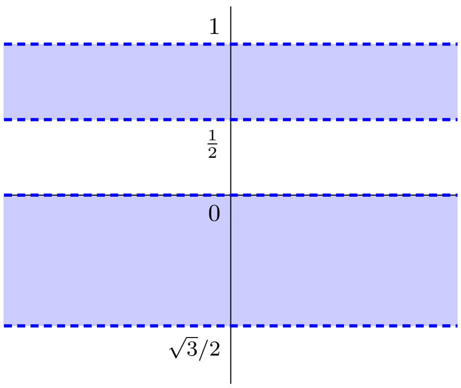
a. $\{-\frac{1}{12} \cdot (-2)^n + a + (2\sqrt{2})^n (b \cos \frac{3n\pi}{4} + c \cos \frac{3n\pi}{4})\}_{n=1}^{\infty}$, $a, b, c \in \mathbf{R}$;
b. $\{-\frac{1}{12} \cdot (-2)^n - \frac{2}{39} + (2\sqrt{2})^n (\frac{1}{104} \cos \frac{3n\pi}{4} - \frac{5}{104} \cos \frac{3n\pi}{4})\}_{n=1}^{\infty}$;
c. Limita je $\frac{1}{12}$, pokud $b = c = 0$, v ostatních případech neexistuje.

Příklad 2:

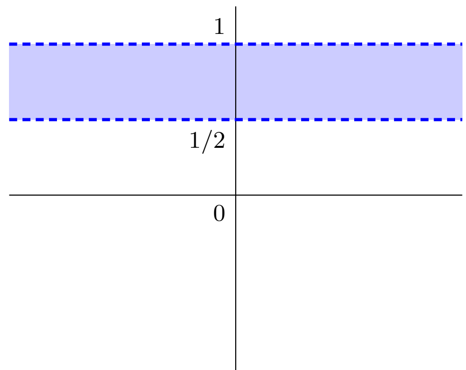
a. Maximální řešení jsou: $y(x) = -2x + xe^{kx}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, +\infty)$ (kde $k \in \mathbf{R}$).
b. Takové řešení existuje pro $d > -2$. Jeho tvar je $y(x) = -2x + xe^{x \log(d+2)}$, $x \in (0, +\infty)$.

Příklad 3:

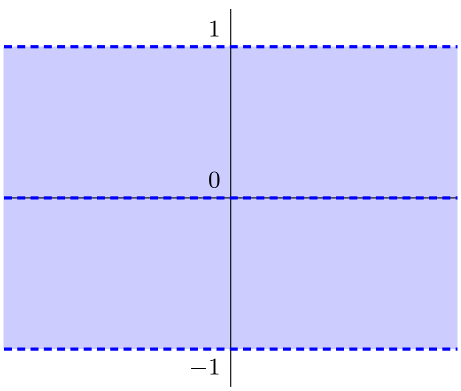
a. $\{[x, y] \in \mathbf{R}^2 \colon y \in (-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0) \cup (\frac{1}{2}, 1)\}$



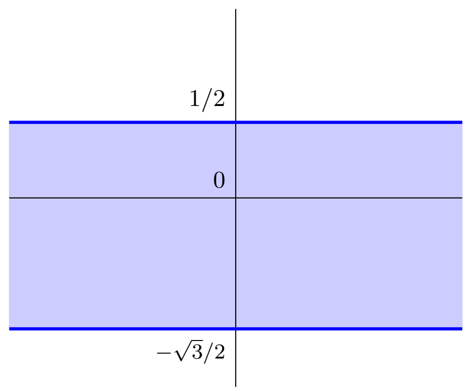
b. $\{[x, y] \in \mathbf{R}^2 \colon y \in (\frac{1}{2}, 1)\}$



c. $\{[x, y] \in \mathbf{R}^2 \colon y \in (-1, 0) \cup (0, 1)\}$



d. $\{[x, y] \in \mathbf{R}^2 \colon y \in \langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \rangle\}$



Příklad 4:

a. $y(x) = \pm\sqrt{\frac{62}{45}(2+3x) + \frac{2}{99}(2+3x)^3 - \frac{1}{9}(2+3x)^2 + \frac{2c}{\sqrt[3]{(2+3x)^2}}}$, kde $c \in \mathbf{R}$, na intervalech, kde výraz pod odmocninou je kladný.
b. Takových řešení existuje nekonečně mnoho – pro každé $c \in \mathbf{R}$ dvě maximální. Důvod je ten, že výraz pod odmocninou (viz bod a.) má v $+\infty$ limitu $+\infty$, a to pro každé $c \in \mathbf{R}$.

Příklad 5:

a. Fundamentální matice je (například)

$$\begin{pmatrix} -e^{10t} & \frac{47}{45}e^{-13t} & e^{2t} \\ 0 & -\frac{23}{45}e^{-13t} & e^{2t} \\ e^{10t} & e^{-13t} & 0 \end{pmatrix}.$$

b. Jest $x_1(t) = -ae^{10t} + \frac{47}{45}be^{-13t} + ce^{2t}$; limita je rovna $-\infty$, pokud $a > 0$, $+\infty$, pokud $a < 0$, c, pokud $a = 0$.

c. Jest $x_2(t) = -\frac{23}{45}be^{-13t} + ce^{2t}$; limita je rovna $-\frac{23}{45}b$.