Početní písemná část z Matematiky II (E) pro IES FSV UK

Letní semestr 2019/2020

Příklad 1: Najděte všechna řešení soustavy $\mathbb{A}.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ pro níže uvedenou matici $\mathbb{A}$ a pro tři uvedené vektory pravých stran:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 6 & 9 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 5 & 4 \\ 9 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(8 bodů)}$$

Příklad 2: Určete a načrtněte definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arcsin \frac{y+x}{x^2+x+1},$$

spočtěte její parciální derivace podle všech proměnných všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $[1,-1,f(1,-1)]$. (9 bodů)

Příklad 3: Dokažte, že rovnice

$$\sin(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 2y) + \cos(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 2y) = 1$$

určuje v nějakém okolí bodu $[-1, \frac{1}{2}]$ implicitně zadanou funkci $y = f(x)$. Spočtěte $f'(-1)$ a $f''(-1)$ a napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $[-1, f(-1)]$. (8 bodů)

Příklad 4: Najděte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot na M nabývá, pokud

$$f(x,y,z) = (x-z)\cdot y^2,\; M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \colon 2x^2 + y^2 + 2z^2 = 1, x+z \geq \frac{1}{2}\}.$$

(15 bodů)

Příklad 5: Zjistěte, zda následující řada konverguje absolutně, konverguje neabsolutně nebo diverguje:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\sqrt[6]{n^2+8n} - \sqrt[6]{n^2-n}}{\sqrt[3]{n^4+3n^2} - \sqrt[3]{n^4-2n^2}} \right)^n \qquad \text{(10 bodů)}$$

Výsledky

Příklad 1: Pro $\boldsymbol{b}_1$ nemá řešení. Pro $\boldsymbol{b}_2$ nekonečně mnoho řešení ve tvaru $[2-5t, 2t-1, 3t-1, t]$, $t \in \mathbb{R}$. Pro $\boldsymbol{b}_3$ nekonečně mnoho řešení ve tvaru $[1-5t, 2t, 3t-1, t]$, $t \in \mathbb{R}$.

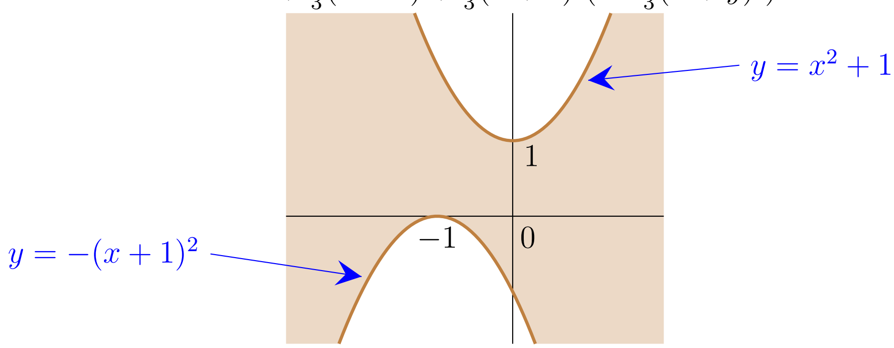
Příklad 2:

$D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; -(x+1)^2 \leq y \leq x^2+1\}$ (obrázek viz níže, hranice patří do D_f). $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y+x}{x^2+x+1}\right)^2}} \cdot \frac{-x^2+1-2xy-y}{(x^2+x+1)^2}$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y+x}{x^2+x+1}\right)^2}} \cdot \frac{1}{x^2+x+1}$ pokud $-(x+1)^2 < y < x^2+1$ (tj. na vnitřku D_f).

$\frac{\partial f}{\partial y}$ v hraničních bodech nemá smysl počítat (D_f neobsahuje svislou úsečku kolem takových bodů).

$\frac{\partial f}{\partial x}$ má z vynechaných bodů smysl počítat jen v bodech $[0,1]$ a $[-1,0]$ (v ostatních případech D_f neobsahuje vodorovnou úsečku kolem příslušného bodu). $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,0)$ a $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$ neexistují.

Tečná rovina: $z = 0 + \frac{1}{3}(x-1) + \frac{1}{3}(x+1)$ ($= \frac{1}{3}(x+y)$).



Příklad 3: $f'(-1) = -\frac{1}{2}$, $f''(-1) = 0$. Rovnice tečny: $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot (x+1)$ (tj. $y = -\frac{1}{2}x$).

Příklad 4: Maximum $\frac{1}{4}$ v bodech $[\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0]$, minimum $-\frac{1}{4}$ v bodech $[0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}]$.

Příklad 5: Řada konverguje absolutně. (Podle odmocninového kritéria, $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{9}{10}$.)