Početní písemná část z Matematiky IV (A) pro IES FSV UK

Letní semestr 2020/2021

Příklad 1: (14 bodů) Uvažujme diferenční rovnici

$$y(n+3) - 5y(n+2) + 6y(n+1) + 12y(n) = \frac{1}{2^n}$$

a. Najděte všechna řešení této diferenční rovnice.
b. Najděte řešení splňující počáteční podmínky $y(1) = y(2) = y(3) = \frac{1}{111}$.
c. Spočtěte limitu $\lim_{n\to\infty} y(6n)$ pro každé řešení, pro které tato limita existuje.

Příklad 2: (14 bodů) Uvažujme diferenciální rovnici

$$y' = \frac{1}{y^3} \cdot \sqrt[3]{y^4 - 16} \cdot e^x$$

a. Najděte všechna maximální řešení této diferenciální rovnice.
b. Načrtněte grafy maximálních řešení.

Příklad 3: (14 bodů) Uvažujme autonomní diferenciální rovnici

$$y' = \frac{\log(1 + \sqrt[4]{|y|}) \cdot \log(y+2) \cdot (y-2)}{y^2 + 1}$$

Na základě vyšetření monotonie a definičních oborů řešení určete a načrtněte následující množiny:

a. Množina všech bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází nějaké rostoucí řešení.
b. Množina všech bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází nějaké rostoucí řešení definované na $\mathbf{R}$.
c. Množina všech bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází nějaké klesající řešení definované na $\mathbf{R}$.
d. Množina všech bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází právě jedno maximální řešení.

Příklad 4: (14 bodů) Uvažujme diferenciální rovnici

$$y' + \frac{y}{e^x + 1} = e^x$$

a. Najděte všechna maximální řešení této diferenciální rovnice.
b. Najděte maximální řešení splňující počáteční podmínku $y(0) = 0$.

Příklad 5: (14 bodů) Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x}$$

a. Najděte fundamentální matici této soustavy.
b. Spočtěte limitu $\lim_{t\to+\infty} e^t \cdot x_1(t)$ pro každé řešení, pro které limita existuje.

Výsledky

Příklad 1:

a. $\{\frac{8}{111\cdot 2^n} + a\cdot(-1)^n + (2\sqrt{3})^n(b\cos\frac{n\pi}{6} + c\sin\frac{n\pi}{6}\}_{n=1}^{\infty}$, $a, b, c, \in \mathbf{R}$.

b. $\{\frac{8}{111\cdot 2^n} + \frac{10}{19\cdot 37}\cdot(-1)^n + (2\sqrt{3})^n(\frac{-113}{3\cdot 76\cdot 111}\cos\frac{n\pi}{6} + \frac{5}{76\cdot 111\cdot\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{6}\}_{n=1}^{\infty}$.

c. Pokud $b = 0$, je limita a. Pokud $b \neq 0$, limita neexistuje.

Příklad 2:

a. Maximální řešení jsou:

(i) Stacionární řešení $y(x) = 2$, $x \in \mathbf{R}$; $y(x) = -2$, $x \in \mathbf{R}$;

(ii) $y(x) = \sqrt[4]{16 + \left(\frac{8}{3}(e^x + c)\right)^{\frac{3}{2}}}$, $x \in \mathbf{R}$, kde $c \geq 0$;

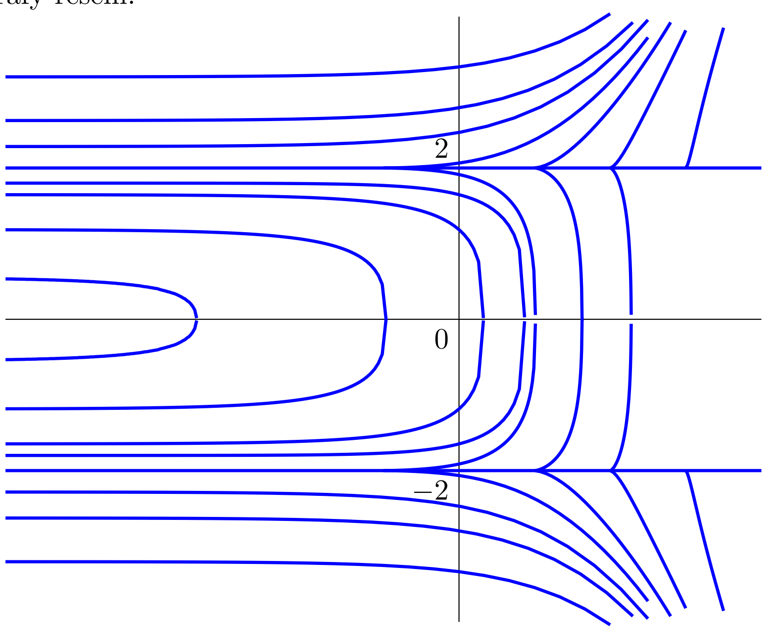
(iii) $y(x) = \begin{cases} 2 & x \in (-\infty, \log(-c)\rangle, \\ \sqrt[4]{16 + \left(\frac{8}{3}(e^x + c)\right)^{\frac{3}{2}}}, & x \in (\log(-c), +\infty), \end{cases}$ kde $c < 0$;

(iv) $y(x) = \sqrt[4]{16 - \left(\frac{8}{3}(e^x + c)\right)^{\frac{3}{2}}}$, $x \in (-\infty, \log(-c + \frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{4}))$, kde $c \in \langle 0, \frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{4})$;

(v) $y(x) = \begin{cases} 2 & x \in (-\infty, \log(-c)\rangle, \\ \sqrt[4]{16 - \left(\frac{8}{3}(e^x + c)\right)^{\frac{3}{2}}}, & x \in (\log(-c), \log(-c + \frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{4})), \end{cases}$ kde $c < 0$;

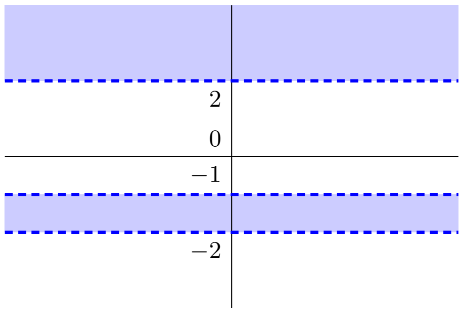
(vi) řešení z bodů (ii)–(v) vynásobená -1.

b. Grafy řešení:

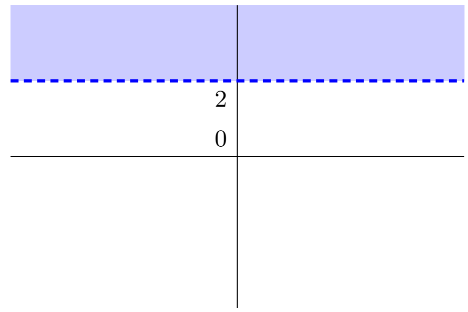


Příklad 3:

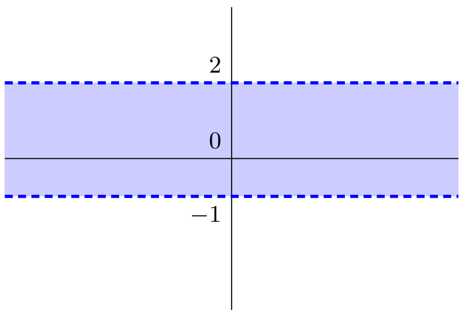
a. $\{[x,y]\in\mathbf{R}^2\colon y\in(-2,-1)\cup(2,+\infty)\}$



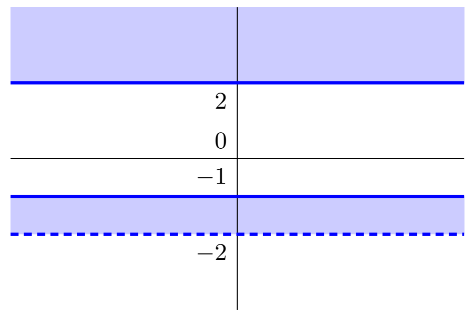
b. $\{[x,y]\in\mathbf{R}^2\colon y>2\}$



c. $\{[x,y]\in\mathbf{R}^2\colon y\in(-1,2)\}$



d. $\{[x,y]\in\mathbf{R}^2\colon (-2,-1\rangle\cup\langle 2,+\infty)\}$



Příklad 4:

a. $y(x)=e^x+1-\frac{e^x+1}{e^x}\log(e^x+1)+c\cdot\frac{e^x+1}{e^x}$, $x\in\mathbf{R}$, $c\in\mathbf{R}$.

b. $y(x)=e^x+1-\frac{e^x+1}{e^x}\log(e^x+1)+(\log 2-1)\cdot\frac{e^x+1}{e^x}$, $x\in\mathbf{R}$ (tj. $c=\log 2-1$).

Příklad 5:

a. Fundamentální matice je (například) $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}e^{-t} & e^{-t}(\frac{2}{5}\cos 3t+\frac{6}{5}\sin 3t) & e^{-t}(\frac{2}{5}\sin 3t-\frac{6}{5}\cos 3t)\\ -e^{-t} & e^{-t}(\frac{4}{5}\cos 3t-\frac{3}{5}\sin 3t) & e^{-t}(\frac{4}{5}\sin 3t+\frac{3}{5}\cos 3t)\\ e^{-t} & e^{-t}\cos 3t & e^{-t}\sin 3t\end{pmatrix}$.

b. Obecný tvar x_1, který vyjde při řešení, je $x_1(t)=-\frac{a}{2}e^{-t}+be^{-t}(\frac{2}{5}\cos 3t+\frac{6}{5}\sin 3t)+ce^{-t}(\frac{2}{5}\sin 3t-\frac{6}{5}\cos 3t)$. Pokud $b=c=0$, je limita ze zadání rovna $-\frac{a}{2}$. V ostatních případech neexistuje.