Početní písemná část z Matematiky II (D) pro IES FSV UK

Letní semestr 2019/2020

Příklad 1: Nechť

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 7 & 3 & 9 & 5 \\ 10 & 2 & 8 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

a $\mathbb{B}$ nechť je matice, která vznikne z $\mathbb{A}$ tak, že první řádek vydělíme dvěma, druhý řádek vydělíme třemi, třetí řádek vydělíme čtyřmi, čtvrtý řádek vydělíme pěti a pátý řádek vydělíme šesti. Spočtěte $\det(\mathbb{A})$ a $\det(\mathbb{A} \cdot (\mathbb{B}^T)^{-1})$.

(8 bodů)

Příklad 2: Určete a načrtněte definiční obor funkce

$$f(x,y) = \log \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{|y| + \sqrt[3]{x}},$$

spočtěte její parciální derivace podle všech proměnných všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $[-1, 3, f(-1,3)]$.

(9 bodů)

Příklad 3: Dokažte, že rovnice

$$\operatorname{arctg}(x + \sin y) + \operatorname{arctg}(x + \cos y) = \frac{\pi}{4}$$

určuje v nějakém okolí bodu $[1, \pi]$ implicitně zadanou funkci $y = f(x)$. Spočtěte $f'(1)$ a $f''(1)$ a napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $[1, f(1)]$.

(8 bodů)

Příklad 4: Najděte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot na M nabývá, pokud

$$f(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + 2z^2, M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \colon 9x + 9z + 8y^2 = 9, x + y + z \leq \tfrac{5}{4}\}.$$

(15 bodů)

Příklad 5: Zjistěte, zda následující řada konverguje absolutně, konverguje neabsolutně nebo diverguje:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\log \cos \left(\sqrt[3]{n^2 + n} - \sqrt[3]{n^2 + 1} \right) \right)^2$$

(10 bodů)

Výsledky

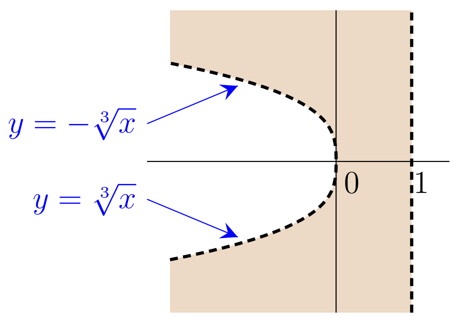
Příklad 1: $\det(\mathbb{A}) = -2000$, $\det(\mathbb{B}) = -\frac{50}{9}$, $\det((\mathbb{B}^T)^{-1}) = -\frac{9}{50}$, $\det(\mathbb{A} \cdot (\mathbb{B}^T)^{-1}) = 360$.

Příklad 2:

$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \in (0, 1) \text{ nebo } x \leq 0 \text{ a } y \in (-\infty, \sqrt[3]{x}) \cup (-\sqrt[3]{x}, +\infty)\}$ (obrázek viz níže, hraniční body nepatří do definičního oboru). $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-|y|-1}{3\sqrt[3]{x^2}(1-\sqrt[3]{x}(|y|+\sqrt[3]{x})}$ pro $[x, y] \in D_f$, $x \neq 0$ (tj. vynechá se osa y – přesněji osa y bez počátku, který v D_f není). $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-\operatorname{sgn} y}{|y|+\sqrt[3]{y}}$ pro $[x, y] \in D_f$, $y \neq 0$ (tj. vynechají se body $[x, 0]$, $x \in (0, 1)$).

$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y)$ pro $y \neq 0$ neexistuje. $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0)$ pro $x \in (0, 1)$ rovněž neexistuje. má z vynechaných bodů smysl počítat jen v bodech

Tečná rovina: $z = -\frac{1}{3}(x + 1) - \frac{1}{2}(y - 3)$.



Příklad 3: $f'(1) = 3$, $f''(1) = 14$. Rovnice tečny: $y = \pi + 3(x - 1)$.

Příklad 4: f není na M shora omezená (například $[1 - \frac{8}{9}y^2, y, 0] \in M$ pro $y > 0$ dost velké a $f(1 - \frac{8}{9}y^2, y, 0) \to +\infty$), maximum ani supremum tedy neexistuje. Minimum je $\frac{441}{512}$ v bodech $[\frac{3}{16}, \pm\frac{3\sqrt{17}}{16}, \frac{9}{32}]$. Že jde opravdu o minimum plyne například z toho, že množina $\{[x, y, z] \in M\colon f(x, y, z) \leq C\}$ je kompaktní pro každé $C > 0$.

Příklad 5: Řada konverguje absolutně. Má nezáporné členy a lze ji srovnat s řadou $\sum_n \frac{1}{n^{4/3}}$.